北数教“第 103 回数学教育実践研究会”

逆関数の交点（学生の質問で考えたこと）

レポート

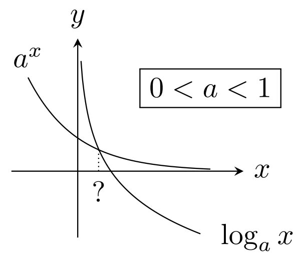
平成 29 年 11 月 25 日 (土)
アスティ 45

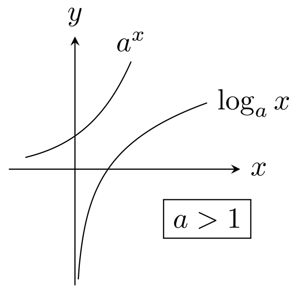
千歳科学技術大学　安田富久一

【 動機 】

今年の春頃、講義で対数関数と指数関数のグラフは、互いに逆関数であり、両者は直線 $y=x$ に関して対称なグラフになることに触れたことがあった。講義後に、“$y=a^x$ とその逆関数である $y=\log_a x$ が交わっている点の x 座標はどんな点になるか知りたい” という質問を受けた。

本レポートはこの質問に対しての私なりの解答を紹介する。





右図は、$0<a<1$ のときと $a>1$ のときのグラフの様子である。$a>1$ のときは、見る限りグラフは交わらなさそうなので、次のような課題設定をしてみた。

【 課題設定 】

(1) $a=\dfrac{1}{2}$ の場合にどうなるか考える。

(2) $0<a<1$ である a について同様の議論が可能か考える。

(3) $1<a$ の場合はどうか考える。

この設定で遊んでみて、現在得ている結果は次の通り。

【 現在得ている結果 】

(1) 漸化式 $\begin{cases} a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n} \\ a_1=1 \end{cases}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値が、方程式 $\log_{\frac{1}{2}} x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の解になる。

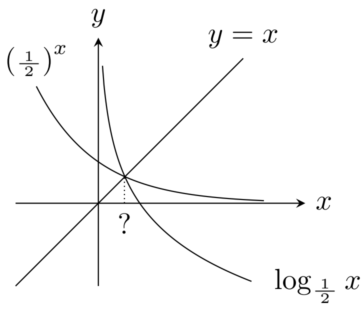
(2) $\frac{1}{e}<a<1$ であれば (1) と同様の議論で、漸化式の極限として方程式 $\log_a x=a^x$ の解になることが簡単にわかる。

(3) $e^{\frac{1}{e}}<a$ である a については、$y=a^x$ と $y=\log_a x$ は共有点を持たず、$a=e^{\frac{1}{e}}$ なら一点で接し、$1<a<e^{\frac{1}{e}}$ なら一点で交わる。

以下、この結果について見ていく。

【 課題 (1) 】方程式 $\log_{\frac{1}{2}} x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の解を求めよ。

両グラフは直線 $y=x$ に関して対称であるから、交点は $y=x$ の上に乗っているであろう。一応確認してみよう。



$y=x$ は狭義単調増加であり、$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} y=\infty$ である。また、$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は狭義単調減少なので、中間値の定理より、両グラフの共有点は存在し、しかも唯一つである。方程式 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は唯一つの解を持つ。その解を $x=\alpha$ とすると、

$$\alpha=\left(\tfrac{1}{2}\right)^\alpha \quad \cdots\cdots ①$$
$$\therefore\quad \log_{\frac{1}{2}}\alpha=\alpha \quad (\because ①) \quad \cdots\cdots ②$$
$$\therefore\quad \log_{\frac{1}{2}}\alpha=\left(\tfrac{1}{2}\right)^\alpha \quad (\because ①,②)$$

であるから、α は 方程式 $\log_{\frac{1}{2}} x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の解である。

よって、方程式 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の解を求めれば、課題 (1) が解決する。この方程式の解は、漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n} & \cdots\cdots ③ \\ a_1=1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値であることを以下に見ていこう。まず、α と a_n について、その値の範囲を絞っておこう。

$f(x)=x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ とおくと、$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$, $f(1)=1-\frac{1}{2}>0$ であるから、方程式 $f(x)=0$ の唯一解である α について、

$$\frac{1}{2}<\alpha<1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

であることがわかる。

次に、任意の自然数 n について、$\frac{1}{2}\leqq a_n\leqq 1$ であることが数学的帰納法によりわかる。何故なら、$n=1$ のときは④より明らかであり、$\frac{1}{2}\leqq a_n\leqq 1$ とすると、③より $\frac{1}{2}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqq 1$ であるから。つまり、

$$\frac{1}{2}\leqq a_n\leqq 1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

であることがわかる。

$(\frac{1}{2})^x$ に関して平均値の定理を利用すると、α と a_n の間の数 c_n が存在して

$$a_{n+1}-\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=-\frac{\log 2}{2^{c_n}}(a_n-\alpha) \quad \left(\because\ \left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^x\right\}'=-(\log 2)\left(\tfrac{1}{2}\right)^x\right)$$

c_n は α と a_n の間の数だから、よって、

⑤, ⑥より $\frac{1}{2}\leqq c_n\leqq 1$ である。

$$\sqrt{2}\leqq 2^{c_n}\quad,\quad 0<\log 2<1$$

$$\therefore\quad |a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}|a_n-\alpha|$$

$$\therefore\quad |a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}|a_1-\alpha|=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}|1-\alpha|$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha \quad \left(\because\ \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}|1-\alpha|=0\right)$$

