第 115 回数学教育実践研究会

問題解決のサプリメント
工夫 or 元気

レポート

令和 2 年 11 月 28 日 (土)
オンライン Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

《 工夫 or 元気 で解決 》

問題

θ は定数で、$0<\theta<2\pi\ \left(\theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ とする。漸化式

$$a_{n+2}-2(\sin\theta)a_{n+1}-(\cos^2\theta)a_n=0 \qquad (n \geqq 1) \tag{1}$$

について以下の問いに答えよ。

(i) x の 2 次方程式 $x^2-2(\sin\theta)x-\cos^2\theta=0$ の解を求めよ。

(ii) $p\,,q$ を実数の定数とし、$a_1=p$, $a_2=q$ として、
(1) の一般項 a_n を $p\,,q\,,n$ の式で表せ。

(iii) 次の式を満たす (1) の一般項 a_n を求めよ。

$$a_1=2\ ,\ \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

（解答）

(i)（工夫して）

$$\begin{aligned} x^2-2(\sin\theta)x-\cos^2\theta &= x^2-2(\sin\theta)x+(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)\\ &=(x-\sin\theta-1)(x-\sin\theta+1)\\ \therefore\quad x&=\sin\theta\pm1 \end{aligned}$$

(i)（元気を出して）

解の公式から

$$x=\frac{2\sin\theta\pm\sqrt{4\sin^2\theta+4\cos^2\theta}}{2}=\frac{2\sin\theta\pm\sqrt{4}}{2}=\sin\theta\pm1$$

(ii) $\alpha=\sin\theta+1$, $\beta=\sin\theta-1$ とおく。α,β は (i) で求めた 2 つの解である。

$$\begin{aligned} &a_{n+2}-(\alpha+\beta)\,a_{n+1}+\alpha\beta\,a_n=0\\ &a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\,a_n)\\ &a_{n+2}-\beta\,a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta\,a_n) \end{aligned}$$

$0<\theta<2\pi\ \left(\theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ なので $\alpha,\beta\neq0$ である。

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1}-\alpha\,a_n=(q-\alpha\,p)\,\beta^{n-1} & (2)\\ a_{n+1}-\beta\,a_n=(q-\beta p)\,\alpha^{n-1} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad a_n &= \frac{(q-\beta p)\,\alpha^{n-1}-(q-\alpha\,p)\,\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \qquad (\because\ (2)-(3)\ ,\ \alpha-\beta=2\neq0\,)\\ &=\frac{1}{2}\Big\{\,(p+q-p\sin\theta)(\sin\theta+1)^{n-1}\\ &\qquad\qquad -(q-p-p\sin\theta)(\sin\theta-1)^{n-1}\,\Big\} \end{aligned} \tag{4}$$

(iii) まず、$p=a_1=2$ である。この後、θ の値により場合を 2 つに分けて調べていく。

【 $0<\theta<\pi\ ,\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ のとき 】

$0<\sin\theta<1$ なので、$-1<\sin\theta-1<0$, $1<\sin\theta+1<2$ である。

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(\sin\theta-1)^{n-1}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}(\sin\theta+1)^{n-1}=\infty$$

(4) より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる必要十分条件は $p+q-p\sin\theta=0$ つまり $q=2\sin\theta-2$ である。$p=2$, $q=2\sin\theta-2$ を (4) に代入して $a_n=2(\sin\theta-1)^{n-1}(n \geqq 1)$ である。

【 $\pi<\theta<2\pi$,$\theta\neq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき 】

$-1<\sin\theta<0$ なので、$-2<\sin\theta-1<-1$, $0<\sin\theta+1<1$ である。

$$\lim_{n\to\infty}|\sin\theta-1|^{n-1}=\infty\ ,\ \lim_{n\to\infty}(\sin\theta+1)^{n-1}=0$$

より先ほどと同様の議論により、$a_n=2(\sin\theta+1)^{n-1}$ を得る。

以上より、求める a_n は、

$a_n=2\,(\sin\theta-1)^{n-1}\quad (0<\theta<\pi\ ,\theta\neq\dfrac{\pi}{2})$ 　または

$a_n=2\,(\sin\theta+1)^{n+1}\quad (\pi<\theta<2\pi\ ,\theta\neq\dfrac{3}{2}\pi)$

（解答終了）

《 レポートの動機と内容・追加事項 》

今見た問題は、実は大学の定期テストに出した微分方程式の問題を漸化式版へと移行した問題である。小問 (i) がそれである。解けた学生と解けなかった学生の違いについて、私が感じたことは、「工夫」することが出来る、兎に角やってみようという「元気」を持っている、のいずれかだと日頃感じている学生が解けていた、ということだった。そのことを伝えること、そして、このような資質を訓練する問題の例として紹介すること、が今回のレポートのメインの理由だった。

