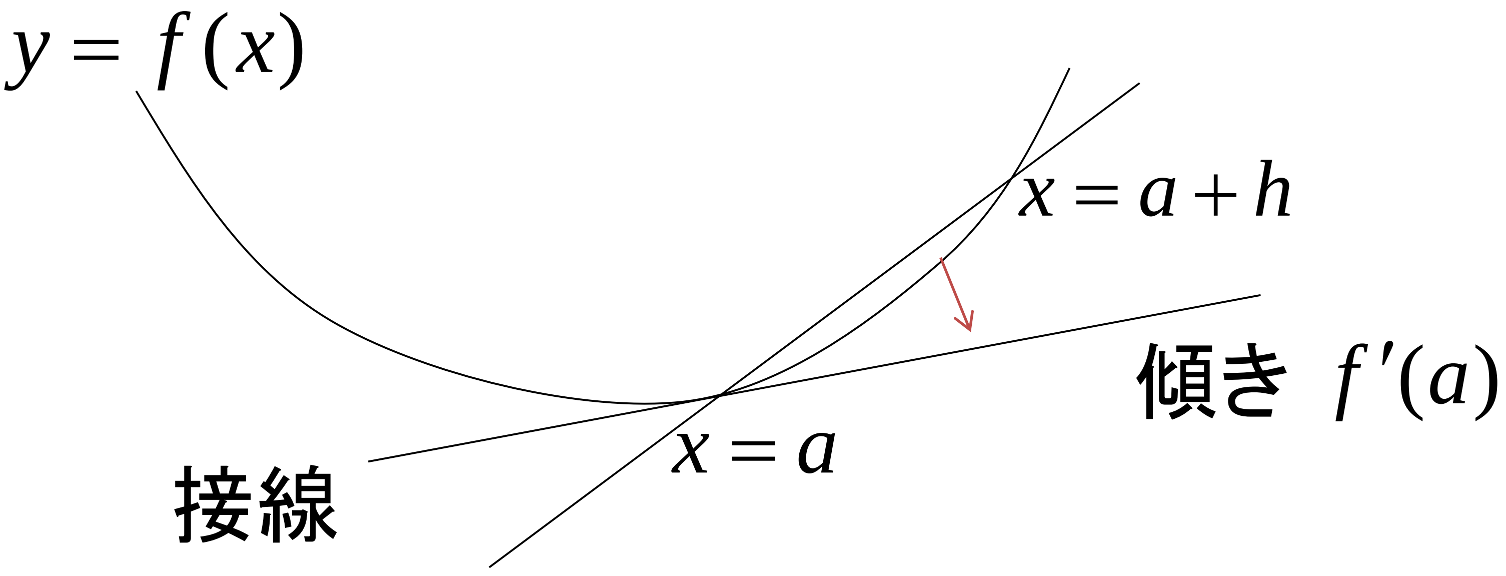
数学Ⅱにおける微分単元の指導法の改善に関する研究

2017年10月北数教旭川大会で発表した内容です

北海道札幌国際情報高等学校　和田文興

Ⅰ．研究の動機と背景

高校では極限を厳密に定義できず，曖昧でわかりにくい．私自身は，はじめて微分と出会ったとき，極限の考え方等が納得できなかった．



Ⅰ．研究の動機と背景

　微分の指導改善に関する優れた先行研究がいくつかあるが，先行研究では多くの授業時数を必要とするため実施が困難である.

　以上のようなことから，微分のイメージが捉えやすく，これまでの授業時間で指導可能な新しい指導方法が必要であると考える.

Ⅱ．研究の目的と方法

本研究の目的は，微分のイメージを大切にした指導法や教材の開発である．

微分について，図形的な意味から入っていけるようにするために代数的な微分の定義を導入し，その定義に基づいて定理や公式を組み立てる．それをもとに生徒への指導法を考えていく．

Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　１　【微分係数の代数的定義】

多項式関数 $f(x)$ が

$$f(x)=(x-a)^2 p(x)+mx+n$$

（ $p(x)$ は多項式関数）

を満たすとき,

$$f'(a)=m$$

と定める.

Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　１　【微分係数の代数的定義】

したがって，

$$f(x) = (x-a)^2 p(x) + f'(a)(x-a) + f(a)$$

となり，このことから次の事実がすぐわかる．

Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　１　【微分係数の代数的定義】

すぐわかる事実①

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(kf)'(a) = kf'(a)$$

Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　１　【微分係数の代数的定義】

すぐわかる事実②

整式 $f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れる

⇔　$f(a)=0$ かつ $f'(a)=0$

Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　１　　【微分係数の代数的定義】

すぐわかる事実③

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $(0, c)$ における接線の方程式は $y = bx + c$ である．

Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　１　【微分係数の代数的定義】

すぐわかる事実④

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とする.

