令和２年１月25日(土)

とにかくやってみる力を養成する問題

第112回数学教育実践研究会

数実研会員　安田富久一

【 やってみる力養成問題 1 】

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{\log x}{x}-\frac{1}{2\sqrt{e}} \quad (1 \leqq x \leqq \sqrt{e^3})} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

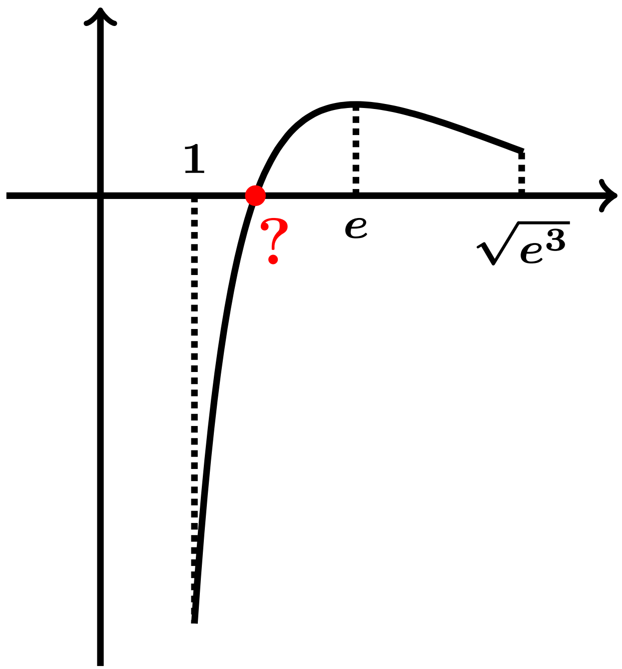
とする。

$\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{x=\sqrt{e^3}}$, $\boldsymbol{y=f(x)}$, $\boldsymbol{x}$軸で囲まれた面積を求めよ。

【 やってみる力養成問題 1 】

$$f(x)=\frac{\log x}{x}-\frac{1}{2\sqrt{e}}\quad (1 \leqq x \leqq \sqrt{e^3})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$\sqrt{e^3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{2-\sqrt{e}}{2e}$	$\searrow$	$\frac{3-e}{2\sqrt{e^3}}$



$$f(1)<0,\ f(e)>0,\ f(\sqrt{e^3})>0$$

$$面積 = -\int_1^{?} f(x)\,dx+\int_{?}^{\sqrt{e^3}} f(x)\,dx$$

【 やってみる力養成問題 $\mathbf{1}$ 】

$$f(x) = \frac{\log x}{x} - \frac{1}{2\sqrt{e}} \quad (1 \leqq x \leqq \sqrt{e^3}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

x 軸との交点の x 座標の値：方程式

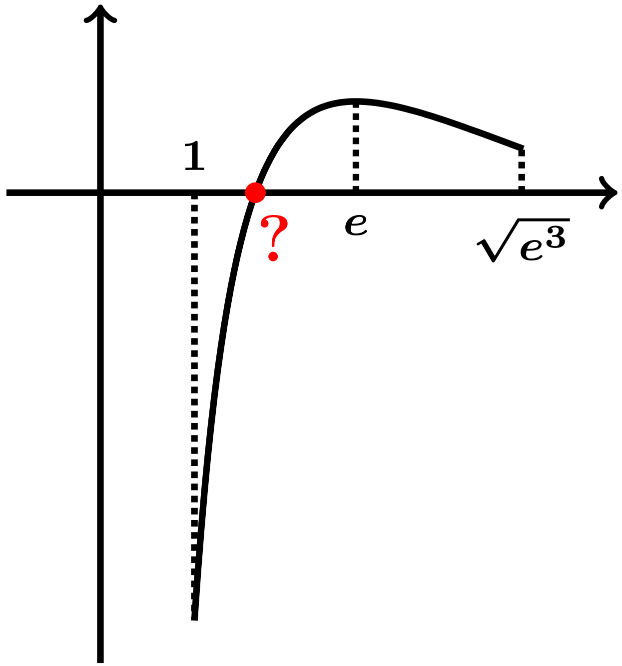
$$\log x = \frac{1}{2\sqrt{e}}x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ?$$

対数をはずしてみた方程式

$$x = e^{\frac{1}{2\sqrt{e}}x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ?$$

【 やってみる力養成問題 **1** 】

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$\sqrt{e^3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{2-\sqrt{e}}{2e}$	$\searrow$	$\frac{3-e}{2\sqrt{e^3}}$



交点の x 座標は1つだけ。

$$\Downarrow$$

見付けたもん勝ちでしょ！

$$\frac{\log x}{x} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

【 やってみる力養成問題 $\mathbf{1}$ 】

$$\frac{\log x}{x} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

- 右辺に $\log$ なし。
- 右辺に $\sqrt{e}$ などと厄介者がいる。
- $x = \sqrt{e}$ なんか、ええのとちゃうか！

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\log\sqrt{e}}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2\sqrt{e}} = 0 \qquad \text{やったあ}$$

