第 108 回数学教育実践研究会

教材は自分の中にある

レポート

平成 31 年 1 月 26 日 (土)
ニッセイＭＫビル

数実研会員　安田富久一

教材は自分の中にある

レポート「思い込みの危険」で作成したグラフを、教材作りの参考に、という視点で紹介する。

　レポート「思い込みの危険」では、次の問題の誤答が学生一人の誤答ではなく、複数人の同じ誤った理解だったために、紹介したものである。それは、以下の誤解。

【 レポートの背景 】

　『$y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ について、増減、凹凸を調べ（増減表を作成すること）、極値・変曲点を答え、グラフを描け。』という問題。次が解答の一例

本来の解答例

　$y' = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$, $y'' = 12x - 12$ より

$y' = 0$ となるのは $x = 0, 2$、$y'' = 0$ となるのは $x = 1$

よって、増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$

極大値：3（$x = 0$ のとき）

極小値：-5（$x = 2$ のとき）

変曲点：$(1, -1)$

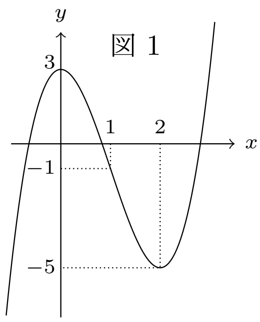
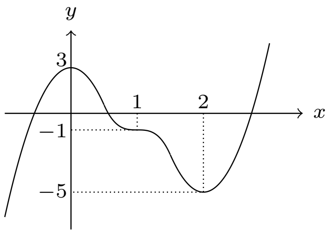


図 1

次のように回答した学生がいる

学生の誤解答（微分計算・極値等の答え省略）

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$



＜問題作りの動機＞

　上記誤解答の学生が描いた間違いのグラフを、どうやって本研究会のレポートに表示するか？

　私は約 10 年前から TEX というソフトを使っている。数年前に TEX の中に図形を描画する命令を容易にするパッケージ tikzpicture というものがあるのを知った。解析幾何学的なことを図形として非常に綺麗に描画してくれるので、以来それを使っている。今回のレポートで、正しいグラフは $2x^3 - 6x^2 + 3$ と指定すれば綺麗に描いてくれる。問題は誤答のグラフをどうするか。誤答の部分だけ空白にして印刷し、フリーハンドでグラフを描き入れ、人数分コピーするという方法では、折角綺麗な TEX と tikzpicture があるのに勿体ない、芸がなさすぎないか！

- 時間節約という点では、前者：空白にして手書き、が優る
- 綺麗な出来映えでは、後者：時間かかっても、tikzpicture でする

『 学生のために後者を選ぶ 』 と言うとカッコええけど、

私は自分が後者でやってみたい（数学で遊びたい）から後者を選んだ。

＜問題＞

増減表が

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$		$\searrow$	-1	$\searrow$		$\searrow$	-5	$\nearrow$

となる関数 $y = F(x)$ を一つ示せ。

($F(1), F(3)$ の値は好きな値を与えてよいので、増減表では空欄にしてある)。

＜問題 1＞

上記問題 を、次のような $f(x), g(x), h(x)$ 見つけることで答えよ。

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leqq 1) \\ g(x) & (1 < x < 3) \\ h(x) & (3 \leqq x) \end{cases}$$

＜問題 2＞

問題 1 を、$f(x), h(x)$ は 2 次関数、$g(x)$ は 3 次関数として見つけることで答えよ。

＜問題 3＞

問題 2 を次のように解け。$a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2, b_3; c_0, c_1, c_2$ を定数とし

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2\ ,\ g(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3\ ,\ h(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2\ ,$$

とおき、以下の条件を満たすような定数 $a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2, b_3; c_0, c_1, c_2$ を一組求めよ。

(1) $F(x)$ は実数全体で微分可能であり、$F'(x)$ は実数全体で連続関数である。

(2) $F(x)$ の極値について、極大値は 3（$x = 0$ のとき)、極小値は -5（$x = 4$ のとき）である。

(3) $g(x)$ は単調減少関数である。

(4) 点 $(2, -1)$ は変曲点であり、この点における $y = F(x)$ の接線の傾きは 0 である。

＜解答＞

(2) より $f(x)$ が極大値 3 を $x = 0$ で持ち、$h(x)$ が極小値 -5 を $x = 4$ で持つようにするため、

$$a_0 < 0\, ,\ f(x) = a_0x^2 + 3 \quad , \quad c_0 > 0\, ,\ h(x) = c_0(x-4)^2 - 5 \quad \cdots\cdots ①$$