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx+n$ が

$x=\alpha,\beta$ となる異なる2点で接するとき,

$$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+mx+n$$

Ⅲ．基本的なアイデア

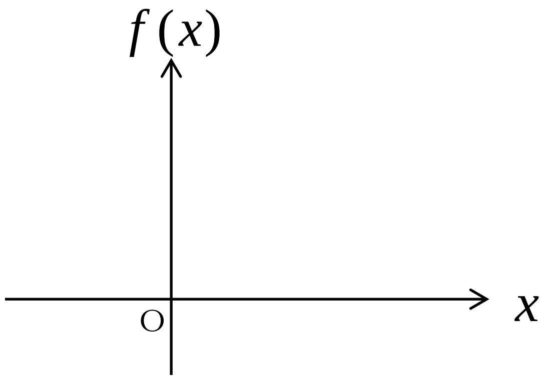
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

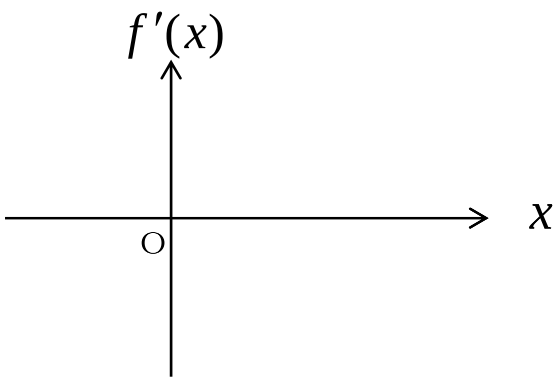
関数 $f(x)$ のグラフから導関数 $f'(x)$ のグラフをかかせて，導関数のイメージ付けを行う.

これは，次のような方法である.

Ⅲ．基本的なアイデア

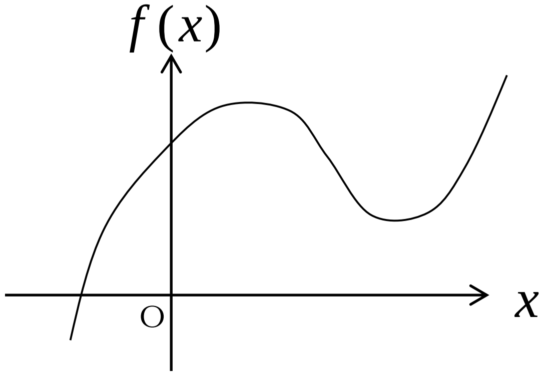
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

