第 112 回数学教育実践研究会

オイラーの公式

レポート

令和 2 年 1 月 25 日 (土)
ニッセイ MK ビル

数実研会員　安田富久一

《 オイラーの公式 》

分数式の綺麗な恒等式の一つにオイラーの恒等式があるので紹介する。
岩波書店の数学入門辞典 [2] p.64 に

オイラーの公式

$a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ として、次の恒等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^k}{\displaystyle\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)} = \begin{cases} 0 & (\ k = 0, 1, \cdots, n-2\ ) \\ 1 & (\ k = n-1\ ) \end{cases}$$

が紹介されている。正しいことは有理関数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{z^{m+1}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(z - a_j)}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ のリーマン球面上での留数の和が 0 であることを使うと簡単に証明できる、と書かれている。

＜レポートの動機＞　高校生には教えられないのか?

高木貞治 [1] p.65 にある［問題 4］が Euler の公式というネーミングで上記恒等式を示す問題になっていて、高校生にわかる証明になっている。ここで使う技術は部分分数分解。しかも、その方法は高校生が身につけておくと良い方法である（その方法に依らずに悪戦苦闘している学生をしょっちゅう見ている）。この事及び証明が見事なこともあり、紹介したいと思ったのが本レポートの動機である。

【 オイラーの恒等式の証明 】（$n = 3$ の場合）

$n = 3$ の場合の証明を示す。一般の n の場合も全く同様に示すことが出来る。

先ずは部分分数分解が常に可能であることを知らない場合を想定した証明をする。$n = 3$ の場合を、$a_1 = a\,, a_2 = b\,, a_3 = c$ として書き並べてみると

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} = 0 \\[2ex] \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)} = 0 \\[2ex] \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1 \end{cases}$$

$A_k = \dfrac{a^k}{(a-b)(a-c)}\,,\ B_k = \dfrac{b^k}{(b-c)(b-a)}\,,\ C_k = \dfrac{c^k}{(c-a)(c-b)}$ 　$(k = 0, 1, 2)$ とおくと、
証明すべき上記式は

$$A_k + B_k + C_k = \begin{cases} 0 & (k = 0, 1) \\ 1 & (k = 2) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

【 部分分数分解が常に可能であることを知っている生徒への証明 】

x の分数式 $\dfrac{x^{k+1}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ $(k=0,1,2)$ を考える。$a\,,b\,,c$ は互いに異なるので、この分数式は次のような部分分数に分解することが出来る。

$$\frac{x^{k+1}}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \begin{cases} \dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c} & (k=0,1\text{ のとき}) \quad \cdots\cdots ② \\ 1+\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c} & (k=2\text{ のとき}) \quad \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

両辺に $x-a$ をかけると

$$\frac{x^{k+1}}{(x-b)(x-c)} = \begin{cases} A+\dfrac{B(x-a)}{x-b}+\dfrac{C(x-a)}{x-c} & (k=0,1\text{ のとき}) \\ (x-a)+A+\dfrac{B(x-a)}{x-b}+\dfrac{C(x-a)}{x-c} & (k=2\text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで $x=a$ を代入すると、

$$\frac{a^{k+1}}{(a-b)(a-c)}=A \qquad (k=0,1,2\text{ のとき})$$

同様の議論により $k=0,1,2$ で

$$A=\frac{a^{k+1}}{(a-b)(a-c)}\ ,\ B=\frac{b^{k+1}}{(b-c)(b-a)}\ ,\ C=\frac{c^{k+1}}{(c-a)(c-b)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を得る。ここで、②, ③の両辺に $x=0$ を代入すると、

$$0 = \begin{cases} -\dfrac{A}{a}-\dfrac{B}{b}-\dfrac{C}{c} & (k=0,1\text{ のとき}) \\ 1-\dfrac{A}{a}-\dfrac{B}{b}-\dfrac{C}{c} & (k=2\text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

④ より、

$$\begin{aligned} \frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c} &= \frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)} \\ &= A_k+B_k+C_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \end{aligned}$$

⑤, ⑥より、① が正しいことが分かり、証明された。（証明終わり）

（注） 部分分数分解を利用して定積分を求める問題で、例えば上記の場合、②, ③の後、右辺を通分して分子を展開して係数比較をし、A,B,C の連立方程式を解く学生を多く見た。そして、連立方程式を解く時間がなく途中までで頓挫の学生が多かった。具体的には、次の例である。

【 例 】

(1) $\dfrac{4x^2-11x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}$ が恒等式になるように。定数 a,b,c を定めよ。

(2) $\displaystyle\int \frac{4x^2-11x+3}{x^3-2x^2-x+2}dx$ を求めよ。

＜(1) で多かった解答。(2) の解答は省略＞

$$\begin{aligned} &\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2} \\ &= \frac{a(x+1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦ \\ &= \frac{(a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &\therefore\ (a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)=4x^2-11x+3 \quad \cdots\cdots\cdots ⑧ \end{aligned}$$

⑧ で係数比較すると、

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ -a-3b=-11 \\ -2a+2b-c=3 \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑨$$

