北数教“第 102 回数学教育実践研究会”

素数分母の循環節の話題

レポート

平成 29 年 8 月 5 日 (土)
北 海 道 小 樽 桜 陽 高 等 学 校

千歳科学技術大学　安田富久一

【　分母が素数の循環節の不思議　】

約 30 年前に中国で買ってきた本の中に書かれていた話題を紹介する。

『無限の中の有限』極限物語 数学故事叢書第 4 巻　上海科学普及出版社

がその本であり、第 11 章「“トンボの尻尾咬み”から“両頭蛇数”まで」というタイトルの読み物中にあった話しを 2 つ紹介する。

どちらの話題も分数を小数で表したときにできる循環小数の循環節に関する話題である（書かれている記号や表現は自分がわかりやすいものに変えた）

【　**話題 1**　】

$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ の循環節を a とおく。この 6 桁の数 $a = 142857$ は面白い性質がある。

右端の数 7 を左端に移動させて新しい 6 桁の数 714285 を作ると、元の数 a の倍数になっている。実際、$714285 = 5a$ である。この操作を続けていくと、

$$714285 = 5a \quad \text{つまり} \quad 0.\dot{7}1428\dot{5} = \frac{5}{7}$$

$$571428 = 4a \quad \text{つまり} \quad 0.\dot{5}7142\dot{8} = \frac{4}{7}$$

$$857142 = 6a \quad \text{つまり} \quad 0.\dot{8}5714\dot{2} = \frac{6}{7}$$

$$285714 = 2a \quad \text{つまり} \quad 0.\dot{2}8571\dot{4} = \frac{2}{7}$$

$$428571 = 3a \quad \text{つまり} \quad 0.\dot{4}2857\dot{1} = \frac{3}{7}$$

となる。

【　**話題 2**　】

分数 $\dfrac{1}{p}$ について、p は素数であり、しかも $\dfrac{1}{p}$ の小数表示における循環節の長さは偶数であるとする。

この循環節の長さを $2s$ とし、$\dfrac{1}{p} = 0.\dot{a_1}\cdots a_s a_{s+1}\cdots \dot{a_{2s}}$ とすると、循環節をちょうど真ん中で分けて、項数 s の数字列を 2 つ $a_1 \cdots a_s$ と $a_{s+1} \cdots a_{2s}$ を作ると、それを 2 段に並べてそれぞれ対応する数字をたすとすべて 9 となる。

＜例＞

話題 1 の $\dfrac{1}{7}$ は循環節の長さが 6 で偶数なので、話題 2 を確認してみよう。

$\dfrac{1}{7}$ の循環節は 142857 。これを真中で 2 つに分けて 2 つの数字列 142 と 857 が得られる。

$$\begin{array}{r} 142 \\ +\,857 \\ \hline 999 \end{array}$$

確かに 999 になっている。

分母が素数で循環節の長さが偶数である分数をあと 3 つ示すと、

$$\frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3} \qquad \begin{array}{r} 076 \\ +\,923 \\ \hline 999 \end{array}$$

$$\frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7} \qquad \begin{array}{r} 05882352 \\ +\,94117647 \\ \hline 99999999 \end{array}$$

$$\frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1} \qquad \begin{array}{r} 052631578 \\ +\,947368421 \\ \hline 999999999 \end{array}$$

がある。話題 2 には次のような証明が付けられている
(“何故かを説明するのは全然難しくない” と本には書いてある!!)。

【 **話題 2** の証明 】

p を素数、$\dfrac{n}{p}$ の循環節の長さが $2s$ とする。循環節を 2 つに分けた前の部分を A、後の部分を B とする。

$$\begin{aligned}\frac{n}{p} &= 0.ABABAB\cdots \\ &= \frac{\dfrac{A}{10^s} + \dfrac{B}{10^{2s}}}{1 - \dfrac{1}{10^{2s}}} \\ &= \frac{A \cdot 10^s + B}{(10^s - 1)(10^s + 1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}\end{aligned}$$

$10^s - 1$ が p で割り切れないのは明らかである、何故なら、もしそうでないとすると、$10^s - 1 = kp$ と表せ、

$$\frac{n}{p} = \frac{kn}{10^s - 1} = \frac{kn}{10^s}\left(1 + \frac{1}{10^s} + + \frac{1}{10^{2s}} + \cdots\right)$$

となるから、循環節の長さが s 以下となってしまい、最初の仮定に矛盾してしまうからである。

p が $10^s - 1$ を割り切らないことと ① から、p は $10^s + 1$ を割り切る。

$$\therefore \quad \frac{n}{p} \cdot (10^s + 1) = \frac{A(10^s - 1) + A + B}{10^s - 1} = A + \frac{A + B}{10^s - 1}$$

この左辺は整数なので右辺も整数となる。そして、A, B はともに $10^s - 1$ 以下であるから、

$$A + B = 10^s - 1 = \underbrace{99\cdots9}_{s\text{ 個}}$$

となり、証明された。（証明終わり）