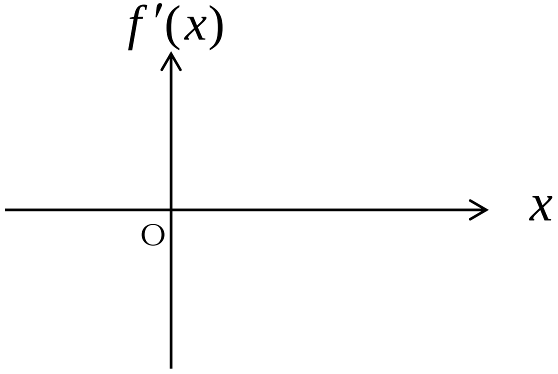




Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

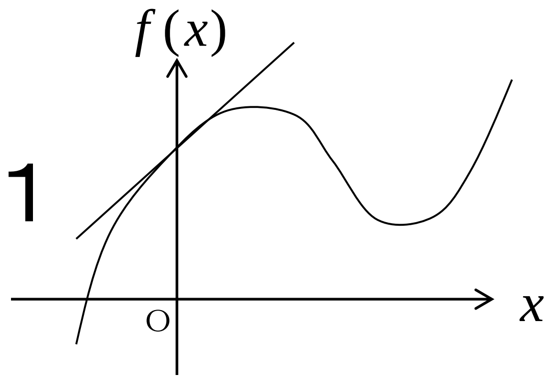


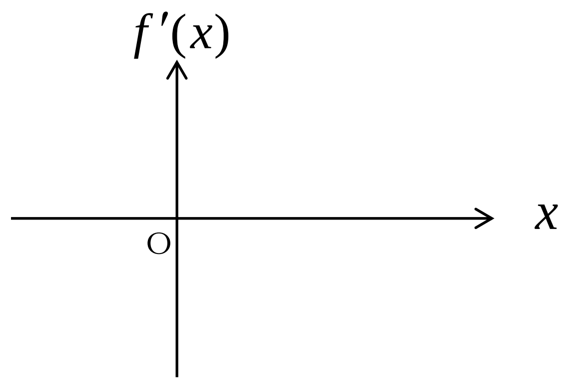


Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

傾き1

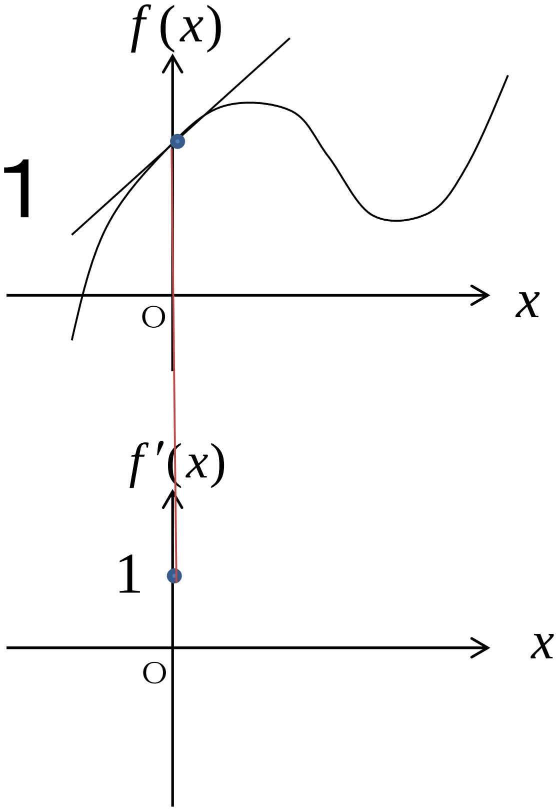




Ⅲ．基本的なアイデア

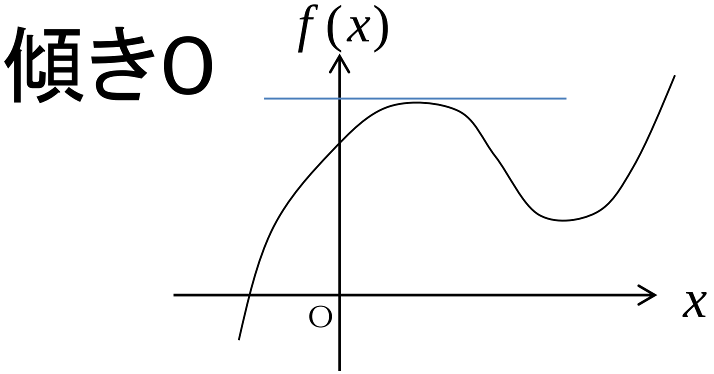
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

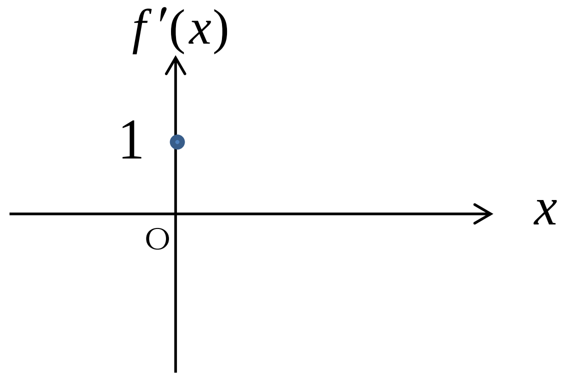
傾き1



Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

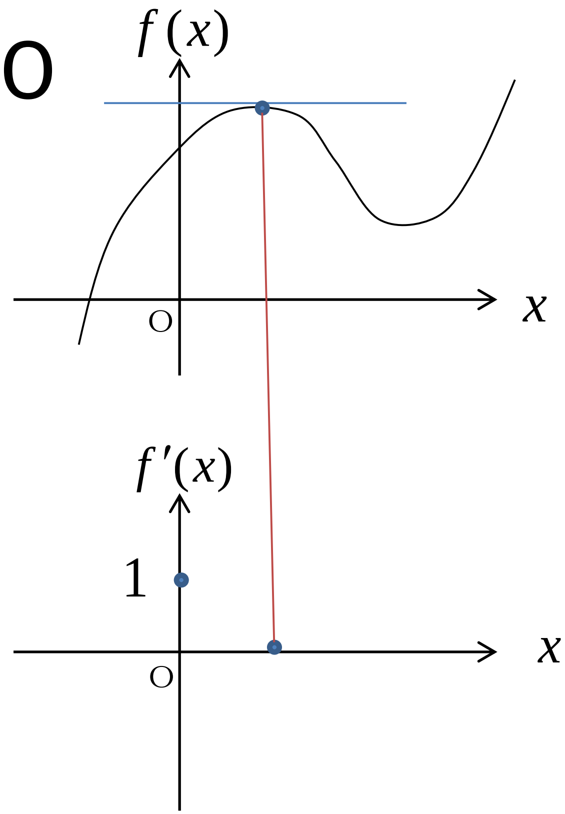




Ⅲ．基本的なアイデア

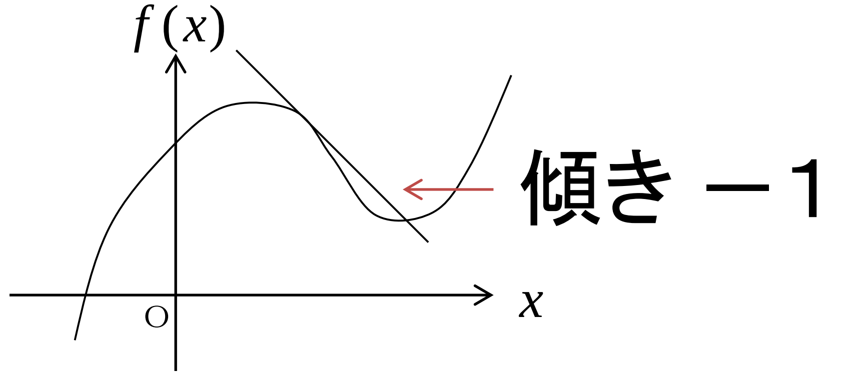
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

