第 112 回数学教育実践研究会

漸化式について

レポート

令和 2 年 1 月 25 日 (土)
ニッセイ MK ビル

数実研会員　安田富久一

“漸化式”冊子レポート作成の経緯

35 年前、高校の数学教員をしていたときに作成した漸化式の冊子がある。その後、2 年生の数学を教えるときに、毎回手を加えながら冊子を渡してきた。

先日、非常勤講師をしている大学の学生から、漸化式の特性方程式について質問を受けた。そのとき、その学生にこの冊子を渡した。

2 年ほど前、同大学の学生で「“この冊子で漸化式のことがよくわかった”という話しを安田先生の元教え子の方が話していました」と教えてくれたことがあった。いつか、数実研でこの冊子をレポートしようと思っていた。

1 ヶ月ほど前には、今回の研究会ではなく、次年度の最初の研究会でレポートする予定でいたが、先日学生に渡したのを機に、記載ミスなどを訂正したり、削除や新しい項目を付け加えて冊子を新たに作って今回レポートをすることにした。

速戦用に“このようにすれば解ける”というのを先に示し、その後に“何故それでうまくいくのか”という数学的な部分を示し、更に、何故そうしたくなるのかについて、私見を示してあるところもある。

また、『 $b_n = a_n$ の式 とおく 』ということを、単なる記号の置き換えと思っているために、式変形できない生徒を 35 年前当時多く見かけた。例えば、$b_n = 5a_n - 1$ とおく、と言っておきながら、$b_{n+1} = 5a_{n+1}\ (= 5a_{n+1} - 1 + 1)$ と思っているのだろう、と推測される間違いを多く見た。その間違いに気付かせるために、記号を置き換えるのではなく、数列 $\{a_n\}$ を元にして、新たな数列を作り、その新たな数列の名前を $\{b_n\}$ としていることを強調するために、わざわざ $b_1 = 5a_1 - 1\,,\, b_2 = 5a_2 - 1\,,\, b_3 = 5a_3 - 1 \cdots$ として $\{b_n\}$ を作る、という説明にしてある。

完全に削除したのは、$PART\,7$ 付録 で、行列利用による三項間漸化式の一般項を求める方法についての話。その代わり新しい項目を付けた。それは、最近気にかかっていること：

漸化式＝一般項を求める

という図式が頭に出来上がってしまっている学生が多いこと。そこで、一般項を求めることが漸化式の最重要問題ではない、ということを書いておきたかった。

漸化式

数実研会員 安田富久一

目次

1　*PART 1*【基本形】

等差数列と等比数列が漸化式ではどのように表されるかをまず見ておく。それがいろいろな漸化式を解くときのキーポイントになる（実際にそれが *PART 2* 以降で役に立つ）。

等差数列は常に一定の数を加えていってできる数列だから、その公差を d とすると

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \cdots\cdots (1)$$

となる。また、明らかに (1) をみたす数列は公差 d の等差数列である。

次に、等比数列は一定の数をかけていってできる数列だから、その公比を r とすると

$$a_{n+1} = ra_n \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。また、明らかに (2) をみたす数列は公比 r の等比数列である。（もし、$r = 1$ なら、$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots$ で、どの項も同じ数である数列になり、面白くない。そのため、$r \neq 1$ の場合を扱う）。

(1) , (2) は、それぞれ公差がわかっている等差数列、公比がわかっている等比数列なので、どちらも初項がいくらかわかると一般項がわかることになる。以上のことは次のようにまとめられる。

【基本形】

【1】　漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ \quad a_1 = p \end{cases}$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ は初項 p 公差 d の等差数列で、一般項は

$$a_n = p + d\,(n-1)$$

【2】　漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = r\,a_n \\ \quad a_1 = p \end{cases}$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ は初項 p 公比 r の等比数列で、一般項は

$$a_n = p\,r^{\,n-1}$$

2　*PART 2*【二項間の漸化式】

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + q \\ a_1 = p \end{cases} \quad \cdots\cdots (3)$$

のタイプの漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ の一般項をどのように求めればよいか。それをこの *PART 2* で見ていく。このタイプの漸化式を二項間の漸化式と呼んでいる。

この節の構成は二部構成で、**2.1　二項間のタイプの解法**はいわゆる解法マニュアルです。**2.2 解答前に解く方程式の意味**は、最初面倒に思うかも知れませんが、数学の大切な部分を伝えるために書いたつもりです。漸化式だけでなく、数学での式の処理についての考え方、方針、アプローチの仕方などの感覚がつかめ、数学的な眼のレベルアップになると思います。

2.1 二項間のタイプの解法

次の簡単な例から始める。

〈例 **1**〉

$$\begin{cases} a_{n+1}-1=3(a_n-1) \\ a_1=6 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

をみたす数列の一般項を求めてみよう。

数列の各項 a_n から 1 を引いて新しい数列を作る。つまり、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1-1 \\ b_2 &= a_2-1 \\ b_3 &= a_3-1 \\ &\vdots \\ b_n &= a_n-1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように数列 $\{b_n\}$ を決める。これを今後『$b_n=a_n-1$ とおく』と簡単に言うことにする。さて、このとき (4) は

$$b_{n+1}=3b_n$$

となり、*PART 1* の基本形の 2 のタイプになる。b_1 については

$$b_1=a_1-1=5$$

だから、

$$\begin{cases} b_{n+1}=3b_n \\ b_1=5 \end{cases}$$

つまり、$\{b_n\}$ は初項 5 公比 3 の等比数列なので

$$b_n=5\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n=5\cdot 3^{n-1}+1$$

