令和２年１月25日(土)

《 オイラーの公式 》

第112回数学教育実践研究会

数実研会員　安田富久一

分数式の綺麗な恒等式の一つにオイラーの恒等式があるので紹介する。
岩波書店の数学入門辞典p.64 に

オイラーの公式

$a_i \neq a_j \ (i \neq j)$ として、次の恒等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^k}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} = \begin{cases} 0 & (\ k = 0, 1, \cdots, n-2\ ) \\ 1 & (\ k = n-1\ ) \end{cases}$$

が紹介されている。正しいことは有理関数

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{z^{m+1}}{\prod_{i=1}^{n} (z - a_j)}$$

$(m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ のリーマン球面上での留数の和が0であることを使うと簡単に証明できる、と書かれている。

＜レポートの動機＞　高校生には教えられないのか?

- 共立出版『代数学講義』高木貞治(著)に高校生OKのがある。
- 部分分数分解を利用
- 上記利用法は高校生が身につけておくと良い方法
  （その方法をせずに悪戦苦闘している学生が多い）
- 公式の証明自身が見事（スマート・エレガント）

＜悪戦苦闘の例＞

(1) $$\frac{4x^2-11x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

が恒等式になるように定数 a, b, c を定めよ。

(2) $$\int \frac{4x^2-11x+3}{x^3-2x^2-x+2}dx$$ を求めよ。

＜(1) の悪戦苦闘の解答例＞

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

$$=\frac{(a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$\therefore \quad (a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)$$

$$=4x^2-11x+3$$

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=4 \\ -a-3b=-11 \\ -2a+2b-c=3 \end{cases}$$

＜**(1)** の悪戦苦闘の解答例＞

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

$$=\frac{(a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$\therefore\quad (a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)$$

$$=4x^2-11x+3$$

$$\therefore\ \begin{cases} a+b+c=4 \\ -a-3b=-11 \\ -2a+2b-c=3 \end{cases}$$

連立方程式を解く時間がとれず・・・

＜お勧め：このようにしては！＞

$$\frac{4x^2-11x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

両辺に $x-1$ をかけると

$$\frac{4x^2-11x+3}{(x+1)(x-2)}=a+\frac{b(x-1)}{x+1}+\frac{c(x-1)}{x-2}$$

両辺に $x=1$ を代入して $a=2$ を得る。

同様に、$x+1$, $x-2$ を両辺にかけて $b=3$, $c=-1$ を得る。

$$\therefore\ a=2\,,\ b=3\,,\ c=-1$$

【 オイラーの恒等式の証明 】（$n = 3$ の場合）

$n = 3$ の場合の証明を知れば、一般の場合は同様にわかる。

恒等式を $\sum$ を用いずに書くと

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

【 証明 】

- x の分数式　$\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$　を考える。

- 上記分数式は部分分数分解して次のように出来る

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

- 両辺に $x-a$ をかけると

$$\frac{x}{(x-b)(x-c)}=A+\frac{B(x-a)}{x-b}+\frac{C(x-a)}{x-c}$$

- ここで $x=a$ を代入して　$A=\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}$ を得る

- $$A = \frac{a}{(a-b)(a-c)}$$
  $$B = \frac{b}{(b-c)(b-a)}$$
  $$C = \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

- $$\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

  の両辺に $x = 0$ を代入すると、

- $$0 = -\frac{A}{a} - \frac{B}{b} - \frac{C}{c} \quad \therefore \ \frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0$$
  $$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$$

- $$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

  については、

- x の分数式 $\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ を部分分数分解した

  $$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

  を考え、同様にして

- $$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

- $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=0$

  については、

- x の分数式 $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ を部分分数分解した

  $$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}=1+\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

  を考え、同様にして

- $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$

＜n が2以上の任意の自然数の時＞

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^{k}}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} = \begin{cases} 0 & (\ k = 0, 1, \cdots, n-2\ ) \\ 1 & (\ k = n-1\ ) \end{cases}$$

の証明は

x の分数式 $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{\prod_{i=1}^{n} (x - a_i)}$ の部分分数分解を考える。