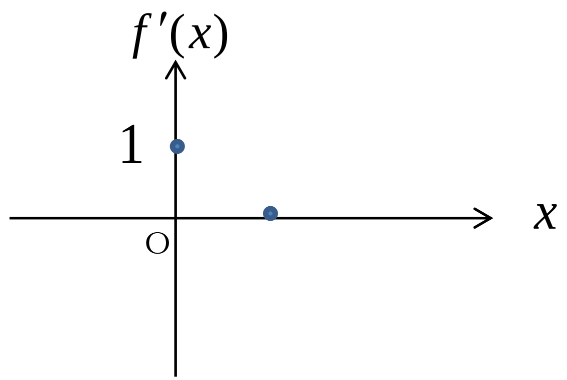
傾き０



Ⅲ．基本的なアイデア

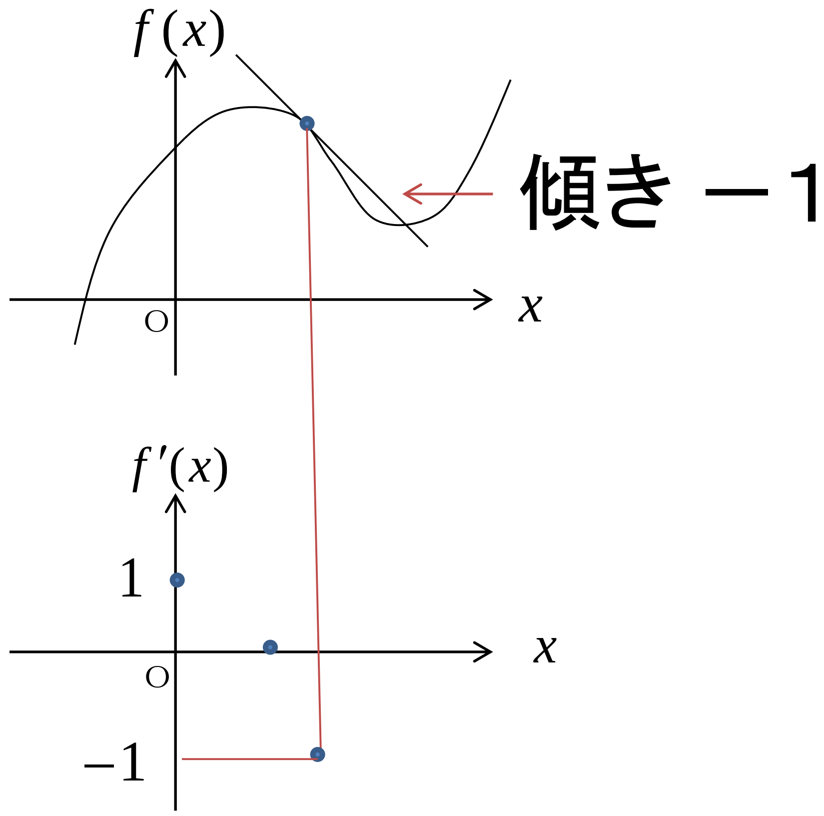
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】





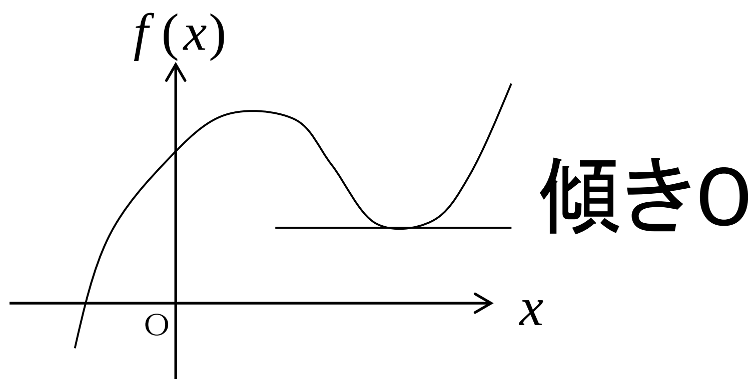
Ⅲ．基本的なアイデア

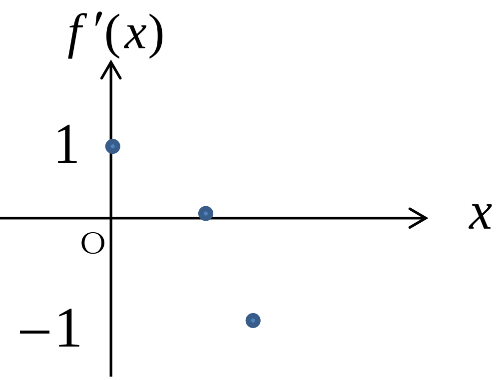
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】



Ⅲ．基本的なアイデア

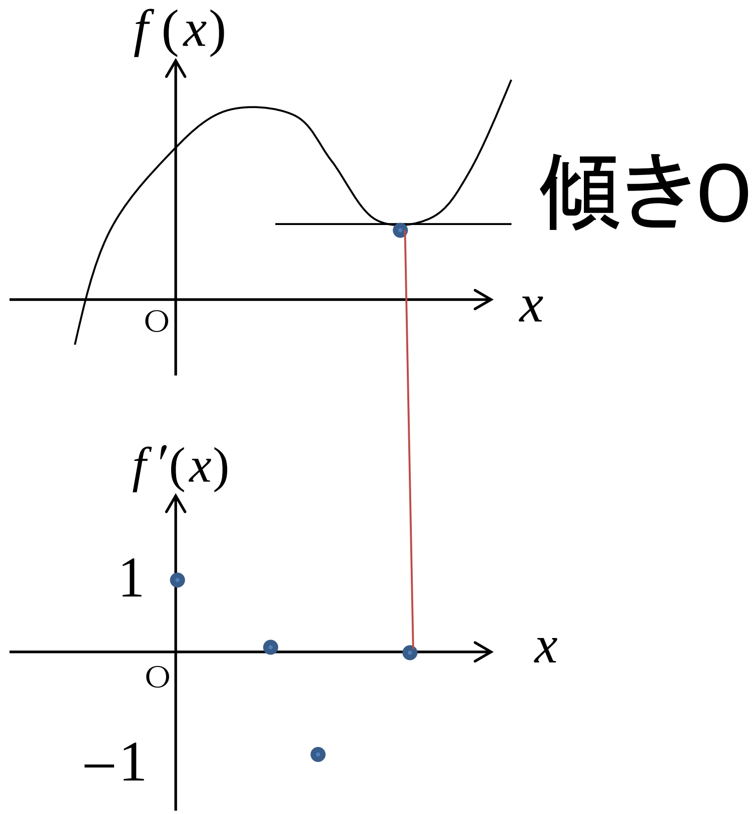
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】





