第 113 回数学教育実践研究会

教材は自分の中にある
＝アクティブ・ティーチング＝

レポート

令和 2 年 6 月 6 日 (土)
WEB 会議

数実研会員　安田富久一

《 必要は教材の母（『必要は発明の母』のパロディー） 》

大学での講義の教材作りをしていて、『このような図を描いてやりたい』んだけれど、持っているソフトには簡単に処理する機能があるのを知らない。

何とか処理して描きたい。そんな思いで不便だからこそ楽しめた（数学を使った）。それは高校生に与える教材になり得るかも知れないと思い、紹介します（Mathematica を持っていたら、ひょっとしたら紹介する教材は生まれなかったかも・・・）。

【 平成 **30** 年度高等学校新教育課程説明会（中央説明会）における文部科学省説明資料 】

中教審への諮問 (安田が説明のために抜粋)

育成すべき資質能力を踏まえた教育課程の構造化 (イメージ)
育成すべき資質能力を育む観点からの学習評価の充実

●何ができるようになるか　●何を学ぶか　●どのように学ぶか

どのように学ぶか

育成すべき資質能力を育むための
課題の発見解決に向けた主体的協働
的な学び（「アクティブ・ラーニング」）

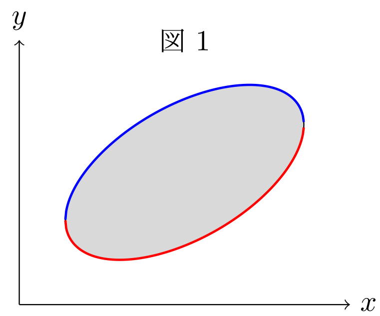
◆ある事柄を知っているのみならず、実社会や実生活の中で知識技能を活用しながら、自ら課題を発見し、主体的協働的に探究し、成果等を表現していけるよう、学びの質や深まりを重視。

【 安田のアクティブ・ラーニング 】

目的：やりたいこと ＆ 方策

x 軸に対して 30° 長軸が傾いている楕円で、その内部をグレーで塗りつぶし、楕円内が上下二つの曲線（上：青、下：赤）で囲まれている図を描きたい（右図 1）。

図 1



描きたい図

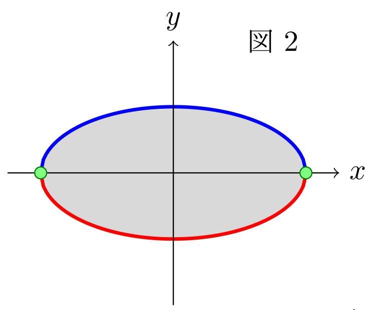
道具：描画ソフト

描画ソフト（LaTeX+Tikz）でできること

(i) 描画色を指定
(ii) 基本図形（点・線分・三角形・長方形・円・楕円）の部分線描画及び塗りつぶす
(iii) $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$ のグラフを描く
(iv) 上記描画可能な図形を平行移動や回転移動

右下図 2 を回転平行移動で目的達成 ？

図 2



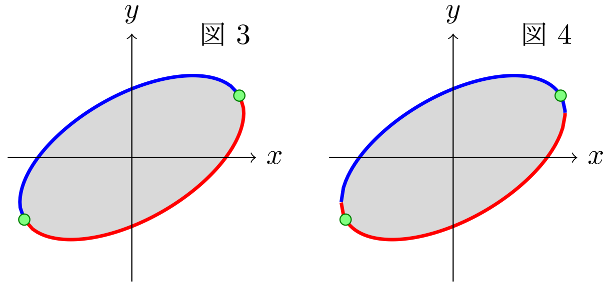
これを回転・平行移動すれば・・・

【 困難に遭遇（課題出現）】

x 軸を長軸に持つ楕円の上を青い曲線で描き、下を赤で描いて 30° 回転させたら出来ると思っていると、そうは問屋が卸さなかった。

右上の図 2 のように、長軸を与える楕円上の 2 点（赤い点）は回転後の楕円の左右端（青い点）とは異なる点になってしまう。

目的遂行のためには、描画ソフトで出来ることの (iii) が使えそう。青曲線と赤曲線が出会っている点の x 座標を見付ければ、それを定義域にして描画すれば目的の画が描画できる。



