第 106 回数学教育実践研究会

兼

第 23 回夏季セミナー

変 形 症 候 群

レポート

平成 30 年 8 月 4 日 (土)

北海道小樽桜陽高等学校

数実研会員　安田富久一

《 3 大 欲 求 》

睡眠欲、食欲、そしてその次は・・・

どうしても変形したくなる『変形欲』！

以前から気になっているマニュアル墨守の悪習慣の 1 側面ではないだろうか。
『変形しないといけないのか ！』気にかかる

【 実例 】

(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

これは当然 (?) こうでしょう！

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{3^0-2^0}{3^0+2^0}=0$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2+4})=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{3x+\sqrt{9x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{4}{x}}{3+\sqrt{9+\dfrac{4}{x^2}}}=0$$

これは当然 (?) こうでしょう！

$$\lim_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2+4})=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{3x+\sqrt{9x^2+4}}=0$$

(3) $$\lim_{x\to2}\frac{\sin\dfrac{\pi}{6}x}{x}=\lim_{x\to2}\frac{\pi}{6}\times\frac{\sin\dfrac{\pi}{6}x}{\dfrac{\pi}{6}x}=\frac{\pi}{6}$$

これ、間違ってるでしょう！　こうでしょう

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\dfrac{\pi}{6}x}{x}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(4) $(3-2i)(a+bi)=2+i$ を満たす実数 a, b を求めよ。

【 解答 】 $(3-2i)(a+bi)=(3a+2b)+(3b-2a)i$ である。

$3a+2b, 3b-2a$ は共に実数なので $\begin{cases}3a+2b=2\\3b-2a=1\end{cases}$

この連立方程式を解くと $a=\dfrac{4}{13}$, $b=\dfrac{7}{13}$

こっちで答えて欲しいなあ！

【 解答 】

$$a+bi=\frac{2+i}{3-2i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{13}=\frac{4+7i}{13}$$

a, b は共に実数なので、$a=\dfrac{4}{13}$, $b=\dfrac{7}{13}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-k}{x-1}$ が有限な値になるような定数 k の値を定めよ。

【 解答 】

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-k}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+3-k^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+k)}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

$x+3-k^2$ が $x-1$ で約分できればこの極限値は有限な値になる。

$\therefore \quad 3-k^2=-1$

これから、$k^2=4$ つまり、$k=\pm 2$ であることがわかる。

(i) $k=-2$ のとき

$$①\text{の右辺} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}-2} \text{：発散}$$

なので、不適。

(ii) $k=2$ のとき

$$①\text{の右辺} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

より、題意を満たす。

以上より、$k=2$ 。

十分性、必要性、共に微妙に心配。

そもそも、変形しないといけないのか？

素直（自然）に考えたらどう！

分数なんやから、分母・分子が何に近づくか先ず考えるやろ！

【 解答 】

$x \to 1$ のとき、分母 $= x-1 \to 0$ ，分子 $= \sqrt{x+3}-k \to 2-k$ なので、$2-k \neq 0$ であれば極限が有限な値にならない。よって、$k=2$ であることが必要である。

逆に、$k=2$ のとき、

$$①\text{の右辺} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

で、極限は有限で題意を満たす。よって、求める k の値は $k=2$ 。

(6) 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【 解答 】

x 軸との交点の x 座標は、

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$\therefore \quad x = 1, 3$

また、

$$y = (x-2)^2 - 1$$

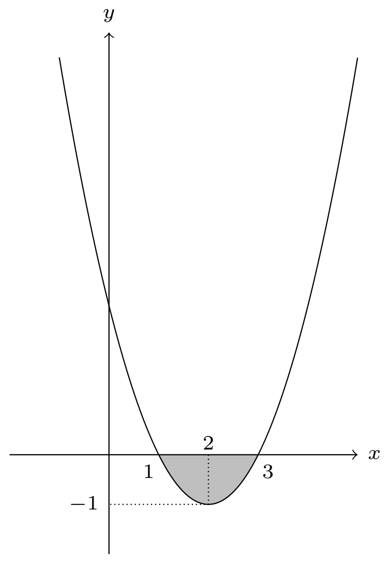
なので、グラフは右図のようになる。

よって、求める面積は

$$-\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3}$$



何のために頂点の座標まで調べたんだ？

【 解答 】

x 軸との交点の x 座標は、

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$\therefore \quad x = 1, 3$

であり、グラフは下に凸な放物線であり、右図のようになる。

よって、求める面積は

$$-\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3}$$