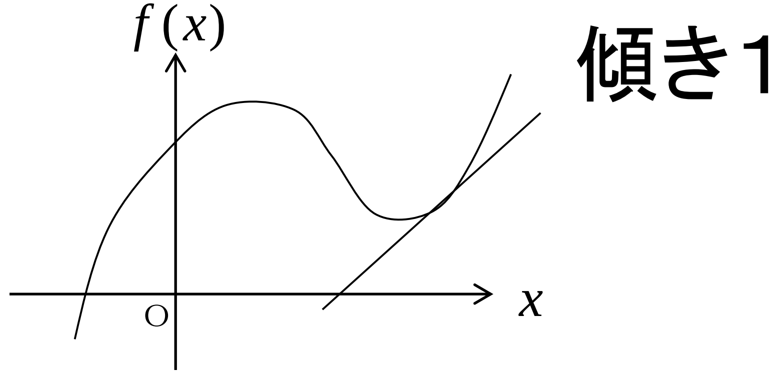
Ⅲ．基本的なアイデア

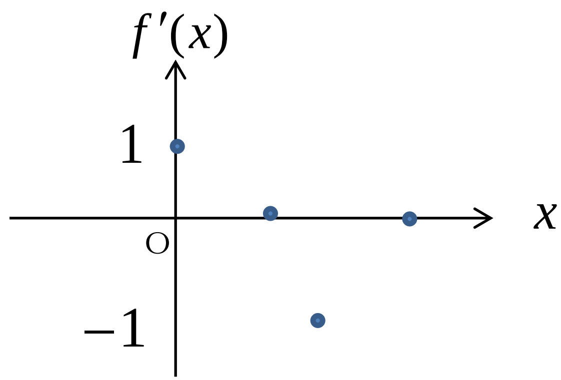
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】



Ⅲ．基本的なアイデア

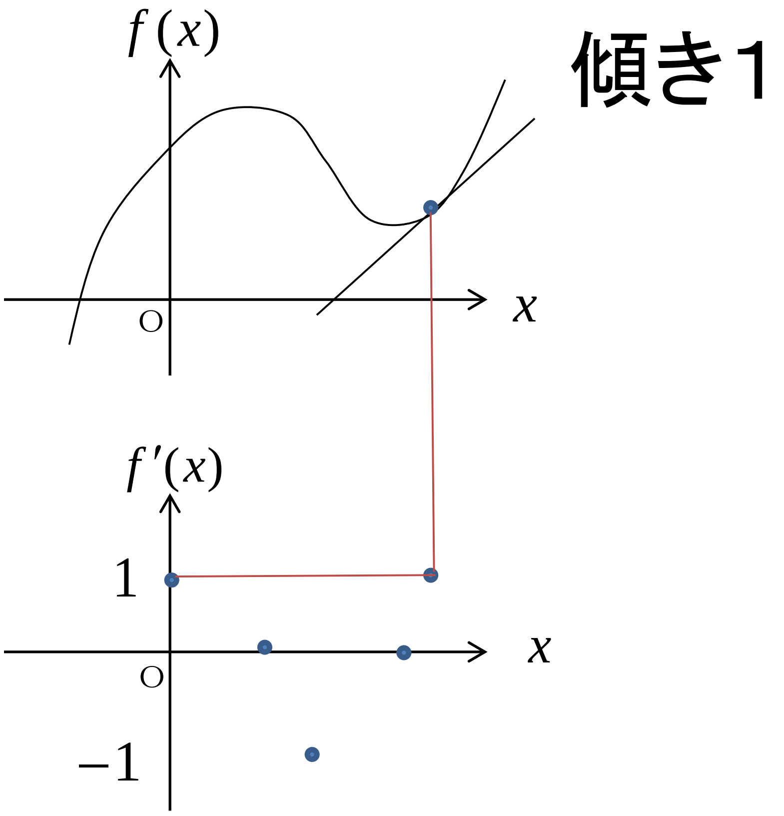
アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】





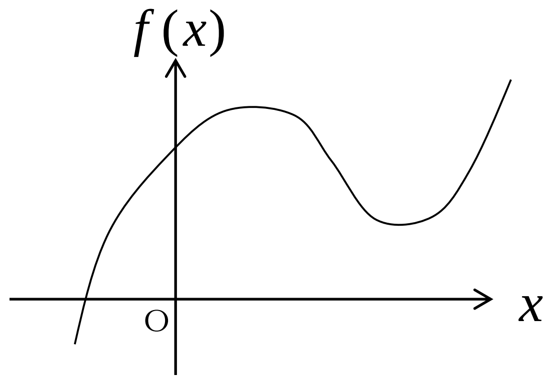
Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

