令和元年６月１日(土)

一を聞いて十を知る 百を識って一を教える
わかってる・知ってる　でも説明できる？

第109回数学教育実践研究会

数実研会員　安田富久一

《 実数解・虚数解の個数 》

【 Descartes の符号律・その準備 】

実数係数のn次方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の正の解の個数と虚数解の個数（重解はその重複度を数えるものとする）に関する情報で、簡単に手に入るものがある。それを紹介する。デカルトの符号律と命題を紹介する。

＜定義：符号の変わりの数＞

①の係数の列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ について、左から順に右へ見ていく（但し 0 は無視する）、符号が $+$ から $-$ または $-$ から $+$ に変わる数を、①の符号の変わりの数と言う。

【 **Descartes** の符号律・その準備 】

実数係数の n 次方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

の正の解の個数と虚数解の個数（重解はその重複度を数えるものとする）に関する情報で、簡単に手に入るものがある。それを紹介する。

次のことが成り立つ。

【 デカルトの符号律 】

方程式 ① の正の解の個数は、符号の変わりの数に等しいか、またはそれよりも偶数個少ない。

【 デカルトの符号律 】

方程式 ① の正の解の個数は、符号の変わりの数に等しいか、またはそれよりも偶数個少ない。

【 例 】

(1) 3次方程式 $\boldsymbol{x^3 - x^2 - x - 1 = 0}$ や $\boldsymbol{x^3 + x^2 - x - 1 = 0}$ や $\boldsymbol{x^3 + x^2 + x - 1 = 0}$ は、どれも正の解は唯一つである。

(2) 一般に、$\boldsymbol{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n}$ が実数で、$\boldsymbol{a_0 > 0, a_n < 0}$ とする。$\boldsymbol{0 < k < n}$ を満たす自然数 $\boldsymbol{k}$ があり、$\boldsymbol{0 \leqq i < k}$ であれば $\boldsymbol{a_i \geqq 0}$ かつ$\boldsymbol{k \leqq i \leqq n}$ であれば $\boldsymbol{a_i \leqq 0}$ となっているとき、方程式

$$\boldsymbol{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0}$$

は正の解を持ち、その個数は1個である。

【 デカルトの符号律を利用する問題 】

デカルトの符号律を利用する問題として、解の限界に関する話題が『代数学講義』高木貞治(著)共立出版 に書かれている。

【 解の限界 】

全ての解が絶対値において $\boldsymbol{r}$ を越えないとき、$\boldsymbol{r}$ を解の限界という。

【 命題 】

方程式 $\boldsymbol{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0}$ の一つの限界が、

$$\boldsymbol{r^n - |a_1|\, r^{n-1} - |a_2|\, r^{n-2} - \cdots - |a_n| = 0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

の唯一つの正の解 $\boldsymbol{r_0}$ により与えられる。

デカルトの符号律は次のフーリエ（Fourier）の定理からすぐ示される。

【 フーリエ（**Fourier**）の定理 】

$f(x)$ を実数係数の多項式とする。区間 $a < x \leqq b$ での方程式 $f(x) = 0$ の解の個数を N とする。また、$f(x)$ 及びその導関数 $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ における符号の変わりの数を V で表すことにすると、次の式が成り立つ。

$$N = V(a) - V(b) - 2h$$

（但し、$2h$ は 0 または正の偶数を表す）

【 証明 】

$x = x_0$ を $f(x) = 0$ の k重解とする。x が x_0 を通過するとき、

$$f(x)f'(x), f'(x)f''(x), \cdots, f^{(k-1)}(x), f^{(k)}(x)$$

の符号は $-$ から $+$ に変わるから、x_0 の直前で $f, f', f'', \cdots, f^k$ の間に符号の変わりが k 個あり、x_0 の直後で、符号の変わりがなくなる。そのため、$V(x)$ が k 個減少する。

次に、$\boldsymbol{x = x_0}$ が $\boldsymbol{f(x) = 0}$ の解ではなく、ある導関数 $\boldsymbol{f^{(h)}(x)}$ の解である場合を考える。

$\boldsymbol{x_0}$ が $\boldsymbol{k}$ 重解で、$\boldsymbol{k}$ が偶数のとき、$\boldsymbol{f^{(h+k)}(x_0)}$ の符号を $\boldsymbol{\sigma}$ とすると、$\boldsymbol{x_0}$ の直前と直後とにおける $\boldsymbol{f^{(h-1)}}$ から $\boldsymbol{f^{(h+k)}}$ までの間の符号の配置が次のようになる。

	$f^{(h-1)}$	$f^{(h)}$	$f^{(h+1)}$	$\cdots$	$f^{(h+k-1)}$	$f^{(h+k)}$
直前	$\pm$	σ	$-\sigma$	$\cdots$	$-\sigma$	σ
x_0	$\pm$	0	0	$\cdots$	0	σ
直後	$\pm$	σ	σ	$\cdots$	σ	σ

$\boldsymbol{f^{(h-1)}}$ の符号に関係なく、$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x_0}$ を通過するとき、符号の変わりが $\boldsymbol{k}$ 個減少する。

$\boldsymbol{x_0}$ が $\boldsymbol{k'}$ 重解で、$\boldsymbol{k'}$ が奇数のとき、

	$f^{(h-1)}$	$f^{(h)}$	$f^{(h+1)}$	$\cdots$	$f^{(h+k'-1)}$	$f^{(h+k')}$
直前	$\pm$	$-\sigma$	σ	$\cdots$	$-\sigma$	σ
x_0	$\pm$	0	0	$\cdots$	0	σ
直後	$\pm$	σ	σ	$\cdots$	σ	σ

よって、$f^{(h-1)}(x_0)$ と $f^{(h+k')}(x_0)$ との符号（$\pm$ と σ）が同じときには $k'+1$ 、反対のときには $k'-1$ だけ符号の変わりが減少する。

よって、x が a から b まで増大する間に、符号の変わりの減少は

$$V(a)-V(b)=N+\sum k+\sum(k'\pm 1)$$

（但し、$\sum$ は導関数のみの解に関する和を示す）

【 デカルトの符号律 】

方程式 ① の正の解の個数 N は、符号の変わりの数に等しいか、またはそれよりも偶数個少ない。

【 証明 】

フーリエ（Fourier）の定理 を利用する。

符号の変わりの数$= V(0)$，$V(\infty) = 0$ なので、

$$
\begin{aligned}
&\text{符号の変わりの数} \\
&= V(0) - V(\infty) \\
&= N + \sum k + \sum (k' \pm 1) \qquad \text{k: 偶数 , k': 奇数}
\end{aligned}
$$

より、成り立つ。

フーリエ（Fourier）の定理からは次の命題もわかる。

【 命題 】

係数 $\boldsymbol{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}}$ の中に $\boldsymbol{k}$ 個引き続いて $\boldsymbol{0}$ になる所がある場合、虚数解の個数について次のことがわかる。

$\geqq \boldsymbol{k}$ （$\boldsymbol{k}$: 偶数　のとき）

$\geqq \boldsymbol{k+1}$ （$\boldsymbol{k}$: 奇数、$\boldsymbol{0}$ を挟む両端の符号が同符号　のとき）

$\geqq \boldsymbol{k-1}$ （$\boldsymbol{k}$: 奇数、$\boldsymbol{0}$ を挟む両端の符号が異符号　のとき）