第109回数学教育実践研究会

うまくはまればピタッと当たる
Descartes デカルトの符号律

レポート

令和元年6月1日(土)
北海道大学理学部5号館203教室

数実研会員　安田富久一

《 実数解・虚数解の個数 》

【 Descartes の符号律・その準備 】

実数係数の n 次方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の正の解の個数と虚数解の個数（重解はその重複度を数えるものとする）に関する情報で、簡単に手に入るものがある。それを紹介する。デカルトの符号律と命題を紹介する。

＜定義：符号の変わりの数＞

①の係数の列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ について、左から順に右へ見ていく（但し 0 は無視する)、符号が $+$ から $-$ または $-$ から $+$ に変わる数を、**①の符号の変わりの数**と言う。

次のことが成り立つ。

【 デカルトの符号律 】

方程式 ① の正の解の個数は、符号の変わりの数に等しいか、またはそれよりも偶数個少ない。

【 例 】

(1)　3 次方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ や $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ や $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ は、どれも正の解は唯一つである。

＜理由＞

符号の変わりの数はいずれも 1。デカルトの符号律から、正の解は 1 個またはそれよりも偶数個少ないことになるが、2 以上の偶数を引くと負になるので、1 個と断定できる。

(2)　一般に、$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ が実数で、$a_0 > 0, a_n < 0$ とする。$0 < k < n$ を満たす自然数 k があり、$0 \leqq i < k$ であれば $a_i \geqq 0$ かつ $k \leqq i \leqq n$ であれば $a_i \leqq 0$ となっているとき、方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

は正の解を持ち、その個数は 1 個である。

【 デカルトの符号律を利用する問題 】

デカルトの符号律を利用する問題として、解の限界に関する話題が『代数学講義』高木貞治 (著) 共立出版 に書かれている。

【 解の限界 】

全ての解が絶対値において r を越えないとき、r を解の限界という。

【 命題 】

方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ の一つの限界が、

$$r^n - |a_1|\,r^{n-1} - |a_2|\,r^{n-2} - \cdots - |a_n| = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

の唯一つの正の解 r_0 により与えられる。

【 証明 】

デカルトの符号律により、② は一つの正の解を持つ。今それを r_0 とすると、$r > r_0$ ならば ② の左辺は正である。よって、$|x| > r_0$ とすると、

$$\left|x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\right| \geqq |x^n| - \left(\left|a_1x^{n-1}\right| + \left|a_2x^{n-2}\right| + \cdots + |a_n|\right) > 0$$

よって、r_0 は解の限界の一つである。　（証明終わり）

デカルトの符号律は次のフーリエ（Fourier）の定理からすぐ示される。

【 フーリエ（Fourier）の定理 】

$f(x)$ を実数係数の多項式とする。区間 $a < x \leqq b$ での方程式 $f(x) = 0$ の解の個数を N とする。また、$f(x)$ 及びその導関数 $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ における符号の変わりの数を V で表すことにすると、次の式が成り立つ。

$$N = V(a) - V(b) - 2h \qquad \text{（但し、}2h\text{ は }0\text{ または正の偶数を表す）}$$

【 証明 】

$x = x_0$ を $f(x) = 0$ の k 重解とする。x が増大しながら x_0 を通過するとき、

$$f(x)f'(x), f'(x)f''(x), \cdots, f^{(k-1)}(x), f^{(k)}(x)$$

の符号は $-$ から $+$ に変わるから、x_0 の直前において $f, f', f'', \cdots, f^k$ の間に符号の変わりが k 個あり、x_0 の直後においては、符号の変わりがなくなる。そのため、$V(x)$ が k 個減少する。

次に、$x = x_0$ が $f(x) = 0$ の解ではなく、ある導関数 $f^{(h)}(x)$ の解である場合を考える。

x_0 が k 重解で、k が偶数のとき、$f^{(h+k)}(x_0)$ の符号を σ とすると、x_0 の直前と直後とにおける $f^{(h-1)}$ から $f^{(h+k)}$ までの間の符号の配置が次のようになる。

	$f^{(h-1)}$	$f^{(h)}$	$f^{(h+1)}$	$\cdots$	$f^{(h+k-1)}$	$f^{(h+k)}$
直前	$\pm$	σ	$-\sigma$	$\cdots$	$-\sigma$	σ
x_0	$\pm$	0	0	$\cdots$	0	σ
直後	$\pm$	σ	σ	$\cdots$	σ	σ

$f^{(h-1)}$ の符号に関係なく、x が x_0 を通過するとき、符号の変わりが k 個減少する。

x_0 が k' 重解で、k' が奇数のとき、

	$f^{(h-1)}$	$f^{(h)}$	$f^{(h+1)}$	$\cdots$	$f^{(h+k'-1)}$	$f^{(h+k')}$
直前	$\pm$	$-\sigma$	σ	$\cdots$	$-\sigma$	σ
x_0	$\pm$	0	0	$\cdots$	0	σ
直後	$\pm$	σ	σ	$\cdots$	σ	σ

よって、$f^{(h-1)}(x_0)$ と $f^{(h+k')}(x_0)$ との符号（$\pm$ と σ）が同じときには $k' + 1$ 、反対のときには $k' - 1$ だけ符号の変わりが減少する。

よって、x が a から b まで増大する間に、符号の変わりの減少は

$$V(a) - V(b) = N + \sum k + \sum k' \pm 1 \quad \left(\text{但し、}\sum \text{ は導関数のみの解に関する和を示す}\right)$$

（証明終わり）

【 証明（デカルトの符号律） 】

符号の変わりの数 $= V(0)$, $V(\infty) = 0$ なので、フーリエ（Fourier）の定理より明らか。

（証明終わり）

フーリエ（Fourier）の定理からは次の命題もわかる。

【 命題 】

係数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ の中に k 個引き続いて 0 になる所がある場合、虚数解の個数 W について次のことがわかる。

$$W \begin{cases} \geqq k & k\text{：偶数} \\ \geqq k+1 & k\text{：奇数、続く }0\text{ を挟む両端の符号が同符号} \\ \geqq k-1 & k\text{：奇数、続く }0\text{ を挟む両端の符号が異符号} \end{cases}$$