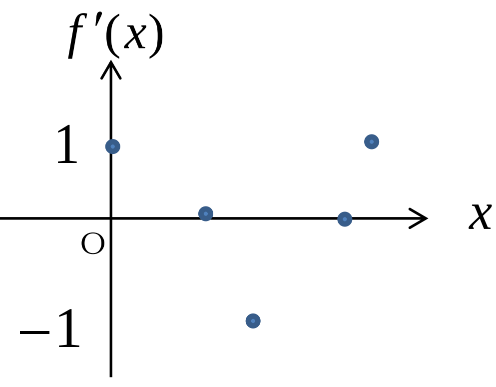


Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

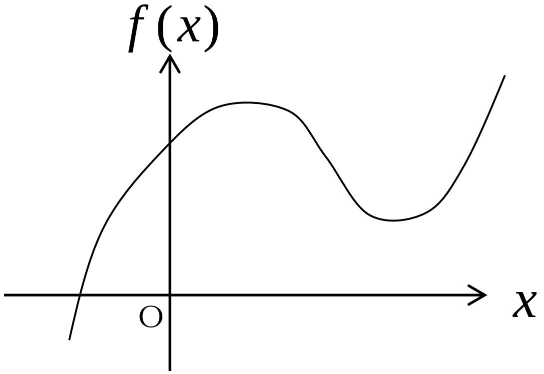


このように
点をプロット
して

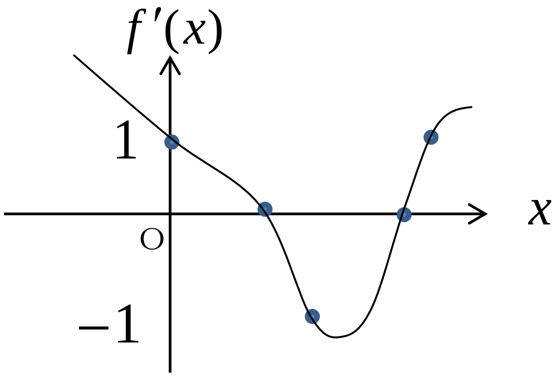


Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】



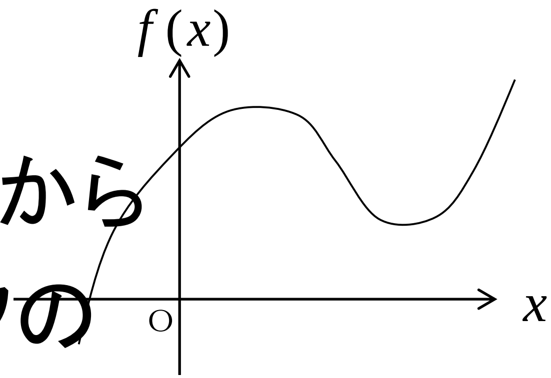
このように
点をプロット
して



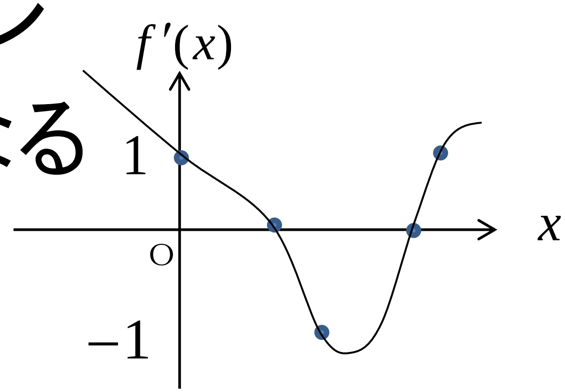
グラフをかく

Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【$f'(x)$ のグラフをかかせる】



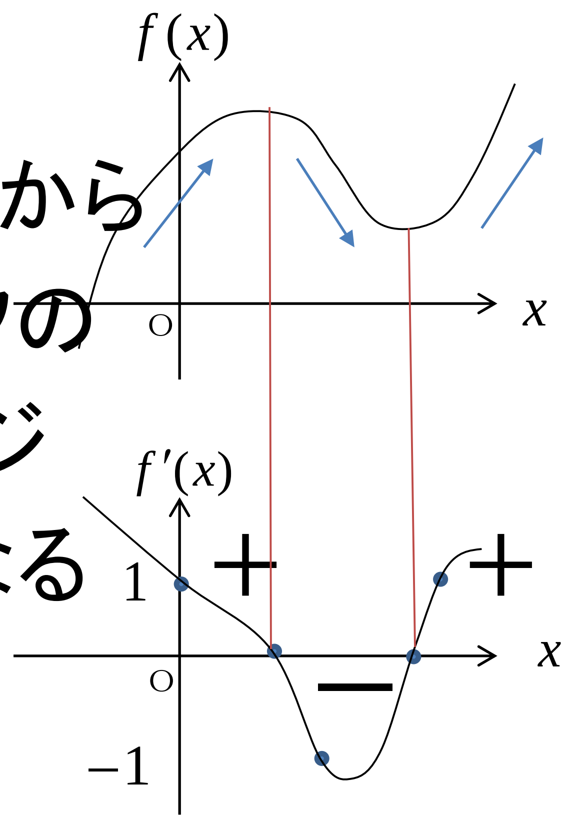
$f(x)$ のグラフから
$f'(x)$ のグラフの
概形がイメージ
できるようになる