レポートをまとめていくうちに、採点していて気になったことがあったので、心配事として追加報告することにした。そのために、元の微分方程式版を次に示す。

《 元の問題：心配事 》

元の問題

θ は定数で、$0\leqq\theta<2\pi$ とする。微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2(\sin\theta)\frac{dy}{dx}-(\cos^2\theta)y=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について以下の問いに答えよ。

(i) 微分方程式 ① の特性方程式

$$\lambda^2-2(\sin\theta)\lambda-\cos^2\theta=0$$

の解を求めよ（答のみ)。

(ii) 微分方程式 ① の一般解を求めよ。(答のみ)。

(iii) 微分方程式 ① の解のうち条件

$$y(0)=2\ ,\ \lim_{x\to\infty}y(x)=0$$

を満たす特殊解を求めよ。

【 心配事の内容 】次のような学生がいる

(i) を $\lambda = \sin\theta \pm 1$ と解答できているのに、(ii) の答えが

$$y = C_1 e^{\sin\theta+1} + C_2 e^{\sin\theta-1} \qquad C_1, C_2: \text{任意定数} \tag{5}$$

となってしまっており、(iii) に手を付けていない。

解法マニュアルにそのまま従って

$$y = C_1 e^{(\sin\theta+1)x} + C_2 e^{(\sin\theta-1)x} \qquad C_1, C_2: \text{任意定数} \tag{6}$$

とするだけなのに、できない。

定期試験問題ではこの問題の前に $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解かせる問題があり、小問に分けた問題ではないのに、特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ を自分で書き、解 $\lambda = 2, 3$ を求め、$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ と答えられている学生が、この問題 (ii) では x のない (7)：$y = C_1 e^{\sin\theta+1} + C_2 e^{\sin\theta-1}$ を答えとしている。

単に計算間違いをして問題が解けなかったというのとは違い、学生の中に数学的な未熟部分があったり、これまでのどこかの段階で数学上の根本的な誤解をしたままで、今に至っている可能性があるのではないかと思う。

高校の学習指導要領外だが、一応解答を付けておこう。漸化式の問題 (iii) の解答と違いを比較すると面白いかもしれない。

【 元の問題 (iii) の解答 】（学習指導要領外）

(i) の答えは既に示してあるので、(ii),(iii) の略解を示しておく。

(ii) の答え：一般解は $y(x) = C_1 e^{(\sin\theta+1)x} + C_2 e^{(\sin\theta-1)x}$ である。$y(0) = 2$ より、

$$C_1 + C_2 = 2 \tag{7}$$

次に $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ について、$\sin\theta - 1 \leqq 0 \leqq \sin\theta + 1$ であることに留意し、3 つの場合に分けて考察する。

【 $\sin\theta = 1$ つまり $\theta = \dfrac{1}{2}\pi$ のとき 】

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2$ なので、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ となるのは $C_1 = C_2 = 0$ のとき。このとき、$C_1 + C_2 = 0 \neq 2$ となり (7) に反する。よって解なし。

【 $\sin\theta = -1$ つまり $\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき 】

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x}$ 。$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ となるのは $C_1 = 0$ のときである。(7) より $C_2 = 2$ 。よって、

$$y(x) = 2e^{-2x} \tag{8}$$

【 $\sin\theta \neq \pm 1$ つまり $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ のとき 】

$\sin\theta - 1 < 0 < \sin\theta + 1$ なので、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ となるのは $C_1 = 0$ のときである。(7) より、$C_2 = 2$ 。よって、

$$y(x) = 2e^{(\sin\theta-1)x} \tag{9}$$

以上、求める特殊解は、(8),(9) より

$$y = 2e^{(\sin\theta-1)x} \quad \left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$$

（解答終了）

＜余談＞

漸化式の問題とこの微分方程式の問題とでは、θ の範囲に違いがある。微分方程式の問題に合わせて範囲を設定すると解答が煩雑になるために、漸化式の方の範囲を変えた。

次に、微分方程式の範囲に合わせたままで解答した場合の解答を参考として示しておく。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ で漸化式を解く

θ は定数で、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。漸化式

$$a_{n+2} - 2(\sin\theta)a_{n+1} - (\cos^2\theta)a_n = 0 \qquad (n \geqq 1) \tag{10}$$

について以下の問いに答えよ。

(i) x の 2 次方程式 $x^2 - 2(\sin\theta)x - \cos^2\theta = 0$ の解を求めよ。

(ii) $p\,,q$ を実数の定数とし、$a_1 = p$, $a_2 = q$ として、
(1) の一般項 a_n を $p\,,q\,,n$ の式で表せ。

(iii) 次の式を満たす (1) の一般項 a_n を求めよ。

$$a_1 = 2\ ,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

（解答）

(i)（既に示してあるので省略）

(ii) 隣接 3 項間にならない：$\sin\theta = 0$ *or* $\cos\theta = 0$ つまり$\theta = \dfrac{k}{2}\pi\ (k = 0, 1, 2, 3)$ の状況に応じて場合を分けて議論を進める。