【 やってみる力養成問題 **2** 】夏季講習問題(高1 or 2：指数・対数未学習)

(1) $\boldsymbol{x, y > 0}$ のとき、

$$\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)}{x+y}$$ の最大値を求めよ。

(2) $\boldsymbol{x, y, z > 0}$ のとき、

$$\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(1-\frac{1}{z}\right)}{x+y+z}$$ の最大値を求めよ。

【 解答 】

(1) 与式 $= \dfrac{2}{x+y} - \dfrac{1}{xy} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{xy}} - \dfrac{1}{xy}$ ($\because$ 相加・相乗)

ここで $t = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ とおくと、

$$\text{与式} \leqq t - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)}{x+y} \leqq \frac{1}{4}$$

$x = y = 2$ のとき、上記不等式の等号が成立する。

よって、求める最大値は $\dfrac{1}{4}$ 。

(2)　与式 $= \dfrac{3}{x+y+z} - \dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}{x+y+z}$

$$\leqq \frac{3}{x+y+z} - \frac{9}{(x+y+z)^2} \quad (\because \text{ 相加・調和 })$$

ここで $t = \dfrac{3}{x+y+z}$ とおくと、(1) と同様に

$$\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\left(1-\dfrac{1}{y}\right)+\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}{x+y+z} = t - t^2 \leqq \frac{1}{4}$$

$x = y = z = 2$ のとき、上記不等式の等号が成立するのは明らか。

よって、求める最大値は $\dfrac{1}{4}$ 。

【 どこがやってみる力の養成 ? 】

- 30年前高校教員時代に夏季講習の問題として出した。
- かつて数学セミナーの『エレガントな解答を求む』に出題された。
  しかし、それほど難しくはない。
- 肩慣らしに良い程度なので、解かせてみたかった。
- 本問を取り扱う前日、気付いた。
  生徒は累乗根知らない！
- 生徒は3文字の相加平均・相乗平均・調和平均の関係を知らない。
- コーシーシュワルツの不等式で相加平均・調和平均の関係を示し
  それを使って解答を見せるのもあるが、小問設定なしに酷だろう
- 明日講習で『ゴメン、小問付け加える』と謝って処理するか？

【 講習で生徒にした**(2)**の解説 】　こんな元気さ期待！

- バランスのええ式の最大・最小は文字が相等しいときに起こってた。
- (1) も $\boldsymbol{x=y}$ の時やった。
- (2) もそうやったらええなあ、と期待してみよ。$\boldsymbol{x=y=z}$ やったら

$$\text{与式}=\frac{\boldsymbol{3-\dfrac{3}{x}}}{\boldsymbol{3x}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2}}$$

- $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{x}}$ とおいたら、(1) の時と同じ $\boldsymbol{t}$ の式。
- 最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ と期待でけけへんか。
- $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ が最大値やと断言するには何がわかったらええんや

  次の二つやと思うけど、ちゃうか?

【 講習で生徒にした **(2)** の解説 】　こんな元気さ期待！

- 最大値は $\dfrac{1}{4}$ と期待でけけへんか。
- $\dfrac{1}{4}$ が最大値やと断言するには何がわかったらええんや

  次の二つやと思うけど、ちゃうか?

(1) $\boldsymbol{x, y, z}$ が正の数なら

$$\frac{\left(\mathbf{1}-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)+\left(\mathbf{1}-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}\right)+\left(\mathbf{1}-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}}\right)}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}} \leqq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

(2) (1) の等号を成立させる正の数 $\boldsymbol{x, y, z}$ がある

(1) の不等式の証明 及び **(2)** に言う $\boldsymbol{x, y, z}$ の存在

$$\frac{1}{4}-\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(1-\frac{1}{z}\right)}{x+y+z}$$

$$=\frac{yzx^2+zxy^2+xyz^2+4xy+4yz+4zx-12xyz}{4xyz(x+y+z)}$$

$$=\frac{yz(x-2)^2+zx(y-2)^2+xy(z-2)^2}{4xyz(x+y+z)} \geqq 0$$

なので (1) が成り立つ。

また、最後の分数式の分子の3項はいずれも $\boldsymbol{0}$ 以上。
よって、等号成立条件は $\boldsymbol{x=y=z=2}$ で、
このとき等号が成立するので (2) もOK。

（本教材紹介の思い）

- 予測し（仮説を立て）、検証することは科学で大切だ　という
- それなら、上記方法はまさしく科学的。
- お行儀の良い求め方ばかりではなく、
  問題解決能力をこんな視点で養成することが時々あって良いのではないか。