2017年6月3日（土）

（多項式版）フェルマーの大定理の証明
ABC 定理の紹介

第101回数学教育実践研究会

千歳科学技術大学　　安田 富久一

【 フェルマーの大定理（最終定理） 】

n を3以上の整数とする。このとき、

$$a^n + b^n = c^n$$

を満たす正の整数は存在しない。

【 （多項式版）フェルマーの定理 】

n を3以上の整数とする。このとき、

$$X^n + Y^n = Z^n$$

を満たす多項式 X, Y, Z で、全てが定数ではなく、どの2つも互いに素なものは存在しない。

共立出版社創立９０周年記念出版　数学講座　数学探検　第６巻
山崎隆雄　著　『初等整数論』数論幾何への誘い
第2章 ABC 定理 及びそれに関する内容の紹介

【 **ABC定理** 】

$\boldsymbol{A, B, C}$ は実数係数の多項式で、どの2つも互いに素であり、しかも全てが定数ではないとする。

このとき、$\boldsymbol{A + B = C}$ なら

$$\boldsymbol{\max\{\deg A, \deg B, \deg C\} < \deg \mathrm{rad}(ABC)}$$

が成り立つ。

【 記号 】

- $\boldsymbol{\deg A}$：多項式 $\boldsymbol{A}$ の次数を示す。
  ＜例＞$\boldsymbol{A = 2x^3 - 3x + 1}$ なら、$\boldsymbol{degA = 3}$
- $\mathbf{radA}$：$\boldsymbol{A}$ の素因子全ての積を示す。
  ＜例＞$\boldsymbol{A = x^3 - 3x^2 + 4}$ のとき、$\boldsymbol{A = (x+1)(x-2)^2}$ なので、
  $\boldsymbol{\mathrm{rad}A = (x+1)(x-2)}$
  $\boldsymbol{B = x^5 - 2x^3 + x}$ のとき、$\boldsymbol{B = x(x+1)^2(x-1)^2}$ なので、
  $\boldsymbol{\mathrm{rad}B = x(x+1)(x-1)}$

【 定理 $\mathbf{1}$ 】

自然数 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ が $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}} \leqq \mathbf{1}$ を満たすとき、

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{r}}$$

を満たす多項式 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ で、全てが定数ではなく、どの2つも互いに素なものは存在しない。

この定理の特別な場合として、

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ のどれもが3以上の自然数 $\boldsymbol{n}$ に等しいときが、

（多項式版）フェルマーの定理である。

【 **ABC**定理 の証明 】

【 命題 】

(i)　$\boldsymbol{A}$が定数でなければ、$\mathbf{deg}\,\boldsymbol{A'} = \mathbf{deg}\,\boldsymbol{A} - \mathbf{1}$

(ii)　$\boldsymbol{B}$が$\boldsymbol{A^n}$の倍数なら、$\boldsymbol{B'}$は$\boldsymbol{A^{n-1}}$の倍数である（$\boldsymbol{n}$は自然数）。

(iii)　$\boldsymbol{AB' = BA'}$であることと、

$\boldsymbol{A = cB}$となる$\mathbf{0}$ではない実数$\boldsymbol{c}$があることとは同値。

【 **ABC** 定理 の証明の流れ 】

①　$\boldsymbol{AB' - BA' = AC' - CA' = CB' - BC' \neq 0}$である。

②　$\mathbf{max}\,(\mathbf{deg}\,\boldsymbol{A}, \mathbf{deg}\,\boldsymbol{B}, \mathbf{deg}\,\boldsymbol{C}) + \mathbf{deg}\,\boldsymbol{D} < \mathbf{deg}\,(\boldsymbol{ABC})$

③　$\boldsymbol{A_1} = \dfrac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{rad}\boldsymbol{A}}\,,\ \boldsymbol{B_1} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{rad}\boldsymbol{B}}\,,\ \boldsymbol{C_1} = \dfrac{\boldsymbol{C}}{\mathbf{rad}\boldsymbol{C}}$とおくと、

$\boldsymbol{D}$は$\boldsymbol{A_1, B_1, C_1}$の公倍数である。

④　$\mathbf{deg}\,(\boldsymbol{ABC}) \leqq \mathbf{deg}\,\boldsymbol{D} + \mathbf{deg}\,\mathbf{rad}(\boldsymbol{ABC})$

【 **ABC 定理 の応用** 】

【 定理 **1** の証明 】　背理法。

ABC 定理 を適用する

$$\begin{aligned}\max\left(\deg(X^p), \deg(Y^q), \deg(Z^r)\right) &< \deg \operatorname{rad}(X^pY^qZ^r)\\ &= \deg \operatorname{rad}(XYZ)\\ &\leqq \deg(XYZ)\end{aligned}$$