⑨ を解いて、$a=2, b=3, c=-1$ （解答終わり）

⑨ まで記載して連立方程式を時間内に解ききれないのが多かった。

＜**(1)** の別解：お勧めの方法＞

与えられた分数式の両辺に $x-1$ をかけると

$$\frac{4x^2-11x+3}{(x+1)(x-2)} = a + \frac{b(x-1)}{x+1} + \frac{c(x-1)}{x-2} \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑩の両辺に $x=1$ を代入して、$a=2$ を得る。また、同様に、$x+1$ を両辺にかけたあと $x=-1$ を代入、及び $x-2$ を両辺にかけたあと $x=2$ を代入して、$b=3, c=-1$ を得る。

よって、求める答えは $a=2, b=3, c=-1$ （解答終わり）

【 部分分数分解が常に可能であることを知らない生徒への証明 】

$$\frac{A_{k+1}}{x-a} + \frac{B_{k+1}}{x-b} + \frac{C_{k+1}}{x-c}$$
$$= \frac{A_{k+1}(x-b)(x-c) + B_{k+1}(x-b)(x-a) + C_{k+1}(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \quad \cdots\cdots ⑪$$

⑪の分子を $f(x)$ とすると、$f(x)$ は 2 次以下の x の多項式である。さらに、

$f(a) = A_{k+1}(a-b)(a-c) = a^{k+1}$、同様にして $f(b) = b^{k+1}$, $f(c) = c^{k+1}$ $\cdots\cdots$ ⑫

つまり、$f(x)$ は異なる 3 つの値 a, b, c について、x^{k+1} と同じ値を取る。よって、$k \leqq 1$ ならば、$f(x) = x^{k+1}$ は x の恒等式である。

$$\frac{x^{k+1}}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A_{k+1}}{x-a} + \frac{B_{k+1}}{x-b} + \frac{C_{k+1}}{x-c}$$

恒等式なので、$x=0$ を代入して、$k=0,1$ ならば、

$$0 = \frac{A_{k+1}}{-a} + \frac{B_{k+1}}{-b} + \frac{C_{k+1}}{-c} = -(A_k + B_k + C_k)$$
$$\therefore A_k + B_k + C_k = 0 \quad (k=0,1)$$

次に $k=2$ の場合を示そう。

$g(x) = x^3 - (x-a)(x-b)(x-c)$ を考えると、$g(x)$ は 2 次以下の x の多項式で⑫より、$g(a) = a^3 = f(a)$, $g(b) = b^3 = f(b)$, $g(c) = c^3 = f(c)$ である。つまり、$g(x) = f(x)$ は恒等式になる。

$$\frac{x^3-(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A_3}{x-a} + \frac{B_3}{x-b} + \frac{C_3}{x-c}$$

恒等式なので、$x=0$ を代入して、

$$-1 = \frac{A_3}{-a} + \frac{B_3}{-b} + \frac{C_3}{-c} = -(A_2 + B_2 + C_2)$$
$$\therefore A_2 + B_2 + C_2 = 1$$

以上により、①が証明された。 （証明終わり）

一般の n の場合の証明は、$n=3$ の時の上記証明と全く同じであるが、確認のために付記しておく。

【 オイラーの恒等式の証明 】（n が 2 以上の任意の自然数の場合）

x の分数式 $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k\ +1}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-2)$ を考える。

$a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ であるから、A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が存在して、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)}$ は次のように部分分数に分解される。

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-a_j)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-a_i} & (k = 0, 1, \cdots, n-2\ \text{のとき}) \cdots\cdots ⑬ \\ 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-a_i} & (k = n-1\ \text{のとき}) \cdots\cdots ⑭ \end{cases}$$

この両辺に $x - a_i$ をかけると

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{\displaystyle\prod_{j\neq i}^{n}(x-a_j)} = \begin{cases} A_i + \displaystyle\sum_{j\neq i}^{n} \frac{A_i(x-a_i)}{x-a_j} & (k = 0, 1, \cdots, n-2\ \text{のとき}) \\ (x-a_i) + A_i + \displaystyle\sum_{j\neq i}^{n} \frac{A_i(x-a_i)}{x-a_j} & (k = n-1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$x = a_i$ を代入すると、

$$A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^{k+1}}{\displaystyle\prod_{j\neq i}^{n}(x-a_j)} \cdots\cdots ⑮$$

を得る。ここで、⑬, ⑭の両辺に $x = 0$ を代入すると、

$$0 = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i} & (k = 0, 1, \cdots, n-2\ \text{のとき}) \\ 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i} & (k = n-1\ \text{のとき}) \end{cases} \cdots\cdots ⑯$$

⑮, ⑯より、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^{k}}{\displaystyle\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)} = \begin{cases} 0 & (k = 0, 1, \cdots, n-2) \\ 1 & (k = n-1) \end{cases}$$

よって証明された。（証明終わり）

参考文献

[1] 高木貞治『代数学講義』共立出版（改訂新版第 11 冊 昭和 47 年 10 月 20 日）

[2] 岩波書店『岩波　数学入門辞典』