ところで、〈例 **1**〉は、普通次のような式になっている。

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n-2 \\ a_1=6 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(4) を展開して整理すると上と同じ問題だということがわかる。(5) を解くには、両辺から 1 を引いて

$$\begin{aligned} a_{n+1}-1 &= 3a_n-3 \\ &= 3(a_n-1) \end{aligned}$$

と (4) の形にする。

話せば簡単だが、じゃあ、この両辺から引く数“1”をどうやって見つければよいのか？

それには簡単な見つけ方があるので紹介する。

(5) 式で a_{n+1}, a_n を無理やり x に変えた方程式

$$x=3x-2$$

を作る。この方程式の解が $x=1$ で、これが上で述べた (5) 式の両辺から引く数になっている。

では、もう一つ漸化式の例をあげて、これから皆が二項間の漸化式をどのようにして解けばよいかを示す。それをマスターすればこのタイプの漸化式なら何でも解けることになる。

〈例 **2**〉

次の漸化式を解け。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (6)$$

【解答前にすること】

(6) の a_{n+1}, a_n を x に変えた方程式

$$x = 4x - 1$$

を解いて、$x = \dfrac{1}{3}$。この $\dfrac{1}{3}$ で (6) の両辺を引くと

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = 4\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

ここまで準備をしておいて、実際に示す解答は次のように書く。

【解答】

(6) は

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = 4\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できる。ここで $b_n = a_n - \dfrac{1}{3}$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1} = 4b_n \\ b_1 = a_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

となる。

$$\therefore\ b_n = \frac{8}{3} \times 4^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = b_n + \frac{1}{3} = \frac{8 \times 4^{n-1} + 1}{3} \quad （答）$$

〈例 **2** 解答終わり〉

【練習問題】

次の漸化式を解け。

1. $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$ （答）$a_n = 2^n + 3$

2. $\begin{cases} a_{n+1} = -4a_n + 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ （答）$a_n = \dfrac{3}{5}(-4)^{n-1} + \dfrac{2}{5}$

3. $\begin{cases} 2a_{n+1} = a_n + 4 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ （答）$a_n = 4 - \dfrac{3}{2^{n-1}}$

2.2 解答前に解く方程式の意味

解答前に解く方程式の意味を探るために、例 1、例 2 を復習する。

例 1 は置き換えると等比数列になって解けた。例 2 はそのままでは例 1 のような置き換えは出来ないが、変形して例 1 と同じことが出来た。

つまり、“置き換えると等比数列になるように変形したい”というのがポイントになる。一般論の前に、先ずは例 2 を用いて『両辺から引く数をどのように見つけるのか』ということを考えてみよう。そのことから、『なぜあのような方程式を考えれば良いか』がわかるようになる。

置き換えて等比数列になるような変形が出来たとすると、

『それは $a_{n+1} - x = 4(a_n - x)$ という形になるのでは』

と期待される（数学ではこの“期待する”というのが非常に大切なことです。様々な問題を解くときのポイントだったりする）。この期待の式を展開して移項すると

$$a_{n+1} = 4a_n - 3x$$

となる。これを (6) と比較してみると

$$3x = 1$$

となる x が見つかればよいということになる。これを解くと $x = \dfrac{1}{3}$ であり、これは (6) の両辺から引いた数である。

これで両辺から引く数をどうやって見つければよいかがわかった。しかし、これで満足していては数学ではない。何が不満なのかというと、“問題に出会うたびに、毎回、今やったようなことをしないとだめなのか？ 漸化式を見ただけですぐに方程式が作れないのか”と欲張りたい。そこで、一般的に (3) について考えてみよう。

$r = 1$ なら *PART 1* の場合、つまり等差数列となり、変形しないで簡単に求められるので、$r \neq 1$ として考える。

目標は

$$a_{n+1} - x = r(a_n - x)$$

である。これを展開して変形すると

$$a_{n+1} = ra_n - rx + x$$

となり、これを (3) と比較して

$$-rx + x = q$$

である（ここで、$-rx + x = q$ を計算して $(1-r)x$ としていないところにも注目しておいて欲しい。“必要が起こるまで計算しない”方がよいことがある。数学のコツの一つだ）。今得た式をじっくり見ていると、$-rx$ を移項してみようという気になってくる。移項すると、

$$x = rx + q$$

であり、これはちょうど (3) で a_{n+1}, a_n のところを x に変えた方程式になっている。これが a_{n+1}, a_n を無理矢理 x に変えてうまくいく理由である。

《余談》

以上で *PART 2* の本題は終了した。

せっかく一般の場合の (3) を考えたのだから、(3) を解いてみておこう。但し、今のところ特に重要でもないので、興味がなければここから *PART 3* まで読み跳ばすとよい。

上で得た方程式を解くと、$r \neq 1$ であったから $x = \dfrac{q}{1-r}$ である。

$$\therefore\ a_{n+1} - \frac{q}{1-r} = r\left(a_n - \frac{q}{1-r}\right)$$

ここで、$b_n = a_n - \dfrac{q}{1-r}$ とおくと、

$$\begin{cases} b_{n+1} = rb_n \\ b_1 = a_1 - \dfrac{q}{1-r} = p - \dfrac{q}{1-r} \end{cases}$$

$$\therefore\ b_n = \left(p - \frac{q}{1-r}\right) r^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = \left(p - \frac{q}{1-r}\right) r^{n-1} + \frac{q}{1-r}$$

これで一般の場合の公式が得られた。

一応公式ではあるが、覚える必要はない。というのは、例 2 のように方程式の作り方さえ覚えておけば簡単に解けるから。

3　*PART 3*【三項間の漸化式】

$$\begin{cases} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \\ a_1 = r\ ,\ a_2 = s \end{cases} \quad \cdots\cdots (7)$$

の一般的な解き方を考える。*PART 3* でも、*PART 2* のときのように、**3.2** で解き方のマニュアルを紹介し、**3.3** でそのマニュアルがどのようにして作られたかを紹介するという構成にした。

