第 108 回数学教育実践研究会

気付きにくい勘違い

レポート

平成 31 年 1 月 26 日 (土)
ニッセイＭＫビル

数実研会員　安田富久一

《 解答が間違いとなる問題の状況設定 》

気付きにくい勘違いを一つ紹介する。問題の状況設定によっては解答が間違いとなる例である。高校の学習指導要領の内容からは外れるが、ロピタルの定理を利用する例である。

【 問題 】 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の極限値をロピタルの定理を利用して求めよ。

【 解答 】 $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$ とおく。

$f(0)=g(0)=0$, $g'(x)=1(\neq 0)$ ……… ①

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad \text{(① により、ロピタルの定理が利用できる)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\quad \cdots\cdots ②$$

$$=1$$

【 気付きにくい勘違い 】

上記問題が言う“求めよ”という言葉は、一般に“その値がわからないので論理的に正しく導いて欲しい”と受け取るものであろう。ここではそのように受け止めて本問題を考察する。

この場合、上記解答には間違いが潜むことになる。そのことを示す前に、ロピタルの定理を確認しておこう。

ロピタルの定理

$f(x), g(x)$ は $x=a$ の十分近くで微分可能であり、$f(a)=g(a)=0$ かつ $x\neq a$ で $g'(x)\neq 0$ が満たされているとき、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\gamma$ であれば、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\gamma$$

が成り立つ。

【 間違っていると思うところ 】

② において、$(\sin x)'=\cos x$ としている。ここで、$(\sin x)'$ が $\cos x$ になることをどう導いたか。高校の教科書や大学の解析学のテキストにあるのは、三角関数の加法定理や和・差を積に直す公式を利用する次のような証明である

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{H\to 0}\left\{\cos(x+H)\cdot\frac{\sin H}{H}\right\}\quad \left(H=\frac{h}{2}\ \text{とおいた}\right)$$

$$=\cos x\quad \left(\because\ \lim_{H\to 0}\frac{\sin H}{H}=1\right)\quad \cdots\cdots ③$$

高校の教科書には加法定理を用いて次のような証明もある。

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\sin x+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x-\frac{1-\cos h}{h}\cdot\sin x\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}\cdot\sin x\right) \\
&= \cos x \qquad \left(\because\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\ ,\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{1+\cos h}=0\right) \cdots\cdots\cdots ④
\end{aligned}
$$

上記どちらの証明でも、③, ④ : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を使っている。ところで、今回のロピタルの定理を使う問題では、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ、となっている。ということは、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ に極限値があるのかないのか、あったとしてどんな値になるのか知らない、という状況設定で導こうという立場である、と私は思う。この立場で考えると、② で $f'(x)=\cos x$ とできない、ということになる。

【 結論 】

極限公式 $\frac{\sin x}{x}=1$ を利用して $(\sin x)'=\cos x$ を導く限り、

当初の問題 : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の極限値をロピタルの定理を利用して求めよ、

は出題として適切ではない。

【 適切問題になるためには 】

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の極限値をロピタルの定理を利用して求めることが適切となる場合は、あるのだろうか。次にそれを考えてみた。

(1) 求める問題としてではなく、思い出す方法として紹介するだけなら問題なし

(2) $(\sin x)'=\cos x$ であることが $\frac{\sin x}{x}=1$ を知らなくても証明できる、というスタイルを採る

(1) は簡単な対処であるが、問題としての存在はできなくなっており、単に ひとくちメモ 的なものになってしまっている。

(2) は次のような対処を考えてみたが、高校生にはかなりの発展レベルになってしまう。それは、三角関数の定義を高校の教科書や大学のテキストにあるものと違った方法で定義してはどうか、というものである。

＜方法 1＞

無限級数に関する事実として、次の 2 つの無限級数は（収束半径が無限大で）何回でも項別微分や積分が可能である。

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots \cdots\cdots ④$$

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots \cdots\cdots ⑤$$

④ を $\sin x$、⑤ を $\cos x$ と定義すれば良いのではないか。

項別微分が可能なので、

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= (x)' - \frac{1}{3!}(x^3)' + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}(x^{2n-1})' + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

となり、ロピタルの定理を使う際に、大手を振って $(\sin x)' = \cos x$ を利用できる。

ただこの場合、ロピタルの定理を使わなくても

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-2} + \cdots\right) = 1
$$

と極限値がすぐにわかる。

＜方法 2＞

“1 階線形連立微分方程式の初期値問題には解が存在し、しかも解は唯一つである” ことを利用してみる（証明略）。

1 階線形連立微分方程式

$$
\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = -f(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}
$$

の一意に決まる解 $f(x), g(x)$ を用いて $\sin x = f(x)$, $\cos x = g(x)$ と定義すると $(\sin x)' = \cos x$ であることは明らか。

【注 1】 ロピタルの定理について簡単に調べてみようと思い『岩波　数学入門辞典』（2005 年 9 月 28 日 第 1 冊発行）で調べてみた。666 ページに ロピタルの定理 という項目がある。次のように書いてある

> **ロピタルの定理**
>
> de l'Hòpital's theorem
>
> $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ を考えるとき、$\frac{\sin x}{x}$ においていきなり $x = 0$ とおくことはできない。このような不定形の極限値を求めるのに、次の事実を利用することが多い。
>
> 「$f(x), g(x)$ が $x = a$ の近傍で微分可能で $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0\,(x \neq a)$ を満たしており、かつ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma$ が存在するならば
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$
>
> が成り立つ」。これをロピタルの定理という。

文中 “このような不定形の極限値を求めるのに、次の事実を利用することが多い” と書いてある。“求める” という言葉の理解が私の理解と違うのだろうか？

【注 2】 方法 1、方法 2 で定義した $\sin x, \cos x$ について、一つの角が θ である直角三角形の直角を挟む 2 辺の長さが $\sin x, \cos x$ になることを証明するのは面白い問題かも知れない。