としたい。また、(3) 及び (4) より

$$b_0 < 0\, ,\ g(x) = b_0(x-2)^3 - 1 \quad \cdots\cdots ②$$

となるようにしたい。次に、(1) より $f(1) = g(1)\, ,\ g(3) = h(3)\ ,\ f'(1) = g'(1)\ ,\ g'(3) = h'(3)$ となるようにしたいが、①, ② のように考えているから、次のようにしたい。

$$a_0 + 3 = -b_0 - 1\ ,\ b_0 - 1 = c_0 - 5 \quad , \quad 2a_0 = 3b_0\ ,\ 3b_0 = -2c_0 \quad \cdots\cdots ③$$

③ を解くと $a_0 = -\dfrac{12}{5}, b_0 = -\dfrac{8}{5}, c_0 = \dfrac{12}{5}$ を得る。以上から、問題の一つの答えは

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{12}{5}x^2 + 3 & (x \leqq 1) \\ -\dfrac{8}{5}(x-2)^3 - 1 & (1 < x < 3) \\ \dfrac{12}{5}(x-2)^2 - 5 & (3 \leqq x) \end{cases}$$

である。

【 教材は自分の中にある 】

前ページの問題は、自分がしたいことを実現するために自分が問題を設定して、問題を解いた。その問題は、アレンジすると生徒への課題として与えられる教材になる。

＜問題＞＜問題１＞～＜問題３＞と順を追って提示したが、最初の問題を与えて取り組ませて、レポート提出させたり、もっと遡り、グラフだけを見せて、そのグラフになるような関数を作らせる課題を与えるのも面白いかも知れない。

将来様々な分野で数学を使って問題解決を図ることができる人材を育成することを考えると、問題を数学化できることは大切な能力であると思う。数学化することの練習として、数学の中での解決のために、処理したいことのイメージを数学化して解決する練習は、とても役に立つ練習であると思う。

【 追録 】

全員のレポート発表終了後に、室蘭東翔高校の 平間順宏 先生 が私の席の所にいらっしゃった。“一つの多項式で目的の誤解答のグラフを実現できることを見つけた”、と私にメモを渡して下さった。それを次に紹介します。

【 平間先生の解答 】

誤答のグラフを見ると

- $x = 0, 1, 2$ で　$y' = 0$
- $x = 0, 2$ の前後で y' の符号が変わる
- $x = 1$ の前後で y' の符号が変わらない

なので、y が x の多項式で表せるとすれば、なるべく低次の多項式としては

$$y' = ax(x-1)^2(x-2)$$

となるもので見つかるとありがたい、と期待できる。

$$y = \int ax(x-1)^2(x-2)\,dx$$
$$= \frac{a}{5}x^5 - ax^4 + \frac{5}{3}x^3 - ax^2 + C$$

グラフが $(0, 3)$ を通ることから

$$C = 3$$

グラフが $(1, -1)$ を通ることから

$$-\frac{2}{15}a + C = -1 \quad \therefore a = 30$$

$$\therefore \quad y = 6x^5 - 30x^4 + 50x^3 - 30x^2 + 3$$

なお、$x = 2$ のとき、$y = -5$ となり、 $(2, -5)$ を通っている。

$\therefore \quad y = 6x^5 - 30x^4 + 50x^3 - 30x^2 + 3$ ……………………………… (答)

（平間先生の解答終了）

私はレポート発表時に、“一つの多項式で求めようとしたらかなり次数が高くなってしまいそうなので、3 つの部分に分けてつなげる問題 2 の処理をとった” と話していた。当初の課題意識には、＜問題＞に示した増減表において、$x = 1, 3$ の所で変曲点が出現する必要はなく、区間 $(0, 2)$ と区間 $(2, 3)$ のそれぞれに一つずつ存在すれば目的は達成できる。つまり、＜問題＞を次のページのようにしておけば良かったことに気付かせていただきました。平間先生に感謝いたします。

＜問題＞

増減表が

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$*_1$	$\cdots$	1	$\cdots$	$*_2$	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	$*_3$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$*_4$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

となる関数 $y=F(x)$ を一つ示せ。（但し、$*_1$〜$*_4$ には好きな数を設定してよい）