2018年8月4日（土）

変　形　症　候　群

第106回数学教育実践研究会　兼　第23回夏季セミナー

数実研会員　　安田 富久一

《 3 大 欲 求 》

　睡眠欲、食欲、そしてその次は・・・

どうしても変形したくなる『変形欲』！

以前から気になっているマニュアル墨守の悪習慣の1側面ではないだろうか。
『変形しないといけないのか ！』気にかかる

【 実例 】

①

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

① $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

これは当然(?)こうでしょう！

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{3^0-2^0}{3^0+2^0}=0$$

②
$$\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{3x+\sqrt{9x^2+4}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{4}{x}}{3+\sqrt{9+\dfrac{4}{x^2}}}=0$$

②
$$\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{3x+\sqrt{9x^2+4}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{4}{x}}{3+\sqrt{9+\dfrac{4}{x^2}}}=0$$

これは当然(?)こうでしょう！

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{3x+\sqrt{9x^2+4}}=0$$

③ $$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \frac{\pi}{6} x}{x} = \lim_{x \to 2} \frac{\pi}{6} \times \frac{\sin \frac{\pi}{6} x}{\frac{\pi}{6} x} = \frac{\pi}{6}$$

③ $$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \frac{\pi}{6} x}{x} = \lim_{x \to 2} \frac{\pi}{6} \times \frac{\sin \frac{\pi}{6} x}{\frac{\pi}{6} x} = \frac{\pi}{6}$$

これ、間違ってるでしょう！　こうでしょう

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \frac{\pi}{6} x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

④ $(3-2i)(a+bi)=2+i$ を満たす実数 a, b を求めよ。

【 解答 】 $(3-2i)(a+bi)=(3a+2b)+(3b-2a)i$ である。

$3a+2b, 3b-2a$ は共に実数なので $\begin{cases} 3a+2b=2 \\ 3b-2a=1 \end{cases}$

この連立方程式を解くと $a=\dfrac{4}{13}$, $b=\dfrac{7}{13}$

④ $(3-2i)(a+bi)=2+i$ を満たす実数 a, b を求めよ。

【 解答 】 $(3-2i)(a+bi)=(3a+2b)+(3b-2a)i$ である。

$3a+2b, 3b-2a$ は共に実数なので $\begin{cases} 3a+2b=2 \\ 3b-2a=1 \end{cases}$

この連立方程式を解くと $a=\dfrac{4}{13}$, $b=\dfrac{7}{13}$

こっちで答えて欲しいなあ！

【 解答 】

$$a+bi=\frac{2+i}{3-2i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{13}=\frac{4+7i}{13}$$

a, b は共に実数なので、$a=\dfrac{4}{13}$, $b=\dfrac{7}{13}$

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-k}{x-1}$ が有限な値になるような定数 k の値を定めよ。

【 解答 】

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-k}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+3-k^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+k)} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$x+3-k^2$ が $x-1$ で約分できればこの極限値は有限な値になる。