PART 2 のときと同様に方程式を作って方程式の解を求めるのだが、その方程式の作り方が *PART 2* のときと違っているところが注意点だ。

3.1　三項間のタイプの解法

《方程式の作り方とその利用法》

(7) をもとに次のよう方程式を作る：漸化式の中で番号が大きな項から順にと置き換える。具体的に (7) について言うと、a_{n+2} を x^2 に、a_{n+1} を x に、a_n を 1 に置き換えて 2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

を作る。この 2 次方程式の解を α, β とすると、(7) は必ず

$$a_{n+2} - \alpha\ a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha\ a_n) \quad \cdots\cdots (9)$$

と変形できるのである（理由等は **3.2** で見ていくが、自分で上の式を展開移項して考えてみるのもいい経験かもしれない)。ここで、$b_n = a_{n+1} - \alpha\ a_n$ とおくと、

$$b_{n+1} = \beta\ b_n$$

となり、公比 β の等比数列となる。

《実例》

先ず典型的な例でその解き方を紹介する。

【例 **3**】次の漸化式を解け。

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 3 \end{cases} \quad \cdots\cdots (10)$$

【解答前にすること】

(10) の a_{n+2}, a_{n+1}, a_n をそれぞれ $x^2, x, 1$ に変えた方程式

$$x^2+2x-3=0$$

を解いて $x=1,-3$ を得る。$\alpha=1, \beta=-3$ と $\alpha=-3, \beta=1$ の 2 つの場合が考えられる。このことから、(10) は、(9) を使って

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-3(a_{n+1}-a_n)$$
$$a_{n+2}+3a_{n+1}=a_{n+1}+3a_n$$

と変形できる（実際この 2 つの式を展開して移項してみると、どちらも (10) の式に一致していることがすぐわかる）。

【解答】

(10) は次のように 2 つの式に変形できる。

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-3(a_{n+1}-a_n)$$
$$a_{n+2}+3a_{n+1}=a_{n+1}+3a_n$$

ここで $b_n=a_{n+1}-a_n$ 及び $c_n=a_{n+1}+3a_n$ とおくと、上の 2 つの式はそれぞれ

$$b_{n+1}=-3b_n \ , \ c_{n+1}=c_n$$

となる。また、

$$b_1=a_2-a_1=2 \ , \ c_1=a_2+3a_1=6$$

なので、

$$\begin{cases} b_{n+1}=-3b_n \\ b_1=2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c_{n+1}=c_n \\ c_1=6 \end{cases}$$

であるが、これらを解いて

$$b_n=2\times(-3)^{n-1} \ , \ c_n=6$$

となる。よって、次の 2 つの式を得る。

$$a_{n+1}-a_n=2\times(-3)^{n-1} \quad \cdots\cdots (11)$$
$$a_{n+1}+3a_n=6 \quad \cdots\cdots (12)$$

$(12)-(11)$ より、

$$4a_n=6-2\times(-3)^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=\frac{3-(-3)^{n-1}}{2}$$

〈例 **3** 解答終わり〉

（注）

$b_n=a_{n+1}-a_n$ は、数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であることを示している。それで、階差数列に関するよく知られた事実から、$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \times (-3)^{k-1} \\
&= 1 + \frac{2\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)} \\
&= \frac{3-(-3)^{n-1}}{2}
\end{aligned}
$$

であり、これは $n=1$ のときも成り立ち、a_n が求められた。

但し、この階差数列の方法が使えるのは 2 次方程式が $x=1$ を解に持つときで、一般的には最初に示した方法で解くとよいし、また、たとえ $x=1$ を解に持つときでも、最初の方法で解く方が楽である。 〈注終わり〉

これで (7) のタイプの漸化式が何でも解けるかというとそうはいかない。先ほどの方法は、2 次方程式が異なる 2 つの解を持ってくれたおかげで、(9) の式を 2 つ作ることができ、その 2 つの式から得られる式（例 3 の (11) (12) ）を引いて、a_n が求められた。

しかし、2 次方程式はいつも異なる 2 つの解を持つとは限らない。重解のときはどうすればよいのか？ に興味が湧く。具体的にそのような例を作って考えてみよう。

〈例 **4**〉

次の漸化式を解け。

$$
\begin{cases} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 5 \end{cases} \quad \cdots\cdots (13)
$$

《解説》

2 次方程式を作って解くと、重解 $x=2$ が得られるから、$\alpha=\beta=2$ として

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

という 1 つの式が (13) を変形して得られる。

ここで、$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくと、

$$
\begin{cases} b_{n+1} = 2b_n \\ b_1 = a_2 - 2a_1 = 3 \end{cases}
$$

$$\therefore \quad b_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n - 2a_n = 3 \times 2^{n-1} \quad \cdots\cdots (14)$$

この式の両辺を 2^{n-1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n-1}} - \frac{a_n}{2^{n-2}} = 3$$

となり、$c_n = \dfrac{a_n}{2^{n-2}}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&c_{n+1} - c_n = 3 \\
&c_1 = \frac{a_1}{2^{-1}} = 2
\end{aligned}
$$

で、これは $\{c_n\}$ が等差数列（*PART 1* の【**基本型**】**1**）であることを示している。

$$\therefore\ c_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1$$

$$\therefore\ a_n = 2^{n-2}c_n = (3n-1) \times 2^{n-2} \quad \text{（答）}$$

重解の場合の方法の特徴的なところは、上のようにして $\{c_n\}$ を作ると必ず $\{c_n\}$ が等差数列になるところにある。そのため簡単に答が得られることになる。 〈解説終わり〉