このことから、$x=(\frac{1}{2})^x$ の解 α つまり、$\log_{\frac{1}{2}}x=(\frac{1}{2})^x$ の解 α は、数列 $\{a_n\}$ の極限として得られる。

$a_1, a_2, \cdots, a_{20}$ を数式処理ソフト Maxima16.04.2 で単純に（誤差の発生を気にせず）数値計算させてみた結果、右の表を得た。

n	a_n
1	1
2	0.5
3	0.7071067811865475
4	0.6125473265360659
5	0.6540408600420695
6	0.6354978458133738
7	0.6437186417228692
8	0.6400610211772396
9	0.6416858070429984
10	0.6409635371779632
11	0.6412845090665851
12	0.6411418514717377
13	0.6412052524498624
14	0.6411770745288387
15	0.6411895977668723
16	0.6411840319786225
17	0.6411865056139605
18	0.6411854062407778
19	0.6411858948418261
20	0.6411856776898719

表から $\alpha=0.64118\cdots$ だろうと思える。

試しに $(\frac{1}{2})^{0.64118}$ を計算させてみると、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.64118}=0.6411882975754097$$

と出た。$\alpha=0.64118\cdots$ は多分間違いなさそうだ。

次に、$0<a<1$ である任意の a について同じ議論が展開できるかを考えてみたい。

【 課題 (2) 】 $0<a<1$ なら同様に議論成立？

まず、方程式 $\log_a x=a^x$ が唯一の解を持つことについては、課題 (1) と全く同様の議論が成立することは明らか。また、その解を β とすると β は方程式 $x=a^x$ の唯一の解であり、$a<\beta<1$ を満たすことも同様の議論で明らか。数列 $\{b_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases} b_{n+1}=a^{b_n} & \cdots\cdots ⑦ \\ b_1=1 & \cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

により定義すると、数学的帰納法により $a \leqq b_n \leqq 1$ が任意の自然数 n について成り立つこともわかる。ここで、平均値の定理から、a と b_n の間の数 c_n が存在して

$$b_{n+1} - \beta = a^{b_n} - a^{\beta} = a^{c_n} \log a (b_n - \beta)$$

$$|b_{n+1} - \beta| \leqq -a^a \log a \, |b_n - \beta| \quad (\because a \leqq c_n) \quad \cdots\cdots ⑨$$

ここで、$0 < x \leqq 1$ のとき、$-\frac{1}{e} < x \log x \leqq 0$ であることを示そう。

$y = x \log x$ とおく。

$$y' = \log x + 1$$

$y' = 0$ となる x は $x = \frac{1}{e}$ 。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

増減表は右のようになる。また、$0 < x < 1$ のとき、明らかに $x \log x < 0$ なので、

$$-\frac{1}{e} < x \log x \leqq 0 \quad \cdots\cdots ⑩$$

よって示された。

⑨, ⑩, $0 < a \leqq c_n \leqq 1$ より、

$$|b_{n+1} - \beta| < \frac{a^{a-1}}{e} |b_n - \beta| < \frac{1}{ae} |b_n - \beta|$$

$$\therefore \quad |b_n - \beta| < \left(\frac{1}{ae}\right)^{n-1} |b_1 - \beta|$$

が得られる。よって、$\dfrac{1}{ae} < 1$ つまり、$\dfrac{1}{e} < a < 1$ であれば (1) と同様の議論が成立する。

【 課題 (3) 】 $y = x$ が $y = a^x$ と接するのは a がどんな値の時か求めてみよう。接点の x 座標を $x = p$ とすると、

$$a^p = p \,, \ a^p \log a = 1$$

が同時に成り立つ。よって、$p \log a = 1$ が得られ、$a^p = e \,, p = e$ であることがわかる。そして、このことから $a^e = e$ となり $a = e^{\frac{1}{e}}$ となる。

$y = a^x$ $(a > 1)$ のグラフを考えれば、$a < e^{\frac{1}{e}}$ なら $y = x$ と $y = a^x$ は 1 点で交わり、$a = e^{\frac{1}{e}}$ なら $y = x$ と $y = a^x$ は 1 点で接し、$a > e^{\frac{1}{e}}$ なら $y = x$ と $y = a^x$ は共有点を持たない。

【 補足 1 】

今回の $a^x = \log_a x$ の交点について、漸化式 ⑦, ⑧ の極限として求められた。この漸化式で決まる数列 $\{b_n\}$ の最初の数項を書き並べてみると、$a, a^a, a^{a^a}, \cdots$ となる。つまり、解は

$$x = a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \quad \cdots\cdots ⑪$$

である。

【 補足 2 】

補足 1 を書いていて、数学セミナーリーディングス『数学の問題ーエレガントな解答を求む』という本で、⑪ に似たものがあったのを思いだした。探すと、その本の第 1 集（第 3 集まであったと記憶）の 20 ページに、112 番の問題として、

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

の値を求めて下さい、というのがある。この答えは何と見事に次の値になる。

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$$