令和２年１月25日(土)

漸化式について

第112回数学教育実践研究会

数実研会員　安田富久一

＜漸化式冊子＞レポート発表の経緯

- 35年前、高校の数学教員をしていたときに作成
  その後、2年生に、手を加えながら冊子を渡していた

- 先日、漸化式の特性方程式について質問を受けた
  この冊子を渡した。

- 2年ほど前元教え子(約30年前の)が
  「“この冊子で漸化式のことがよくわかった”」
  という話しをしていたというのを耳にした

- いつか、数実研でこの冊子をレポートしようと思っていた。
  1ヶ月ほど前：次年度の最初にレポートする予定でいた
  先日学生に渡したのを機に、今回レポートをすることにした。

＜漸化式冊子＞工夫してみたこと

- 速戦用に“このようにすれば解ける”というのを先に示す
- あとで“何故それでうまくいくのか”という数学的な部分を示す
- 更に、何故そうしたくなるのかについて、私見を示す
- 『 $\boldsymbol{b_n = 5a_{n+1} - 1}$ とおく 』を、単なる記号の置き換えと思うのか
  $\boldsymbol{b_{n+1} = 5a_{n+1}}$ とする解答を多く見た
  $\boldsymbol{b_{n+1}(= 5a_{n+1} - 1 + 1) = 5a_{n+1}}$ としたことが推測される
- 間違いに気付かせるために、
  $\boldsymbol{\{a_n\}}$ を元に新たな数列を作り、
  その数列の名前を $\boldsymbol{\{b_n\}}$ とすることを強調する

  $$\boldsymbol{b_1 = 5a_1 - 1\,,\ b_2 = 5a_2 - 1\,,\ b_3 = 5a_3 - 1\ \cdots}$$

  という説明を加えた

＜漸化式冊子＞書き換え

- $PART\ 7$ を完全に書き換えた。
- これまでのは、三項間漸化式の一般項を行列利用で求める方法
- 今回は、最近気になっている：漸化式＝一般項を求める問題という図式が生徒の頭に執着している気がする
- 一般項を求めることが漸化式の最重要問題ではないということを示したかった。

＜一般項を求めたい ?＞　冊子17ページ

【 問題 】　漸化式 $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 1 \end{cases}$

で決まる a_n は次の等式が成り立つことを示せ。

奇数番目の項の n 項の和：

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$$

偶数番目の項の n 項の和：

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$$

であることを示せ。

＜解答：奇数番目＞　冊子18ページ

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1}} \\
= \; & \boldsymbol{a_4 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1}} \\
= \; & \boldsymbol{a_6 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1}} \\
= \; & \boldsymbol{a_8 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1}} \\
\vdots \; & \quad \boldsymbol{\cdots\cdots\cdots\cdots} \qquad \vdots \\
= \; & \boldsymbol{a_{2n-2} + a_{2n-1}} \\
= \; & \boldsymbol{a_{2n}}
\end{aligned}
$$

＜解答：奇数番目＞　冊子18ページ

$$
\begin{aligned}
& a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= {} & a_4 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= {} & a_6 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= {} & a_8 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
\vdots \quad & \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \vdots \\
= {} & a_{2n-2} + a_{2n-1} \\
= {} & a_{2n}
\end{aligned}
$$

＜解答：奇数番目＞　冊子18ページ

$$
\begin{aligned}
& a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= \; & a_4 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= \; & a_6 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= \; & a_8 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
\vdots \; & \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \vdots \\
= \; & a_{2n-2} + a_{2n-1} \\
= \; & a_{2n}
\end{aligned}
$$

＜解答：奇数番目＞　冊子18ページ

$$
\begin{aligned}
& a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= & \quad a_4 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= & \quad a_6 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= & \quad a_8 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
\vdots & \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \vdots \\
= & \quad a_{2n-2} + a_{2n-1} \\
= & \quad a_{2n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad & a_1 \quad + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= & \quad a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} \\
= & \ a_{2n}
\end{aligned}
$$

＜解答：偶数番目＞　冊子18ページ

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a_2 + a_4 + a_6 + \cdots\cdots\cdots\cdot + a_{2n}} \\
&= \boldsymbol{a_1 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots\cdots\cdots\cdot + a_{2n} - a_1} \\
&= \boldsymbol{a_{2n+1} - a_1} \\
&= \boldsymbol{a_{2n+1} - 1}
\end{aligned}
$$

＜解答：証明らしく＞　冊子18ページ

$a_0 = 0$ として a_0 を決めておくと、
漸化式は $n \geqq 0$ でも成り立っている。
任意の自然数 k について $a_{2k} - a_{2k-2} = a_{2k-1}$ が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_{2k} - a_{2k-2}) \\
&= a_{2n} - a_0 \\
&= a_{2n}
\end{aligned}
$$

偶数番目の和も同様