このタイプにはもう一つ別の解法がある。それを紹介しておく。

〔別解〕

(14) 式までは同じ。(14) より、

$$\begin{array}{rcccccl}
a_n - 2a_{n-1} & & & & & = & 3 \times 2^{n-2} \\
2a_{n-1} - 2^2 a_{n-2} & = & 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) & = & 2 \times 3 \times 2^{n-3} & = & 3 \times 2^{n-2} \\
2^2 a_{n-2} - 2^3 a_{n-3} & = & 2^2(a_{n-2} - 2a_{n-3}) & = & 2^2 \times 3 \times 2^{n-4} & = & 3 \times 2^{n-2} \\
\vdots & = & \vdots & = & \vdots & = & \vdots \\
2^{n-2} a_2 - 2^{n-1} a_1 & = & 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) & = & 2^{n-2} \times 3 \times 1 & = & 3 \times 2^{n-2}
\end{array}$$

これらの式の最左辺と最右辺をすべて加えると

$$a_n - 2^{n-1} a_1 = (n-1) \times 3 \times 2^{n-2}$$

$$\therefore\ a_n = (3n-1)2^{n-2} \quad （答）$$

〈例 4 の別解終わり〉

【練習問題】

次の漸化式を解け。

1. $\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \\ a_1 = 3\ ,\ a_2 = -2 \end{cases}$ （答） $a_n = 11 \times 2^{n-1} - 8 \times 3^{n-1}$

2. $\begin{cases} a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0 \\ a_1 = -1\ ,\ a_2 = 3 \end{cases}$

（答） $a_n = \dfrac{-13+5\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \right)^{n-1} - \dfrac{13+5\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \right)^{n-1}$

3. $\begin{cases} a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \\ a_1 = -2\ ,\ a_2 = 1 \end{cases}$ （答） $a_n = (-5n+11) \cdot (-3)^{n-2}$

3.2 解答前に解く方程式の意味

二項間の場合に、ある種の式を期待したように『うまく $\{b_n\}$ を作って、$\{b_n\}$ の漸化式が、$b_{n+1} = \beta b_n$ という形に書換えられたら、等比数列になってうまく処理できるなあ』と期待感を持つことができれば、半分は解けたことになる。

(7) 式を左辺と右辺に（左辺が右辺より 1 つ番号が増えているように、つまり番号が 1 つずれるように）分けるにはどうしたらよいのか？

項が 3 つあるのにどうやって平等に二つにするか、バランス感覚が要求される。(7) 式を番号が 1 つずれた形の式にするには、真ん中の項：第 $(n+1)$ 項 a_{n+1} を左辺にも右辺にもダブらせよう。

それが、5 ページの (9) 式

$$a_{n+2} - \alpha\ a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha\ a_n)$$

という訳である。この式になるような α, β があってくれると嬉しい、という期待である。

次に問題となるのは、期待するのはいいが、本当にその期待が実現するのか? ということ。つまり、(9) 式について

- α, β の値はあるのか？
- あるならそれをどのようやって見つけるのか？

を考えないといけない。

(9) 式を展開し移項整理すると

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

となる。これと (7) 式を比較して

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-p \\ \alpha\beta=q \end{cases}$$

が得られる。解と係数の関係から、この α, β は 2 次方程式

$$x^2+px+q=0$$

の二つの解である。これが 5 ページで方程式 (8) を解けばよい、と言った理由である。

4 $PART\ 4$【1 次分数型の漸化式】

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s} \\ a_1=t \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

のタイプの漸化式の一般的な解き方を見ていく。今まで同様、先ず具体例を見る。

4.1 1 次分数型のタイプの解法

【例 5】

次の漸化式を解け

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{2a_n+2}{a_n+3} \\ a_1=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

【解答前にすること】

(16) で a_{n+1}, a_n のどちらも x に置き換えてできる方程式

$$x=\frac{2x+2}{x+3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

を解いて、$x=1,-2$ を得る。

ここで得られた解 $x=1,-2$ のどちらでも良いから好きな方を選んで (16) の両辺をひく。その後ちょっとした変形をすると 、今までのように等比数列となる $\{b_n\}$ をつくることができ、それから $\{a_n\}$ を求めることができる。

次に示す解答では、2 つある解のうち $x=1$ の方を選んで解いた。

《解答》

(16) の両辺から $x=1$ を引くと

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{a_n+3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

ところで、この式から $a_n-1\neq 0$ ならば $a_{n+1}-1\neq 0$ であり、また、$a_1-1\neq 0$ なので、数学的帰納法から全ての自然数について $a_n-1\neq 0$ であることがわかる。

よって、(18) において両辺の逆数をとることができ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}-1}&=\frac{a_n+3}{a_n-1} \\ &=\frac{4}{a_n-1}+1 \end{aligned}$$

である。ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$ とおくと、

$$\begin{cases} b_{n+1} = 4b_n \\ b_1 = \dfrac{1}{a_1 - 1} = -1 \end{cases}$$

である。よって、ＰＡＲＴ２のタイプなので解くことができて

$$b_n = -\frac{2 \times 4^{n-1} + 1}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_n - 1} = -\frac{2 \times 4^{n-1} + 1}{3}$$

$$\therefore \quad a_n = 1 - \frac{3}{2 \times 4^{n-1} + 1} = \frac{2 \times 4^{n-1} - 2}{2 \times 4^{n-1} + 1}$$

〈例 **5** 終わり〉

ところで、せっかく方程式の解を 2 つ見つけたのに一つしか使わなかったのはもったいない気がする。解が 2 つあった 3 項間の漸化式ＰＡＲＴ３では、式を 2 つ作って簡単に解いた経験がある。今回もそうできないだろうか。

そうできないだろうか？　　と思ったらやってみよう。思うだけで何もしないのは何も産み出さない。解法の細かい部分（例えば分母が 0 になる心配等）は省略して、解答の流れを示そう。