$$\therefore \quad 3-k^2=-1$$

これから、$k^2=4$ つまり、$k=\pm2$ であることがわかる。

(i) $k=-2$ のとき

①の右辺

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}-2}$$: 発散

なので、不適。

(ii) $\boldsymbol{k=2}$ のとき

①の右辺

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

より、題意を満たす。

以上より、$\boldsymbol{k=2}$ 。

十分性、必要性、共に微妙に心配。

そもそも、変形しないといけないのか？

素直（自然）に考えたらどう！

分数なんやから、分母・分子が何に近づくか先ず考えるやろ！

【 解答 】

$x \to 1$ のとき、

$$\text{分母} = x - 1 \to 0 \ ,$$

$$\text{分子} = \sqrt{x+3} - k \to 2 - k$$

なので、$2 - k \neq 0$ であれば極限が有限な値にならない。

よって、$k = 2$ であることが必要である。

逆に、$k = 2$ のとき、

$$\text{①の右辺} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

で、極限は有限で題意を満たす。

よって、求める k の値は $k = 2$ 。

⑥ 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

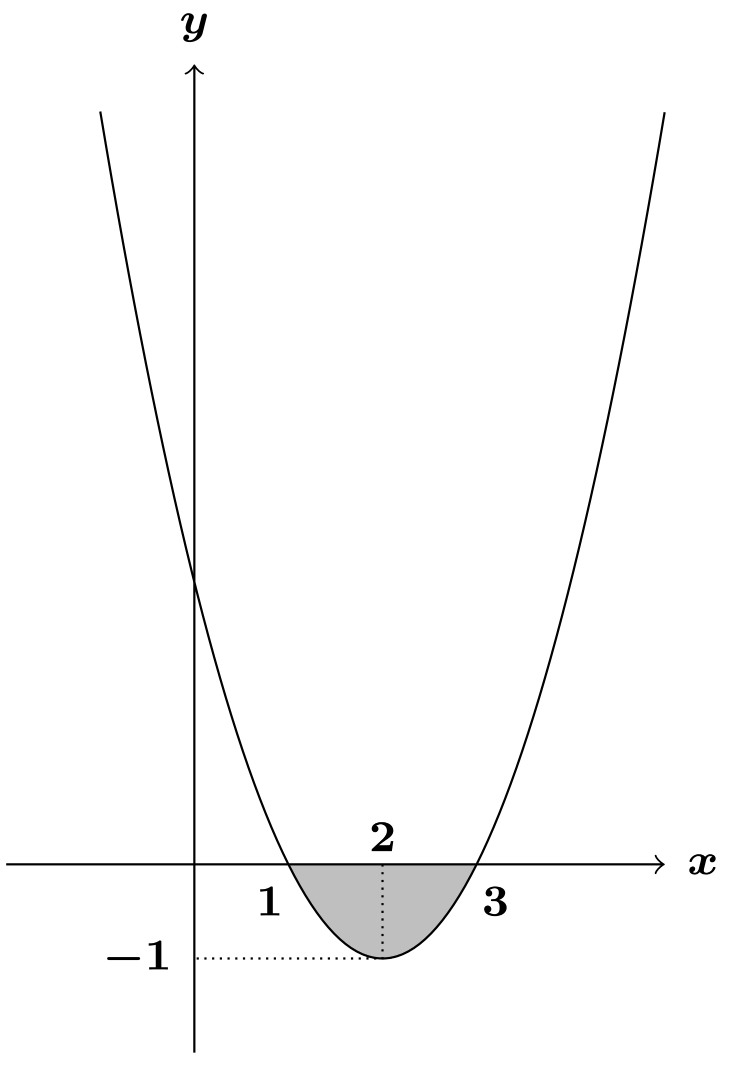
【 解答 】　x 軸との交点の x 座標は、

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$\therefore \quad x = 1, 3$$

また、$y = (x-2)^2 - 1$ なので、

グラフは右図のようになる。



よって、求める面積は

$$-\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3}$$

⑥ 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【 解答 】 x 軸との交点の x 座標は、

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$\therefore \quad x = 1, 3$$