回転したが　　描きたいのとは違う

課題の数学化

(i) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を原点の周りに 30° 回転させて得られる楕円の方程式を求める。

(ii) 上で得た方程式を満たす x の最大値及び最小値を求めよ。

課題の設問化

x, y は

$$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2=16$$

を満たす実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(i) y を x を用いて表せ。 ………………（領域の上・下の曲線を与える $f(x)$ が知りたい）

(ii) x の最大値と最小値を求めよ。 ………………………………（$f(x)$ の定義域が知りたい）

課題の難化

x, y は

$$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-42x+18\sqrt{3}y+47=0 \tag{1}$$

を満たす実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(i) y を x を用いて表せ。

(ii) x の最大値と最小値を求めよ。

＜難化課題の解答例＞

(i) (**??**) を y について整理し、y の 2 次方程式として解くと、

$$13y^2-6\sqrt{3}(x-3)y+7x^2-42x+47=0$$

$$y=\frac{3\sqrt{3}x-9\pm\sqrt{27(x-3)^2-13(7x^2-42x+47)}}{13}$$

$$\therefore\quad y=\frac{3\sqrt{3}x-9\pm4\sqrt{-4x^2+24x-23}}{13} \tag{2}$$

(ii)　x, y は (**??**) を満たす実数なので、(**??**) の x に実数を代入したときに、y が実数として得られる x が、x のとり得る値である。(**??**) より、それは根号内が 0 以上になることと同値。

$$-4x^2+24x-23 \geqq 0 \quad , \quad 4x^2-24x+23 \leqq 0$$
$$\therefore \frac{6-\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \frac{6+\sqrt{13}}{2}$$

よって、求める x の最大値は $\dfrac{6+\sqrt{13}}{2}$、最小値は $\dfrac{6-\sqrt{13}}{2}$。

(ii)（別解）

（i）の答 (**??**) で得た楕円の 2 式は、$y=\dfrac{3\sqrt{3}x-9+4\sqrt{-4x^2+24x-23}}{13}$ が楕円の上側、$y=\dfrac{3\sqrt{3}x-9-4\sqrt{-4x^2+24x-23}}{13}$ が楕円の下側なので、この 2 曲線の共有点が楕円の両側になる。

つまり、共有点の x 座標が求める最大値及び最小値となる。2 曲線の方程式から y を消去すると、

$$\frac{3\sqrt{3}x-9+4\sqrt{-4x^2+24x-23}}{13}=\frac{3\sqrt{3}x-9-4\sqrt{-4x^2+24x-23}}{13}$$
$$\sqrt{-4x^2+24x-23}=0 \quad \text{つまり} \quad -4x^2+24x-23=0$$
$$\therefore x=\frac{6\pm\sqrt{13}}{2}$$

よって、求める x の最大値は $\dfrac{6+\sqrt{13}}{2}$、最小値は $\dfrac{6-\sqrt{13}}{2}$。

《 大学の内容も高校に 》

ちょっと変えれば学習指導要領外の問題が要領内の問題に変わる。

広義積分

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt[n]{x^m}}\,dx \quad (m, n : \text{自然数})$$

が収束するための m, n の条件を求め、そのときの定積分の値を求めよ。

これはあっという間に次の高校生対応可能問題（学習指導要領内かどうかは不問）に変わる

極限値問題

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\int_h^1 \frac{\log x}{\sqrt[n]{x^m}}\,dx$ （m, n : 自然数）　の極限値を求めよ。