〈例 **5** の別解〉

(15) の両辺から $1, -2$ をそれぞれ引くと

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$$

$$a_{n+1} + 2 = \frac{4(a_n + 2)}{a_n + 3}$$

が得られる。下の式を上の式で辺々割ると、

$$\frac{a_{n+1} + 2}{a_{n+1} - 1} = \frac{4(a_n + 2)}{a_n - 1}$$

となる。ここで、$b_n = \dfrac{a_n + 2}{a_n - 1}$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1} = 4b_n \\ b_1 = \dfrac{a_1 + 2}{a_1 - 1} = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad b_n = -2 \times 4^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{a_n + 2}{a_n - 1} = -2 \times 4^{n-1}$$

この分母を払って a_n を求めると

$$a_n = \frac{2 \times 4^{n-1} - 2}{2 \times 4^{n-1} + 1} \quad \text{（答）}$$

〈例 **5** の別解終わり〉

例 5 の解答の中で“すべての n について $a_n - 1 \neq 0$”ということから逆数を考えることが出来た。しかし例 5 が、もし $a_1 = 1$ だったとすると、逆数が作れない。そのようなときはどうする？

このようなときでも簡単に解けることが実際にやってみればわかる。

【例 **6**】（例 5 の $a_1 = 0$ を $a_1 = 1$ に変えたもの）

次の漸化式を解け

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

《解答》

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$$

である。よって、$a_n = 1$ ならば $a_{n+1} = 1$ となる。しかも、$a_1 = 1$ なので数学的帰納法より、全ての自然数 n について $a_n = 1$ である。よって、

$a_n = 1$ （答）

〈例 **6** 終わり〉

4.2 解答前に解く方程式の意味

解答する前に解く方程式がどのようにして導かれたかを考えよう。例 5 を使って見てみよう。

(16) の両辺から x を引くと

$$\begin{aligned} a_{n+1} - x &= \frac{2a_n + 2}{a_n + 3} - x \\ &= \frac{(2-x)a_n + 2 - 3x}{a_n + 3} \end{aligned}$$

両辺の逆数をとって変形していってみる（これは面倒だがガマン）。

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1} - x} &= \frac{a_n + 3}{(2-x)a_n + 2 - 3x} \\ &= \frac{1}{2-x} \cdot \frac{a_n + 3}{a_n + \dfrac{2-3x}{2-x}} \\ &= \frac{1}{2-x} \cdot \left(1 + \frac{3 - \dfrac{2-3x}{2-x}}{a_n + \dfrac{2-3x}{2-x}} \right) \\ &= \frac{1}{2-x} + \frac{3 - \dfrac{2-3x}{2-x}}{2-x} \cdot \frac{1}{a_n + \dfrac{2-3x}{2-x}} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{2-x} = A \quad , \quad \frac{3 - \dfrac{2-3x}{2-x}}{2-x} = B \quad , \quad \frac{2-3x}{2-x} = C$$

とおくと

$$\frac{1}{a_{n+1} - x} = A + \frac{B}{a_n + C}$$

となるから、$C = -x$ つまり

$$\frac{2-3x}{2-x} = -x$$

ならば

$$\frac{1}{a_{n+1} - x} = A + \frac{B}{a_n - x}$$

となるので、$\dfrac{1}{a_n - x} = b_n$ とおくと

$$b_{n+1} = B + Ab_n$$

となる。これは $PART\,2$ のタイプなので解けることになる。

そこで、方程式

$$\frac{2-3x}{2-x}=-x$$

を解けばよいことになるのだが、でも、よく見ると 9 ページの『解答前にやること』で解こうとした方程式

$$x=\frac{2x+2}{x+3}$$

とは違う。

そのためにもう少し話を続けよう。『解答前にやること』の方程式の作り方を説明するには具体的な例では逆にわかりづらい（方針等は同じだが、一般的に見て行った方がよくわかる。数学では時として具体例よりも一般的に見た方が見通しの良いことがある）。

(15) を今と同じ方法で変形していく。

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-x&=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-x\\
&=\frac{(p-rx)a_n+q-sx}{ra_n+s}\\
\therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}-x}&=\frac{ra_n+s}{(p-rx)a_n+q-sx}\\
&=\frac{r\left(a_n+\dfrac{s}{r}\right)}{(p-rx)\left(a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)}\\
&=\frac{r}{p-rx}\left(1+\frac{\dfrac{s}{r}-\dfrac{q-sx}{p-rx}}{a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}}\right)
\end{aligned}$$

先ほど見た具体例での C に相当するのが今の場合 $\dfrac{q-sx}{p-rx}$ であり、解答の前に考える方程式は

$$\frac{q-sx}{p-rx}=-x$$

である。この分母を払って整理すると

$$rx^2+(s-p)x-q=0$$

となる。

ここでちょっと遊んでみよう。(15) の分母にある係数 r,s と分子にある係数 p,q とを、今得られた 2 次方程式で左辺と右辺に分離してみよう。

$$rx^2+sx=px+q$$

となる。これをよく見て、式 (15) をよく見ていると、$rx+s$ で両辺を割りたくなる。割ってみると

$$x=\frac{px+q}{rx+s}$$

であり、これは (15) で a_{n+1},a_n を x で置き換えたものになっている。

5　*PART 5*【応用へのアプローチ】

今までに出会ったことのない問題にでくわしたときの考え方の参考として、実際の例を通して私はどんなことを考えるのかを書いてみたいと思います。私以外の人は、また別の考えをするかも知れません。あくまでアプローチの仕方の一つということで参考にし欲しい。

〈例 7〉

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+n^2-n\\ a_1=1\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (19)$$

先ず、$PART\,2$ に似ているのでそこでの方法を真似てみる。つまり、a_{n+1}, a_n を x に置き換えた方程式を解いてみよう。

$$\begin{aligned} & x = 3x + n^2 - n \\ \therefore \quad & x = -\frac{n^2-n}{2} \end{aligned}$$

今得た解で (19) の両辺を引いて整理すると

$$a_{n+1} + \frac{n^2-n}{2} = 3\left(a_n + \frac{n^2-n}{2}\right) \quad \cdots\cdots (20)$$

となる。ここで、$b_n = a_n + \dfrac{n^2-n}{2}$ とおいてうまくいっているように見える．しかし、このようにおくと、

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = a_{n+1} + \frac{n^2+n}{2}$$

となり、(20) の左辺と一致しない。失敗!!