また、$y = (x-2)^2 - 1$ なので、

グラフは右図のようになる。

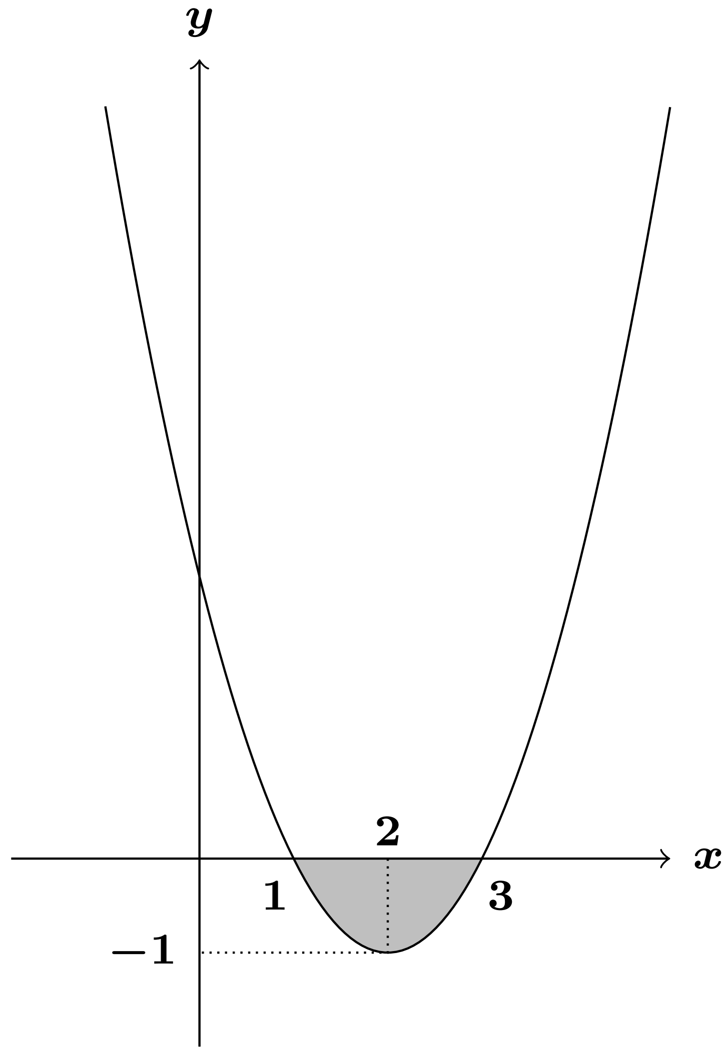
よって、求める面積は

$$-\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3}$$

頂点は大切？



⑥ 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

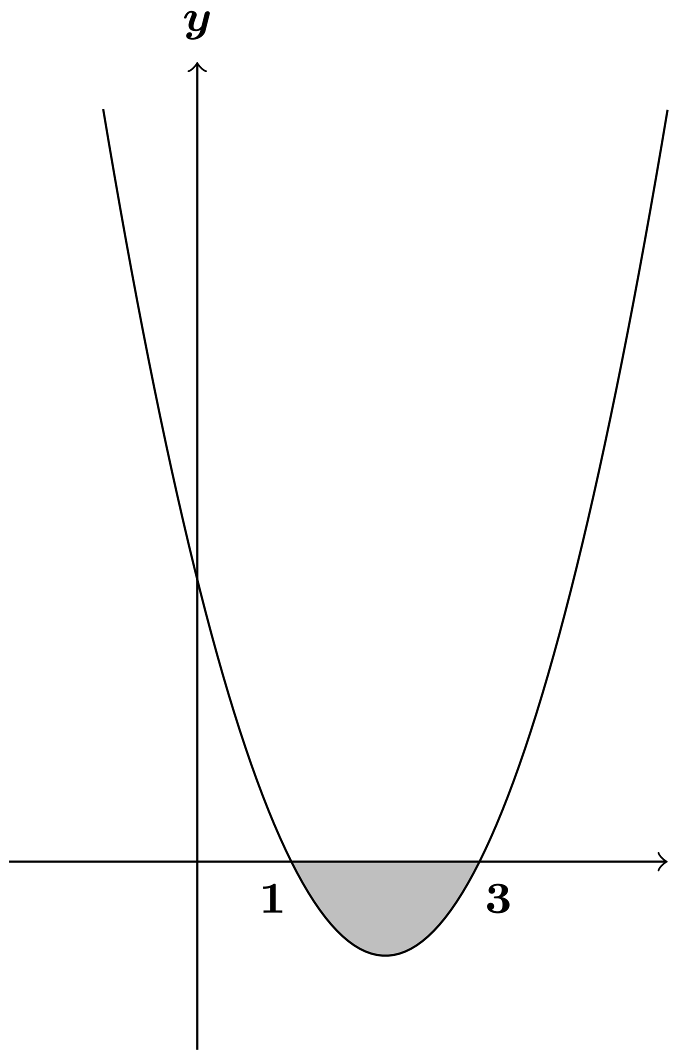
【 解答 】

x 軸との交点の x 座標は、

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$\therefore \quad x = 1, 3$$

であり、グラフは下に凸な放物線であり、右図のようになる。



よって、求める面積は

$$-\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3}$$