平成31年1月26日（土）

気 付 き に く い 勘 違 い

第108回数学教育実践研究会

数実研会員　　安田 富久一

【 問題 】 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の極限値をロピタルの定理を利用して求めよ。

【 解答 】 $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$ とおく。

$$f(0)=g(0)=0\ ,\ g'(x)=1(\neq 0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{（①より、ロピタルの定理利用）}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②\\&=1\end{aligned}$$

【 論理性？ 】 $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$：本当か？

確認してみる（差を積に直す公式利用）

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{H \to 0} \left\{ \cos(x+H) \cdot \frac{\sin H}{H} \right\} \qquad \left(H = \frac{h}{2} \right) \\
&= \cos x \qquad \left(\because \lim_{H \to 0} \frac{\sin H}{H} = 1 \right)
\end{aligned}
$$

【 論理性？ 】 $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$：本当か？

確認してみる（加法定理利用）

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \cdot \sin x + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin h}{h} \cdot \cos x - \frac{1 - \cos h}{h} \cdot \sin x \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \left(\cos x - \frac{\sin h}{1 + \cos h} \cdot \sin x \right) \\
&= \cos x \qquad \left(\because \ \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \right)
\end{aligned}
$$

【 論理性？ 】

どちらの証明にも、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使われている。

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を知りたい、が当初の問題。
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を知らないはず。
- $(\sin x)'=?$ のはず。
- ロピタルを利用したくても、$(\sin x)'=?$

【 ロピタル使えない？　】　三角関数を違った方法で定義。

＜方法 **1**＞無限級数

次の2つの無限級数は（収束半径が無限大で）何回でも項別微分や積分が可能である。

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \tag{④}$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \tag{⑤}$$

④ を $\sin x$、⑤ を $\cos x$ と定義。

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= (x)' - \frac{1}{3!}(x^3)' + \cdots + \frac{(-1)^{n}}{(2n-1)!}(x^{2n-1})' + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \\ &= \cos x\end{aligned}$$

【 ロピタル使えない？　】　三角関数を違った方法で定義。

＜方法 **2**＞微分方程式の初期値問題の解

“１階線形連立微分方程式の初期値問題には解が一意に存在”

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = -f(x) \end{cases} , \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

の一意に決まる解 $f(x), g(x)$ を用いて

$$\sin x = f(x) \; , \; \cos x = g(x)$$

と定義すると

$$(\sin x)' = \cos x$$

であることは明らか。

【 注 】 方法 1 の場合、ロピタルを使わなくても

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-2} + \cdots\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

がすぐにわかる。

【 関連興味！】

方法 1、方法 2で定義した $\sin x, \cos x$ について、

一つの角が θ である直角三角形の直角を挟む2辺の長さが $\sin \theta, \cos \theta$ になることを証明するのは面白い問題かも知れない。

【 補足 】　『岩波　数学入門辞典』（2005年9月28日 第1冊）p.666

ロピタルの定理 **de l'Hòpital's theorem**

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ を考えるとき、$\dfrac{\sin x}{x}$ においていきなり $x = 0$ とおくことはできない。

このような不定形の極限値を求めるのに、次の事実を利用することが多い。「$f(x), g(x)$ が $x = a$ の近傍で微分可能で $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0\,(x \neq a)$ を満たしており、かつ $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma$ が存在するならば、$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$ が成り立つ」。これをロピタルの定理という。