ここであきらめるか？　もう少し考えるか？　当然もう少し考えてみる。しかし、何を考えるのか？　自分が今やったことの反省をしてみる。

今、$PART\,2$ の真似をしたのだった。いったい何を真似たのか。解き方の形式的な部分だけを真似たのであり、決してその本質的な部分を真似たわけではなかった。本質的な部分というのは“置き換えて等比数列になるようにしたい *!!* ”という部分だ。今の例で言い換えると、左辺が b_{n+1} になるようにしたいということだ。

この本質的な部分を真似たい *!!*

そこで、$PART\,2$ のやり方と今の問題とをドッキングさせて、(19) が

$$a_{n+1} - f(n+1) = 3\{a_n - f(n)\} \quad \cdots\cdots (21)$$

という形の式にならないだろうか、と期待してみよう。このように変形できる式が見つかれば、$b_n = a_n - f(n)$ とおくと

$$b_{n+1} = 3b_n$$

となって、等比数列で解けることになる。

さて、そうすると今、課題は (21) となるような式 $f(n)$ がうまく見つかるのかということだ。課題がはっきりしたから、探してみよう。(21) を展開し移項すると

$$a_{n+1} = 3a_n + f(n+1) - 3f(n)$$

となり、これと (19) を比較して

$$f(n+1) - 3f(n) = n^2 - n \quad \cdots\cdots (22)$$

となるものが見つかればよい。このようなものがいくつあるか知らないが、1 つでも見つかればいいから、右辺が整式ということを意識して、$f(n)$ も整式として見つかるのではないかと期待したい。また、あったとすれば 2 次式以上のはずだ（1 次式なら、左辺は 1 次以下の式で、2 次式である右辺とイコールにはならないはず）。そこでダメモト、2 次式だと思って（これでダメなら 3 次式だと思って、それでダメなら 4 次式・・・をやってみればよい）。

$$f(n) = pn^2 + qn + r$$

とおいて調べてみよう。

$$\begin{aligned} f(n+1) - 3f(n) &= p(n+1)^2 + q(n+1) + r - 3(pn^2 + qn + r) \\ &= -2pn^2 + 2(p-q)n + p + q - 2r \quad \cdots\cdots (23) \end{aligned}$$

(22) と (23) を比較して

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2p &=& 1 \\ 2(p-q) &=& -1 \\ p+q-2r &=& 0 \end{array} \right.$$

この連立方程式を解いて $f(n)$ を求めると

$$f(n)=-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{4}$$

であり、目的は達成された。

以上のことから、次のように解答が書ける。

〈解答〉

$$f(n)=-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{4}$$

とおく。このとき (19) の両辺を $f(n+1)$ で引くと

$$\begin{aligned}a_{n+1}-f(n+1)&=3a_n+n^2-n-f(n+1)\\&=3a_n+n^2-n+\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{4}\\&=3a_n+\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}\\&=3\left\{a_n-f(n)\right\}\end{aligned}$$

よって、$b_n=a_n-f(n)$ とおくと

$$\begin{cases}b_{n+1}=3b_n\\ b_1=a_1-f(1)=\dfrac{7}{4}\end{cases}$$

$$\therefore\quad b_n=\frac{7}{4}\times 3^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=b_n+f(n)=\frac{7}{4}\times 3^{n-1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{4}$$ （答）

〈例 7 の解答終わり〉

6　*PART 6*【漸化式いろいろ】

今までのタイプに当てはまらないもの、また、当てはまるが別の解法があるものなどを紹介する。*PART* 5 までのことが数学的に身についていれば簡単に理解できるはずだ。

例を見ていくが、解答・解説において、*PART* 5 までに出てきたタイプの漸化式については、途中経過を省略してすぐに一般項を示すことにする。

〈例 **8**〉

次の漸化式を解け。

$$\begin{cases}a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=4\\ a_1=2\ ,\ a_2=1\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (24)$$

〈解説〉

(24) の右辺が 0 ならば、全く三項間の漸化式：ＰＡＲＴ３で扱った問題になる。そこで、(24) の右辺を左辺へ移項して次のように変形できればうまく処理できそうだ（やはり、期待する *!!* ）。

$$(a_{n+2}-x)+(a_{n+1}-x)-6(a_n-x)=0$$

となる x が見つかればいいことになる。これを展開移項して

$$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=-4x$$

なので

$$-4x=4\quad\therefore\quad x=-1$$

《解答》

(24) は

$$(a_{n+2}+1)+(a_{n+1}+1)-6(a_n+1)=0$$

と変形できる。ここで、$b_n=a_n+1$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+2}+b_{n+1}-6b_n=0 \\ b_1=3\ ,\ b_2=2 \end{cases}$$

$$\therefore\quad b_n=\frac{11\times 2^{n-1}+4\times(-3)^{n-1}}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_n&=b_n-1\\ &=\frac{11\times 2^{n-1}+4\times(-3)^{n-1}-5}{5}\quad（答）\end{aligned}$$

〈例 8 の解答終わり〉

〈例 **9**〉

次の漸化式を解け。

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-2n+10 \\ a_1=-14 \end{cases}$$

《解答》

この漸化式は次のように変形できる。

$$a_{n+1}-a_n=-2n+10$$

これから、数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $-2n+10$ だということがわかるので、$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k+10)\\ &=-n^2+11n-24\end{aligned}$$

である。今得た式の最右辺の式の n に 1 を代入すると -14 になり、これは今得た式が $n=1$ のときにも成り立つことを示している。

$$\therefore\quad a_n=-n^2+11n-24\quad（答）$$

〈例 9 の解答終わり〉

〈例 **10**〉

次の漸化式を解け。

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n+3b_n \\ a_1=2\ ,\ b_1=1 \end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