【 $\theta = 0\,,\pi$ のとき】 $\sin\theta = 0\,,\cos^2\theta = 1$ なので、漸化式は $a_{n+2} - a_n = 0$ つまり、

$a_{n+2} = a_n\ (n \geqq 1)$

である。

$$\therefore\ a_n = \begin{cases} p & (n：奇数) \\ q & (n：偶数) \end{cases} \tag{11}$$

【 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき】 $\sin\theta = 1\,,\cos^2\theta = 0$ なので、漸化式は $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 0$ つまり、

$a_{n+2} = 2a_{n+1}\ (n \geqq 1)$

である。

$$\therefore\ a_1 = p\ ,\ a_n = 2^{n-2}q\ (n \geqq 2) \tag{12}$$

【 $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ のとき】

$\sin\theta = -1\,,\cos^2\theta = 0$ なので、漸化式は $a_{n+2} + 2a_{n+1} = 0$ つまり、

$a_{n+2} = -2a_{n+1}\ (n \geqq 1)$

である。

$$\therefore\ a_1 = p\ ,\ a_n = (-2)^{n-2}q\ (n \geqq 2) \tag{13}$$

【 $\theta \neq \dfrac{k}{2}\pi\ (k = 0, 1, 2, 3)$ のとき】

$\alpha = \sin\theta + 1$, $\beta = \sin\theta - 1$ とおく（α, β は (i) の 2 つの解で、$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ ）。

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)\,a_{n+1} + \alpha\beta\,a_n = 0$$
$$a_{n+2} - \alpha\,a_{n+1} = \beta\,(a_{n+1} - \alpha\,a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta\,a_{n+1} = \alpha\,(a_{n+1} - \beta\,a_n)$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - \alpha\, a_n = (q - \alpha\, p)\, \beta^{n-1} & (14) \\ a_{n+1} - \beta\, a_n = (q - \beta p)\, \alpha^{n-1} & (15) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_n &= \frac{(q-\beta p)\,\alpha^{n-1} - (q-\alpha\, p)\,\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \qquad (\because\ (15)-(14)\ ,\ \alpha - \beta = 2 \neq 0) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\ (p+q-p\sin\theta)(\sin\theta+1)^{n-1} \right. \\ &\qquad\qquad \left. -(q-p-p\sin\theta)(\sin\theta-1)^{n-1}\ \right\} \qquad (16) \end{aligned}$$

(iii) θ の値について、場合を 4 つに分けて調べていく。まず、$p = a_1 = 2$ である。

【 $\theta = 0, \pi$ のとき 】

(11) より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a_1 = 2 \neq 0$ 。よって、a_n は存在しない。

【 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき 】

(12) より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が極限値を持つために $q = 0$ でなければならない。このとき、$a_1 = 2\,, a_n = 0\ (n \geqq 2)$ であり、これは題意を満たす。

【 $\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき 】

(13) より、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき と同様に、$a_1 = 2, a_n = 0\ (n \geqq 2)$ である。

【 $0 < \theta < \pi\ , \theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき 】

$0 < \sin\theta < 1$ なので、$-1 < \sin\theta - 1 < 0$, $1 < \sin\theta + 1 < 2$ となり、

$$\lim_{n\to\infty} (\sin\theta - 1)^{n-1} = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} (\sin\theta+1)^{n-1} = \infty$$

(16) より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる必要十分条件は $p + q - p\sin\theta = 0$ つまり $q = 2\sin\theta - 2$ である。$p = 2$, $q = 2\sin\theta - 2$ を (16) に代入して $a_n = 2(\sin\theta - 1)^{n-1} (n \geqq 1)$ である。

【 $\pi < \theta < 2\pi\ , \theta \neq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき 】

$-1 < \sin\theta < 0$ なので、$-2 < \sin\theta - 1 < -1$, $0 < \sin\theta + 1 < 1$ となり、

$$\lim_{n\to\infty} |\sin\theta - 1|^{n-1} = \infty\ ,\ \lim_{n\to\infty} (\sin\theta+1)^{n-1} = 0$$

より同様に、$a_n = 2(\sin\theta + 1)^{n-1}$ である。

以上より、求める a_n は、

$a_n = 2\,(\sin\theta - 1)^{n-1}$ 　　$(0 < \theta < \pi\ , \theta \neq \dfrac{\pi}{2})$ 　　または

$a_n = 2\,(\sin\theta + 1)^{n+1}$ 　　$(\pi < \theta < 2\pi\ , \theta \neq \dfrac{3}{2}\pi)$ 　　または

$a_1 = 2$, $a_n = 0\ (n \geqq 2)$

（解答終了）