但し、$a>0$ のとき $\displaystyle\lim_{h\to+0} h^a \log h = 0$ であることを利用しても良い

そして、これは $m \neq n$ のときを調べると

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{h \to +0} \int_h^1 x^{-\frac{m}{n}} \log x \, dx \\
&= \lim_{h \to +0} \left(\left[\frac{n}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} \log x \right]_h^1 - \int_h^1 \frac{n}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}-1} dx \right) \\
&= \lim_{h \to +0} \left\{ -\frac{n}{n-m} h^{\frac{n-m}{n}} \log h - \left[\left(\frac{n}{n-m} \right)^2 x^{\frac{n-m}{n}} \right]_h^1 \right\} \\
&= \lim_{h \to +0} \left\{ -\frac{n}{n-m} h^{\frac{n-m}{n}} \log h - \left(\frac{n}{n-m} \right)^2 + \left(\frac{n}{n-m} \right)^2 h^{\frac{n-m}{n}} \right\} \\
&= \lim_{h \to +0} \left\{ \frac{n}{n-m} h^{\frac{n-m}{n}} \left(\frac{n}{n-m} - \log h \right) - \left(\frac{n}{n-m} \right)^2 \right\}
\end{aligned}
$$

となる。このあと $n-m$ の符号により場合分けをして考えていくことになる。そこまで考えが及んでいながら、$-\dfrac{n}{n-m} < 0$ だと即断して間違いを犯す解答が出てくる。

マイナス記号は負の数であることを示す記号ではないことに注意を与える教材になる。

《 教材は自分の中にある 》

大学の講義資料作成で、今回感じたこと

自分 ＝ 私 ＆ 数学

- 数学それ自身の中にまだまだ教材が転がっている
- 教材にするかどうかは自分 (何を生徒に伝えたいかは人により違う）
- 高大接続大学での数学の学習内容にも高校で使える教材がある
- 不便も楽しい：工夫する楽しみ（便利すぎるソフトなら楽しめなかった）
- 皆でアクティブ・ティーチング楽しみましょう!!

最後に、今回描きたかった図が講義の何に関して出てきたかという背景をお話ししておきます。レポートの趣旨とは関係がないので、単なる付け足しです。

【 レポートの背景 】

今回の話題は、レポート発表するためにひねり出した問題ではない。

大学の講義で重積分を累次積分で計算する際に、今回レポートのような状況に出くわした。

下の 2 つの図（前ページ“課題の難化”の (**??**) の楕円を更に上方向に平行移動したもの）を学生に見せるために、実際に自分で課題を設定し処理し、うまく描画できた。このレポートは、その高校の範囲に関する部分である。

領域 K が上下を上：$y=\psi(x)$、下：$\varphi(x)$ で囲まれているとき（右図 3）は、

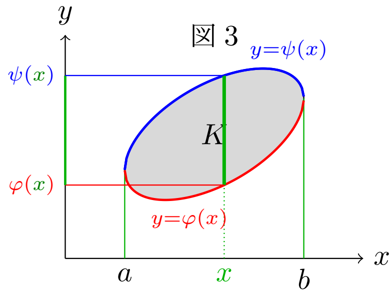
$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\,dy\,dx$$

であり、

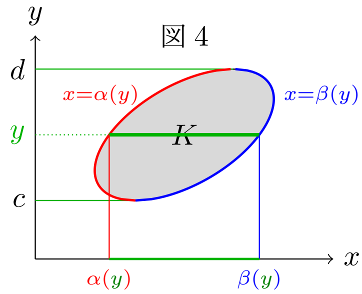
領域 K が左右を右：$x=\beta(y)$、左：$x=\alpha(y)$ で囲まれているとき（右図 4）は、

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\,dx\,dy$$

と計算できる。



K : $a\leqq x\leqq b\,,\,\varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x)$



K : $c\leqq y\leqq d\,,\,\varphi(y)\leqq x\leqq\psi(y)$