〈解説〉

見方が違う 2 つの解法で解答を示す。(25) の 2 つの漸化式について

文字消去法　数列が a_n, b_n と 2 つあるから難しい。どちらか一つに。

数列作成法　2 つの数列から“都合の良い”新しい数列を作れないか。

という 2 つの視点で解いてみる。

《解答 **1**》（文字消去法）

(25) の第 1 式より

$$b_n=a_{n+1}-3a_n\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

である。またこの式から

$$b_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} \quad \cdots\cdots \quad (27)$$

である。今得た (26) と (27) を (25) の第 2 式に代入すると、

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_n + 3(a_{n+1} - 3a_n)$$

$$\therefore \quad a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0 \quad \cdots\cdots \quad (28)$$

また、(25) の第 1 式から

$$a_2 = 3a_1 + b_1 = 7$$

であり、(25) の第 3 式から $a_1 = 2$ なので、(28) から $PART\,3$ の方法で

$$a_n = \frac{3 \times 4^{n-1} + 2^{n-1}}{2}$$

これと (26) から b_n が求まり、

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3 \times 4^{n-1} + 2^{n-1}}{2} \\ b_n = \dfrac{3 \times 4^{n-1} - 2^{n-1}}{2} \end{cases} \quad \text{（答）}$$

〈解答 1 終わり〉

《**解答 2**》（数列作成法）

(25) の第 1 式・第 2 式から、(第 1 式)+(第 2 式) 及び (第 1 式)−(第 2 式) を作ると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 4(a_n + b_n)$$
$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n)$$

ここで、$c_n = a_n + b_n$, $d_n = a_n - b_n$ とおくと、

$$\begin{cases} c_{n+1} = 4c_n \\ c_1 = 3 \end{cases} , \quad \begin{cases} d_{n+1} = 2c_n \\ d_1 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} c_n = 3 \times 4^{n-1} \\ d_n = 2^{n-1} \end{cases}$$

$c_n = a_n + b_n$, $d_n = a_n - b_n$ より、$a_n = \dfrac{c_n + d_n}{2}$, $b_n = \dfrac{c_n - d_n}{2}$ なので

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3 \times 4^{n-1} + 2^{n-1}}{2} \\ b_n = \dfrac{3 \times 4^{n-1} - 2^{n-1}}{2} \end{cases} \quad \text{（答）}$$

〈解答 2 終わり〉

〈**例 11**〉

次の漸化式を解け。

$$\begin{cases} a_n^2 = (n+1)a_{n+1} + 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (29)$$

〈解説〉

自分が今までに知っているタイプではなく、またどう考えてもアイデアがうまく浮かばないとき、最初の何項かを実際に計算してみて何か情報をつかむ、ということをよくする（数学における実験精神：数学も科学だ）。この問題の場合にそれをやってみよう。

$$a_2 = 4 \ \ a_3 = 5\ ,\ a_4 = 6\ ,\ a_5 = 7$$

となる。

これは、公差が 1 の等差数列であるような雰囲気だ。もしそうだとしたら、$a_1 = 3$ から、$a_n = n + 2$ だろうと予想される。予想があれば、それが正しいか間違っているか検証しようということになる。正しいだろうと期待しているので、証明できないかと考えてみることにする。漸化式で一般項を予想したときの証明に使う強力な道具は数学的帰納法だ。

《例 **11** の解答》

$a_n = n + 2$ であることを数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のとき成り立っていることは明らか。

$n = k$ のとき成り立っているとすると、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k^2 - 1}{k+1} \quad (\because\ (29)\ ) \\ &= \frac{(k+2)^2 - 1}{k+1} \quad (\because\ \text{数学的帰納法の仮定}\ ) \\ &= k + 3 \\ &= (k+1) + 2 \end{aligned}$$

よって、$n = k + 1$ のときも成り立つ。

よって、数学的帰納法より全ての自然数 n について成り立つことが示された。よって一般項は

$a_n = n + 2$ （答） 〈例１１の解答終わり〉

見たことがないタイプの問題に出くわしても、それを処理していこうとアプローチする気力と、この冊子に書いた数学的な眼の付け所から、問題の解決の糸口を見つけていくことが大切。

7 *PART 7*【 漸化式の役目 : a_n を求める ではない！】

漸化式を満たす一般項 a_n がどんな n の式になるのかを知ることは勿論大切だ。しかし、それだけが大切なのではない。a_n がどんな n の式になるかわからないが、漸化式を考えることで解決できるものがある。a_n は求められるが、求める必要がない、更には求めない方が良い場合もある。

『漸化式の問題：一般項を求める問題』という呪縛に縛られないように望む。

＜フィボナッチ数列の **1** 性質＞

【 問題 】 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & \cdots\cdots (30) \\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 1 & \cdots\cdots (31) \end{cases}$$

で決まる数列 $\{a_n\}$ について、

奇数番目の項の n 項の和：$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$

偶数番目の項の n 項の和：$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

であることを示せ。

（解答：一般項を求めて処理）

漸化式 (30) , (31) で決まる数列の一般項は（求め方省略：$PART\,3$ ）

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \qquad \left(但し、\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

$\alpha\,,\,\beta$ については、

$$\alpha^2 = \alpha + 1\,,\ \beta^2 = \beta + 1\,,\ \alpha + \beta = 1\,,\ \alpha\beta = -1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (32)$$

