北数教“第 103 回数学教育実践研究会”

e の近似値を求める（紹介）

レポート

平成 29 年 11 月 25 日 (土)
アスティ 45 ビル

千歳科学技術大学　安田富久一

本研究会第 102 回で e の値を求めるレポートを発表した。その後、『高校数学と大学数学の接点』佐久間一浩（著）・日本評論社、に前回紹介したものより簡単で、しかもよりよい評価が得られる方法が書かれていたので紹介したい。

【 問題 】

$e = 2.718\cdots$ であることを示せ。

【 当該書に書かれていた方法を使って示す 】

$$e = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\therefore \quad 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} < e = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \cdots\cdots ①$$

また、

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{m!}\left\{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+2)(m+1)} + \frac{1}{(m+3)(m+2)(m+1)} + \cdots\right\} \\ &< \frac{1}{m!}\left\{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+2)(m+1)} + \frac{1}{(m+3)(m+2)(m+1)} + \cdots\right\} \\ &< \frac{1}{m!}\left\{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^3} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{m!} \cdot \frac{\dfrac{1}{m+1}}{1 - \dfrac{1}{m+1}} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m!} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} < e < 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m!} \qquad (\because ①, ②) \quad \cdots\cdots ③$$

③ において、$m = 6$ とすると

$$1 + \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k!} = \frac{1957}{720} = 2.7180\cdots \quad \cdots\cdots ④$$

であり、

$$1 + \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k!} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6!} = \frac{1}{4320} = 2.7182\cdots \quad \cdots\cdots ⑤$$

③, ④, ⑤ より $2.7180\cdots < e < 2.7182\cdots$ なので、$e = 2.718\cdots$ であることがわかる。

【 **第 102 回で紹介した方法：概略再掲** 】

$$e = 1 + \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{7!} \quad \cdots\cdots ⑥$$

となる ξ が $0 < \xi < 1$ として存在する。

$$\therefore \ e < 1 + \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k!} + \frac{e}{7!}$$

$$\therefore \quad e < \frac{7!}{7! - 1}\left(1 + \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k!}\right) = \frac{13699}{5039} = 2.7185\cdots \quad \cdots\cdots ⑦$$

④, ⑦ より $2.7180\cdots < e < 2.7185\cdots$ なので、$e = 2.718\cdots$ である。

⑤, ⑦で得た e の上からの評価を見ると、第 102 回での私の方法よりも良いことがわかる。