

令和元年11月30日(土)

変形症候群（2）

第111回数学教育実践研究会

数実研会員 安田富久一

《 使用上の注意を良くお読み下さい 》

マニュアルはよく読んで注意に従って!!

【 問題 】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} = 56$ が成り立つように、

1桁の自然数 a, b 及び正の数 c の値を定めよ。

但し、 $a > b > c$ とする。

次のような解答が多かった。

【 問題 】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} = 56$ が成り立つように、

1桁の自然数 a, b 及び正の数 c の値を定めよ。 ($a > b > c$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(bx + c)}{x} \frac{\sin (bx + c)}{bx + c} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(bx + c)}{x} \\ &\quad \left(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (bx + c)}{bx + c} = 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(ab + \frac{ac}{x} \right) \end{aligned}$$

もし、 $ac \neq 0$ なら発散するので、 $ac = 0$ 。

公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ には使用上の注意がある。

—— 使用上の注意 ——

- $\frac{\sin B}{A}$ のスタイルかつ $A = B$ である
- $A \rightarrow 0$ である

$\lim_{x \rightarrow 0} (bx + c) = 0$ の確認をしないと使えない。

もっと言うと

公式以前に見なきゃいけないことあるでしょ!!

分母、分子それぞれどうなっていくの

【 解答 】

$\lim_{x \rightarrow 0} \text{分母} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ であるから、

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x}$ が極限值を持つためには、

$\lim_{x \rightarrow 0} \text{分子} = 0$ であることが必要である。

$\lim_{x \rightarrow 0} a \sin (bx + c) = a \sin c$ なので、

$$a \sin c = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

であることが必要。

$a > 0$ なので $\textcircled{1}$ は $\sin c = 0$ と同値。 $9 \geq a > b > c > 0$ であるから、 $c = \pi, 2\pi$ である。

(1) $c = \pi$ のとき、

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + \pi)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -ab \cdot \frac{\sin (bx)}{bx} \right\} \\ &= -ab < 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} = 56 \text{ に不適。}$$

(2) $c = 2\pi$ のとき、

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + 2\pi)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ ab \cdot \frac{\sin (bx)}{bx} \right\} \\ &= ab \end{aligned}$$

より、 $ab = 56$ である。

$9 \geq a > b > c = 2\pi$ なので $a = 8, b = 7$ である。

$\therefore a = 8, b = 7, c = 2\pi$ (答)