北数教“第 104 回数学教育実践研究会”

勝手に置いてええんか？
腕白でもいい、逞しく育って欲しい！

レポート

平成 30 年 1 月 27 日 (土)
ニッセイＭＫビル

千歳科学技術大学　安田富久一

1　勝手に置いてもええんか？

数学で、ある式または式の一部を文字や文字式に置き換えて、元の式を見やすい形の式や解き方が既知の式に変形することがよくある。しかし、うっかりすると失敗する。

【 問題 】　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$ を求めよ。

【 失敗例 】

授業で次のことを勉強した。

- $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ ……………………………… ①

  は $x = a\cos t$ や $x = a\sin t$ の置換でルートがはずれ、簡単な三角関数の積分に変わる。

- 三角関数の不定積分で $\tan\dfrac{x}{2} = t$ の置換をすると

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}\ ,\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

  なので、t の有理式（整式や分数式）に変えられる。

そこで、次のような解答を思いついた。

【 解答 】

$x = \cos t$ と置換する。$dx = -\sin t dt$ なので、

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{-\sin t}{\cos^2 t - 1}dt = \int \frac{1}{\sin t}dt$$

ここで、$\tan\dfrac{t}{2} = u$ と置換すると、$\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $dt = \dfrac{2}{1+u^2}du$ なので、

$$\int \frac{1}{\sin t}dt = \int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

$$\log\left|\tan\frac{t}{2}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\tan^2\frac{t}{2}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

$$\therefore\quad \int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \quad\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

【 論述ミス：勝手に置いてもええんか ？ 】

この解法のミスは、$x = \cos t$ と置けるのか、がポイントになっている。$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ なので $x < -1$ や $x > 1$ である x に対しては $x = \cos t$ とは置けないはずだ。

ということで、上記答は $-1 < x < 1$ においてのみ成り立つことしかわからない。

【 では①は嘘 ？　ご心配なく、ちゃんと・・・ 】

① では、暗黙の了解で定義域はルート内が 0 以上となる x なので、$-|a| \leqq x \leqq |a|$ が定義域になる。$a\cos t$ や $a\sin t$ の値域と一致するため、$x = a\cos t$ や $x = a\sin t$ と置けるのであった。

強引に勝手に

『$x = a\cos t$ や $x = a\sin t$ と（俺は）置く（ぞ）』

と言ってるわけではなく、

『(置ける or 置く不都合さはないので）$x = a\cos t$ や $x = a\sin t$ と（私は）置く』

というのが言外にあり、教科書の例題などにあるように、① の置換積分は大丈夫。

2　腕白でもいい、逞しく育って欲しい！

上記解答を生徒が持ってきたら、

『 $-1 < x < 1$ の時のことしか言えてへん。残念、あかんわ。』 ………？

この間違い、失敗を失敗で終わらすのではなく、失敗の中から成功を見つける眼を養う教材に使える気がする。

【 上記解答の努力を活かそう 】

上記で得た答：$\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ は $x < -1$ または $-1 < x < 1$ または $1 < x$ の範囲において微分可能な関数である。微分してみると、

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right\}' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x^2-1}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \int\frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

そこで、次のように生徒には伝えたい

- ええ式見つけたなあ!
- 答えになりそうな式見つけて、
  ほんまにそれが答えになる、と証明し
  答えを得る。
- 科学では大切な問題解決方法の一つや。

四角四面の論理性というお行儀の良さに縛られてしまって、お利口さんの解決方法しか身についてないのは如何なものなんだろう。

この問題、部分分数分解で簡単に解ける。しかし、授業時間に余裕があれば、

- 失敗解答を無理に見せ、
- 失敗に気付かせた後、
- 失敗の中にある成功に目を向ける姿勢を身につけさせ
- 失敗を恐れず道を切り拓く気持ちを養いたい

という目的の教材に使えるのではないか。

腕白でもいい、逞しく育って欲しい。