Ⅲ．基本的なアイデア

アイデア　２　【 $f'(x)$ のグラフをかかせる】

$f(x)$ のグラフから
$f'(x)$ のグラフの
概形がイメージ
できるようになる



関数 $f(x)$ の
増減と $f'(x)$
の符号が
しっかりと
結びつく

Ⅳ．指導方法

１時間目　導関数，放物線の接線　２

２時間目　接線と微分係数（代数的定義）　１

３時間目　接線の方程式，極限と微分係数　１

４時間目　導関数の性質　２

５時間目　x^n の導関数，導関数の計算　１

（通常の授業より授業時数が1時間増える）

Ⅳ．指導方法

８時間目　関数の増減と導関数の符号　２
１０時間目　３次関数が極値をもつ条件　２
１６時間目　４次関数のグラフと接線　１

時間に余裕があれば，発展的な内容もできる：
①代数的な定義から（極限を用いずに），　１
x^n の微分公式などを導かせる
②２次近似式の公式をつくらせる　１

1時間目　導関数，放物線の接線

＜導入＞　微分と積分について，これから学ぶことの概要を説明する．

＜準備1＞

導関数の定義は4時間目に行うが，1時間目でも導関数について説明する：

「曲線 $y=f(x)$ 上の点における接線の傾きを捉える関数を $f(x)$ の導関数といい，$f'(x)$ で表す．」

１時間目　導関数，放物線の接線

＜準備２＞

導関数 $f'(x)$ の説明の後で，アイデア　２　を説明し，導関数のイメージをつかませる．

＜数学Ｉの復習＞

２次関数のグラフと直線が接する条件を確認し，練習問題を通して復習する．

2時間目　接線と微分係数

＜アイデア　１　のための準備＞

$f(x)=px^2+qx+r$（$p\neq 0$）とする.

放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx+n$ が $x=a$ で接する

$\Leftrightarrow$ $f(x)=mx+n$ が重解 $x=a$ をもつ

$\Leftrightarrow$ $f(x)-(mx+n)=0$ が重解 $x=a$ をもつ

$\Leftrightarrow$ $f(x)-(mx+n)=p(x-a)^2$ と表せる

$\Leftrightarrow$ $f(x)=p(x-a)^2+mx+n$ と表せる

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った余りが $mx+n$

2時間目　接線と微分係数

このように,

$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った余りが $mx+n$

であるとき,

曲線$y=f(x)$と直線$y=mx+n$ は$x=a$ の近くでは,

１点のみを共有し, さらに,

$x \fallingdotseq a$ のとき $f(x) \fallingdotseq mx+n$

となっている.

そこで, $f(x)$ を多項式関数とするとき,

曲線 $y=f(x)$ の接線を次のように定義する.

2時間目　接線と微分係数

【定義0】

$f(x)$ を$(x-a)^2$で割った余りが $mx+n$ であるとき，

直線 $y=mx+n$を曲線$y=f(x)$ の$x=a$における接線という.

つぎに，微分係数 $f'(a)$ を，

$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った余り$mx+n$ の x の係数で定義する．つまり，$f'(a)=m$ である.

2時間目　接線と微分係数

【定義1】アイデア　1

$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った余りが $mx+n$
であるとき，余りの x の係数 m を $f(x)$ の
$x=a$ における微分係数といい，記号 $f'(a)$ で表す.
つまり，$f'(a)=m$ である.

接線の定義0から，微分係数 $f'(a)$ は
曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾き
である.

3時間目　接線の方程式

＜前時の確認＞

接線の方程式を求める.

（例）曲線 $y=x^3-3x+1$ 上の点（2,3）における接線の方程式を求めよ.

（略解）$x^3-3x+1=(x-2)^2(x+4)+9x-15$

（答）　$y=9x-15$

3時間目　接線の方程式

アイデア　１　より，次のことがわかる.

$f(x)$を$(x-a)^2$で割った余りは，

$$f'(a)(x-a)+f(a)$$

と表せる:

$$f(x)=(x-a)^2p(x)+f'(a)(x-a)+f(a)$$

（ただし，$p(x)$は多項式関数）

3時間目　接線の方程式

このことから，次の2つの公式がすぐ出る.

①曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における
接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

②整式 $f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れる
$\Leftrightarrow$ $f(a) = 0$ かつ $f'(a) = 0$

3時間目　接線の方程式

極限の定義と計算練習の後，

微分係数を極限を用いて表す

【公式】

多項式関数 $f(x)$ において，

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が成り立つ．

3時間目　極限と微分係数

（略証）

$f(x)=(x-a)^2 p(x)+f'(a)(x-a)+f(a)$より,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=(x-a)p(x)+f'(a)$$

であり, $\lim_{x\to a}(x-a)p(x)=0$ だから,

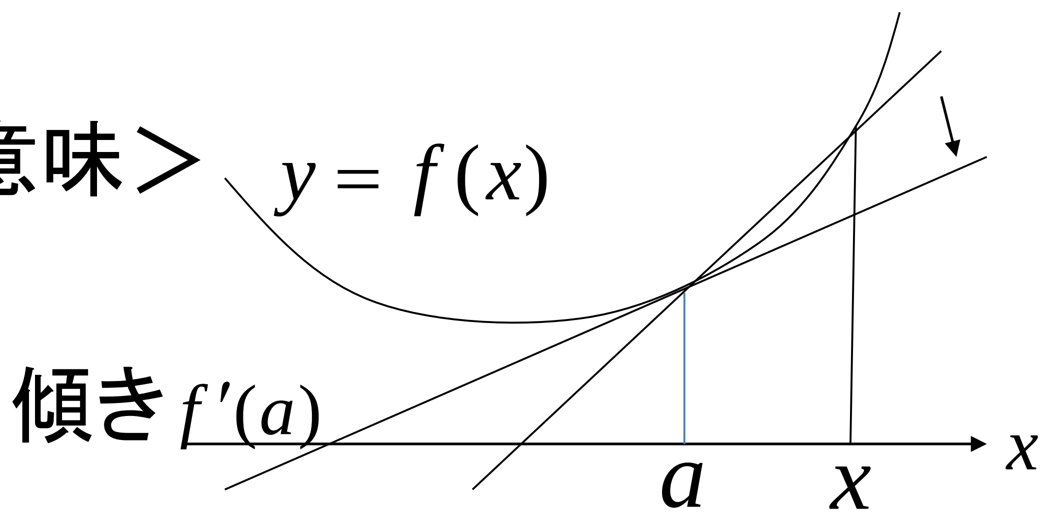
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \blacksquare$$

3時間目　極限と微分係数

多項式関数 $f(x)$ において，

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

＜図形的意味＞



3時間目　極限と微分係数

＜接線の方程式を2通りの方法で求める＞

（例） $f(x)=x^3+2x-1$ において，$f'(1)$ を求めよ.
　また，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,2)$ における
　接線の方程式を求めよ.

