北数教“第 101 回数学教育実践研究会”

盛りつけで味を添える教材の工夫

レポート

平成 29 年 6 月 3 日 (土)

北海道大学　情報教育館３Ｆ
スタジオ型多目的中講義室

千歳科学技術大学　安田富久一

1　はじめに

複数の設問提示により、単独発問とは違う効果を期待して作った問題。

2　10 回ゲーム

ピザ、ピザ、・・・、ピザと１０回声に出して言った後に、質問を出す遊びがある。このゲームの効果と同じような味を持つ問題（と思う）。

【 問題 1 】　次の各問いの三角関数の和を合成せよ。

$$①\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta \qquad ②-\sin\theta+\cos\theta \qquad ③-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta \qquad ④\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$$

【 問題 2 】　曲線 $C: y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\ (\,0\leqq x\leqq 1\,)$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。

(2) 曲線 C の長さは 1 より大か小か答えよ。

【 問題 3 】　次の各問いの極限値を求めよ。

$$① \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+1}}{x+2} \qquad ② \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} \qquad ③ \lim_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-4})$$

$$④ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \qquad ⑤ \lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}} \qquad ⑥ \lim_{x\to\infty}\{\log_2(6x+1)-\log_2(24x-1)\}$$

＜上記問題についてのコメント＞

【 問題 1 について 】

③, ④は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の項をどちらを先に書いたかが違うだけである。合成の練習問題として、８問ほど提示する中で、かつては、③は出していなかった。④を $2\sin(\theta+\frac{5}{3}\pi)$ と答える学生が何人かいた。その学生らは、$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の合成のマニュアルとして、$\sin\theta$ の係数が a という意識ではなく、一番左に書いてある数が a という意識のようだ。その誤解を気付かせるためにあえて用意したのが、同じ答えになるはずの③である。

【 問題 2 について 】

$$① \int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2}dx=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2e}$$

$$② \frac{e^2-1}{2e}=1.175\cdots>1$$

と解答するのを想定している。

但し、②は曲線の長さが実際にいくらか知らなくてもよい。$0\leqq x\leqq 1$ で定義された曲線なので、最短でも 1 の長さになる。②は①の計算不要で答えがわかる。隠された素敵な情報に気付く能力も大切な能力だと思っている。そういった能力を開発するためには、①を出さずに②だけを単独で出すよりも、両方をセットで出す方が良いかと思う。

【 問題 3 について 】

極限の計算問題で、不定形：$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$ は不定形を解消した後で極限値を求める、という練習をしていくと、不定形ではないのにわざわざ変形して計算する学生が出てくる。

⑤は多くの学生が次のように解答する。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}=0\quad\left(\because 0<\frac{2}{3}<1\right)$$

“$0<a<1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=0$” というを、ムード的に覚えているためだろうと思う。

3　その他

【 問題 4 】

右の枠内に A 君の数学問題の解答がある。A 君の解答について、以下の問いに答えよ。

(1) 嘘をついている箇所があれば指摘せよ。

(2) A 君の解答について意見を述べよ。

【問題】

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ ……………………… ①

となる x を求めよ。

＜解答＞

①が成り立つには、$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ であればよい。つまり、$x=\frac{\pi}{2}$。

【 問題 5 】

(1) $\sin x+\sin y=2$ を満たす x,y を求めよ。但し、$0\leqq x<2\pi$, $0\leqq y<2\pi$ とする。

(2) n を自然数とする。このとき、

$$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=n$$

を満たす $x_1,x_2,\cdots,x_n$ を求めよ。但し、$0\leqq x_i<2\pi$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とする。

＜上記問題についてのコメント＞

【 問題 4 について 】

“・・・であればよい” という表現が曖昧で、十分条件だと言っているのか、必要十分だと言っているのかどちらとも取れそうで好きではない。この言葉をなるべく使わないようにさせたい。このような問題を学生に答えさせたいと思っている。

【 問題 5 について 】

普通はこのような出し方をするのは、(1) が (2) のヒントにしたいときだろうが、これは逆に (2) が (1) のヒントになるかも知れないと思っている。