が成り立っていることに注意すると

$$\begin{aligned}
a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{ \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\alpha^2)^k - \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{n}(\beta^2)^k \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha\left\{(\alpha^2)^n - 1\right\}}{\alpha^2 - 1} - \frac{\beta\left\{(\beta^2)^n - 1\right\}}{\beta^2 - 1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) \quad \left(\because\ (32) \text{より} \ \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} = \frac{\beta}{\beta^2 - 1} = 1 \right) \\
&= a_{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{ \sum_{k=1}^{n}(\alpha^2)^k - \sum_{k=1}^{n}(\beta^2)^k \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^2\left\{(\alpha^2)^n - 1\right\}}{\alpha^2 - 1} - \frac{\beta^2\left\{(\beta^2)^n - 1\right\}}{\beta^2 - 1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{ \left(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}\right) - \alpha + \beta \right\} \quad (\because\ (32)\ ) \\
&= a_{2n+1} - 1 \quad (\because\ \beta - \alpha = \sqrt{5}\ )
\end{aligned}$$

よって示された。　　（証明終わり）

（解説：漸化式は項の間の性質を見せてくれている ！）

(30) は、連続する 2 項の和はその次の項になる：$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$、と言っている。これを使うと、

$$\begin{array}{lrl}
 & a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} & \\
= & a_4 + a_5 + a_7 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} & (\because\ (30)\ \text{で}\ n = 2\ \text{の場合}) \\
= & a_6 + a_7 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} & (\because\ (30)\ \text{で}\ n = 3\ \text{の場合}) \\
= & a_8 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n-1} & (\because\ (30)\ \text{で}\ n = 4\ \text{の場合}) \\
\vdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots \\
= & a_{2n-2} + a_{2n-1} & \\
= & a_{2n} &
\end{array}$$

勝手に式が変形して行ってくれて a_{2n} になる感じ。そして、$a_2 = a_1 (= 1)$ である。a_1 をちょっと a_2 にしたら、パタパタパター と将棋倒しのように a_{2n} になっていく。証明するも何も明らかに

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$$

では、もう一方の式はどうするか。a_2 の左に a_1 をたすと、同様に将棋倒しのように自動的に式

が変形していき a_{2n+1} になる。つまり、$a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1}$ となるので、

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - a_1 = a_{2n+1} - 1$$

(注) 何か証明らしくない気がするなら、次のように説明の表現を工夫してみよう。

（解答：漸化式を利用して）

$a_0 = 0$ として a_0 を決めておくと、① は $n \geqq 0$ でも成り立っている。① より、任意の自然数 k について $a_{2k} - a_{2k-2} = a_{2k-1}$ が成り立つので、

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k} - a_{2k-2}) = a_{2n} - a_0 = a_{2n}$$

同様に、

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k+1} - a_{2k-1}) = a_{2n+1} - a_1 = a_{2n+1} - 1$$

（証明終わり）

この問題、一般項 a_n を n の式で表さないで、漸化式そのものを使う方が楽だし、カッコ良い !!

＜フィボナッチ数列の 1 性質＞では、一般項 a_n が比較的簡単に求められ、一般項の式を使って直接に和を求められたが、一般項をわざわざ求めなくてもいいんじゃないか！ という例を紹介した。次は、a_n を簡単には求められない（と私は思っている）場合を紹介する。

＜近似値＞

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考察する。

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (33)$$

この数列の一般項 a_n を表す n の式が知られているのか、私は知らない。あったとしても、多分簡単な式ではないだろう。でも、いいじゃないかわからなくても。実はこの漸化式で決まる数列の極限値は $\sqrt{2}$ 。極限値が $\sqrt{2}$ であることの証明は後回しにして、何項か実際に a_n を計算してみよう (次の表)。

n	a_n	小数表示
1	1	1
2	$\dfrac{3}{2}$	1.5
3	$\dfrac{17}{12}$	$1.4166666666666\cdots$
4	$\dfrac{577}{408}$	$1.4142156862745098039215686274509803921568627450980 3\cdots$
5	$\dfrac{665857}{470832}$	$1.414213562374689910626295578890134910116559622115 74\cdots$
6	$\dfrac{886731088897}{627013566048}$	$1.414213562373095048801689623502530243614981925776 19\cdots$

実は、

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769 48\cdots$$

なので、a_6 は小数第 22 位まで正確な値が出ている。表には入りきらないので記さなかったが、

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{15725840480329186333353217}{11119848443498681379381 12} \\ &= 1.41421356237309504880168872420969807856967187537723 4\cdots \end{aligned}$$

は小数第 41 位までも正確な値がでている。

筆算による $\sqrt{c}$ の求め方が知られているが、この漸化式の数列による方法は、非常に良い近似値の求め方になっている。

(ニュートン法)

概略次のような話し。$a_{n+1} = a_n - \dfrac{F(a_n)}{F'(a_n)}$ で a_n を決めると、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は、方程式 $F(x) = 0$ の解になる。

どんな $F(x)$ でもそうなるとは言えない、また a_1 をどう取ってもそうなるというわけではないが、例えば、$F(x) = x^k - c$ $(c > 0)$ として漸化式を作ると、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right) a_n + \dfrac{c}{k} {a_n}^{1-k} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

で決まる数列 $\{a_n\}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は $F(x) = 0$ の解、つまり $\sqrt[k]{c}$ になり、a_n は $\sqrt[n]{c}$ の近似値になることが示せる（証明略）。

$k = 2, c = 2$ のときが、上に示した (33) になる。(33) について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ になることの証明の概略を示しておこう。

【 (33) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ の証明 】

任意の自然数 n について、$1 \leqq a_n \leqq 2$ であることが数学的帰納法により示せる。

$$\begin{aligned} \left|a_{n+1} - \sqrt{2}\right| &= \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \\ &\leqq \frac{1}{4} \left|a_n - \sqrt{2}\right| \end{aligned}$$

$$\therefore \left|a_n - \sqrt{2}\right| \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left|a_1 - \sqrt{2}\right|$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ が証明された。（証明終わり）

この証明に $\mathbf{a_n}$ がどんな $\mathbf{n}$ の式であるかは一切使われていない !!