北数教“第 102 回数学教育実践研究会”

e の値を求める

レポート

平成 29 年 8 月 5 日 (土)
北 海 道 小 樽 桜 陽 高 等 学 校

千歳科学技術大学　安田富久一

高校の数Ⅲの教科書に $e = 2.718\cdots$ が書かれている。それを求めさせたらどうなるか考えてみた。高校の学習指導要領圏外ではあるが、高校の発展学習から大学教養程度の知識（テイラー展開）で可能であり、手計算または電卓レベルの機材で十分達成できるので紹介する。

【 問題 】

$e = 2.718\cdots$ であることを示せ。

【 解答 】　テイラー展開を考える。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{e^\xi}{7!}x^7 \quad \cdots\cdots ①$$

となる ξ が $0 < \xi < x$ に存在することになる。①で $x = 1$ とすると、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{e^\xi}{7!} \quad \cdots\cdots ②$$

となる ξ が $0 < \xi < 1$ として存在する。②より、明らかに

$$\begin{aligned} e &> 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \\ &= \frac{2 \times 6! + 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 6 \times 5 \times 4 + 6 \times 5 + 6 + 1}{6!} \\ &= \frac{1957}{720} = 2.7180\cdots \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

である。次に、$0 < \xi < 1$ より $e^\xi < e$ であるから、②より次の不等式が得られる

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{e}{7!}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad e &< \frac{7!}{7! - 1}\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) \\ &= \frac{7! \times (2 \times 6! + 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 6 \times 5 \times 4 + 6 \times 5 + 6 + 1)}{7! - 1} \\ &= \frac{13699}{5039} = 2.7185\cdots \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

③, ④ より $2.7180\cdots < e < 2.7185\cdots$ なので、$e = 2.718\cdots$ が示された。　　（証明終わり）

今の証明と同様にして、次の命題が成り立つことがわかる。

【 命題 】　$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \frac{(n+1)!}{(n+1)! - 1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

【 注 】

ちなみに、教科書に書かれている e の定義式：$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で、$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は単調増加して e に収束する。そこで、$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が 2.718 を越える n を調べると、$n = 4822$ に到って漸くである。Maxima に単純に数値計算させてみると

$n = 4821$ のとき 2.717999961097746

$n = 4822$ のとき 2.718000019542346

である。また、$2.7182\cdots$ と 1 桁精度を上げるためには、テイラー展開の方法であれば、ベキを 1 つ増やして $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$ までとればよいが、$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ だと、$n = 16609$ に到って漸く 2.71852 を越える。