$\therefore$ 　$p\deg X$ ， $q\deg Y$ ， $r\deg Z$ はどれも $\deg(XYZ)$ より小

$\therefore$ 　$\deg(XYZ) = \deg(X) + \deg(Y) + \deg(Z)$

$$< \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\deg(XYZ)$$

$\deg(XYZ) > 0$なので、

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} > 1$となり、矛盾。　（証明終わり）

【 その他の応用例 】　次の等式を満たす多項式 A, B を求めよ。

$$\mathbf{A^2 = B^5 + x^2}$$

＜解答＞

① $\mathbf{A, B}, x$ のどの2つも互いに素のとき、ABC 定理より、

$$\max\left(\deg A^2, \deg B^5, \deg x^2\right) < \deg \mathrm{rad}(A^2B^5x^2)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 2\deg A < \deg A + \deg B + 1 \\ 5\deg B < \deg A + \deg B + 1 \\ 2 < \deg A + \deg B + 1 \end{cases}$$

これから、$0 < \deg B < \frac{2}{3}$ となり、これを満たす整数 $\deg B$ は存在しない。

② $\mathbf{A, B}, x$ のうちの2つで、互いに素ではないものがあるとき、$A = x\widetilde{A}$, $B = x\widetilde{B}$ とおくと、②は、

$$\widetilde{A}^2 = x^3\widetilde{B}^5 + 1 \quad \cdots\cdots ③$$

となる。$\widetilde{A}$, $\widetilde{B} \neq 0$ ならば、$\widetilde{A}^2$ と $x^3\widetilde{B}^5$ は互いに素。ABC 定理より、

$$2\deg\widetilde{A} < \deg\widetilde{A} + \deg\widetilde{B} + 1 \text{ , } 3 + 5\deg\widetilde{B} < \deg\widetilde{A} + \deg\widetilde{B} + 1$$

$\deg\widetilde{B} < -\frac{1}{3}$ で矛盾。

よって、$\widetilde{A} = 0$ または $\widetilde{B} = 0$ 。③より $\widetilde{B} = 0$, $\widetilde{A} = \pm 1$ 。

$$A = \pm x \text{ , } B = 0$$

2017年6月3日（土）

盛りつけで味を添える教材

第101回数学教育実践研究会

千歳科学技術大学　　安田 富久一

【 **10**回ゲーム 】

ピザ、ピザ、・・・、ピザと１０回声に出して言った後

質問を出す遊びがある。

このゲームの効果と同じような味を持つ問題

【 問題 **1** 】　次の各問いの三角関数の和を合成せよ。

① $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$　　② $-\sin\theta + \cos\theta$

③ $-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　④ $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$

【 **10**回ゲーム 】

ピザ、ピザ、・・・、ピザと１０回声に出して言った後

質問を出す遊びがある。

このゲームの効果と同じような味を持つ問題

【 問題 **1** 】　次の各問いの三角関数の和を合成せよ。

① $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$　　② $-\sin\theta + \cos\theta$

③ $-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　④ $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$

【 問題 2 】　曲線$\boldsymbol{C : y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$ $(\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1})$について、

① 曲線$\boldsymbol{C}$の長さを求めよ。

② 曲線$\boldsymbol{C}$の長さは$\boldsymbol{1}$より大か小か答えよ。

【 問題 2 】　曲線C : $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$について、

①　曲線Cの長さを求めよ。

②　曲線Cの長さは1より大か小か答えよ。

<解答>

① $$\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2e}$$

② $\dfrac{e^2-1}{2e}=1.175\cdots>1$　　こんなことしなくても！

【 問題 3 】　次の各問いの極限値を求めよ。

① $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+1}}{x+2}$

② $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$

③ $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-4}\right)$

④ $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

⑤ $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}$

⑥ $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left\{\log_2(6x+1)-\log_2(24x-1)\right\}$

【 問題 **4** 】

下の枠内にＡ君の数学問題の解答がある。Ａ君の解答について、以下の問いに答えよ。

① 嘘をついている箇所があれば指摘せよ。

② Ａ君の解答について意見を述べよ。

【問題】

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ……………………………………… ①

となるxを求めよ。

＜解答＞

①が成り立つには、$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ であればよい。

つまり、$x = \frac{\pi}{2}$。

【 問題 **5** 】

① $\sin x + \sin y = 2$ を満たす x, y を求めよ。

但し、$0 \leqq x < 2\pi$ ， $0 \leqq y < 2\pi$ とする。

① nを自然数とする。このとき、

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n = n$$

を満たす $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求めよ。

但し、$0 \leqq x_i < 2\pi\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とする。