第 114 回数学教育実践研究会

割り算しないで割り算する

レポート

令和 2 年 8 月 29 日 (土)
オンライン Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

《割り算しないで割り算する！？》

方程式の実数解（の近似値）を求める有名な方法に、Newton 法があります。その Newton 法に関係した話の紹介です。

「数値解析の基礎」（著）P. ヘンリッチ（共訳）一松信・平本巌・本田勝　＜培風館＞

で見つけた話題です。“**割り算をしないで逆数を求めること**” と書かれていました。

割り算をしないで逆数を求める

c を正の定数とする。このとき、$0 < x_0 < \dfrac{2}{c}$ である任意の x_0 に対して、漸化式

$$x_{n+1} = x_n(2 - cx_n) \quad \cdots\cdots (1)$$

により決まる数列 $\{x_n\}$ は $\dfrac{1}{c}$ に収束する。

(1) の右辺は和・差・積の演算は出てくるが、商はない。つまり割り算は一切しない。そして、十分 n を大きく取れば x_n は $\dfrac{1}{c}$ の近似値になる。

本にあった次の例を元にいろいろ計算してみましょう。

＜例＞ $\dfrac{1}{e}$

$e = 2.71828183$ として、

$$\frac{1}{e} = 0.3678794409628968 \qquad (\text{ wxMaxima 利用 })$$

ですが、$x_0 = 0.3$ や $x_0 = 0.5$ として漸化式で計算していくと、

$x_0 = 0.3$　のとき　$x_4 = 0.3678794409622327$，$x_5 = 0.3678794409628968$

$x_0 = 0.5$　のとき　$x_4 = 0.3678794127827226$，$x_5 = 0.3678794409628946$

【 枠内の証明の概略 】

$r = c\left(x_0 - \dfrac{1}{c}\right)$ とおく。r は定数で、$0 < r < 1$ である。

$$\left|x_{n+1} - \frac{1}{c}\right| \leqq r\left|x_n - \frac{1}{c}\right|$$

が数学的帰納法でわかり、この不等式から $\left|x_n - \dfrac{1}{c}\right| \leqq \dfrac{r^n}{c}$ が得られる。数列 $\{x_n\}$ は $\dfrac{1}{c}$ に収束することがわかる。

【 Newton 法との関係 】

Newton 法

x_0 を適当に定めて、漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad \cdots\cdots (2)$$

により数列 $\{x_n\}$ を決定する。この数列の作り方を Newton 法と呼ぶ。

この Newton 法で作った数列は x_0 を適当（適切）に選ぶと、方程式 $F(x)=0$ の解に収束する（どんな $F(x)$ でもそうなるというわけではないが)。

今回話題にした (1) は、$\dfrac{1}{c}$ が解となる $F(x)=\dfrac{1}{x}-c$ を考え (2) を作ったものです。

大学入試で時々見かける漸化式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

で決まる数列は $\sqrt{2}$ に収束します。これは $F(x)=x^2-2$ として Newton 法で作った漸化式になっています。

一般に、$c>0$ として $F(x)=x^2-c$ を考え Newton 法で漸化式を作ると、

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$$

です。これは $\sqrt{c}$ に収束します。

どのような $F(x)$、どのような x_0、であればよいか、ヘンリッチの本に書かれている定理を紹介しておきます (証明省略)。

【 定理 】

関数 $F(x)$ が有限閉区間 $[a,b]$ 上で定義されていて、2 階連続微分可能であるとし、次の条件が満たされているとする：

(i) $F(a)F(b)<0$

(ii) $F'(x)\neq 0 \quad (x\in[a,b])$

(iii) すべての $x\in[a,b]$ に対して、$F''(x)\geqq 0$ か $F''(x)\leqq 0$

(iv) $F'(x)$ が小さい方の $[a,b]$ の端点を c とすると、$\left|\dfrac{F(c)}{F'(c)}\right|\leqq b-a$

このとき、Newton 法は、$[a,b]$ 内から任意に選ばれた x_0 に対して、$F(x)=0$ の（唯一の）解に収束する。