4時間目　導関数の性質

＜前時の復習＞

（例）$f(x)=x^2$ とする.

　放物線 $y=f(x)$ の $x=3$ における

　接線の方程式を2通りの方法で求めよ.

このような練習問題を2つやらせる.

4時間目　導関数の性質

【導関数の定義】

　$f'(a)$ は a の値によって定まるから, a の関数とみることができる. つまり, x の各値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数とみる.

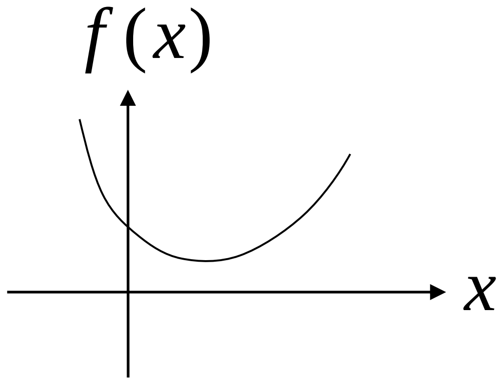
　この新しい関数を, もとの関数 $f(x)$ の導関数といい, 記号 $f'(x)$ で表す.

4時間目　導関数の性質

実際に，関数 $f(x)$ のグラフから導関数 $f'(x)$ のグラフをかかせて，導関数のイメージ付けを行う．（アイデア　２）

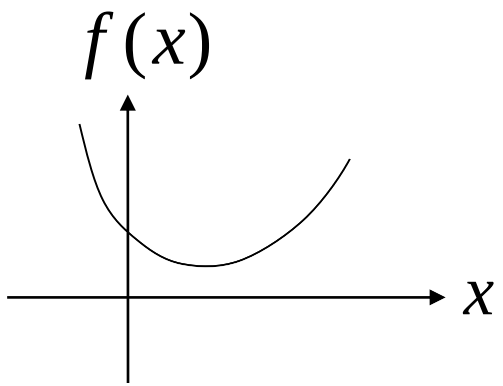
黒板に，関数 $y=f(x)$ のグラフをいくつか描いて，その下にフリーハンドで関数 $y=f'(x)$ のグラフを描かせる．

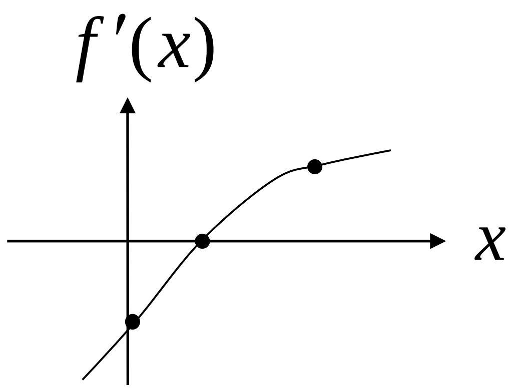
4時間目　導関数の性質



このようなグラフから
$f'(x)$ のグラフをかか
せる問題を4つやる.

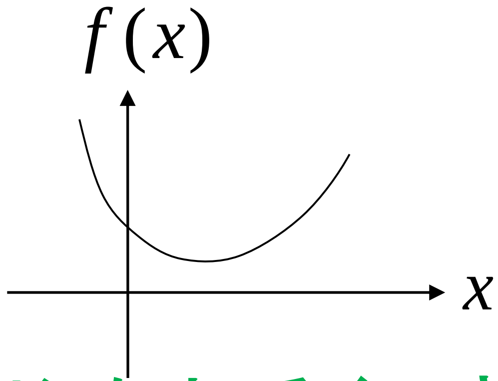
4時間目　導関数の性質



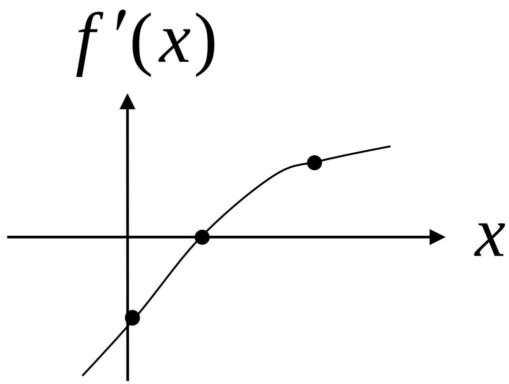


先ほどと同じように
点をプロットしてグラフ
をかく

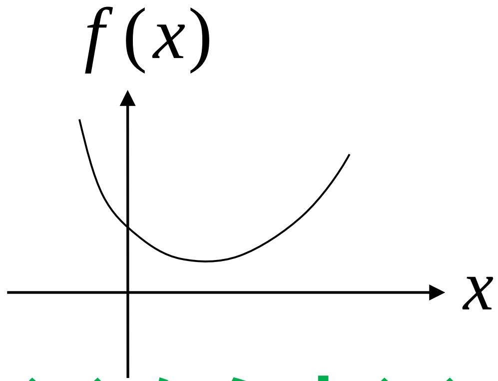
4時間目　導関数の性質



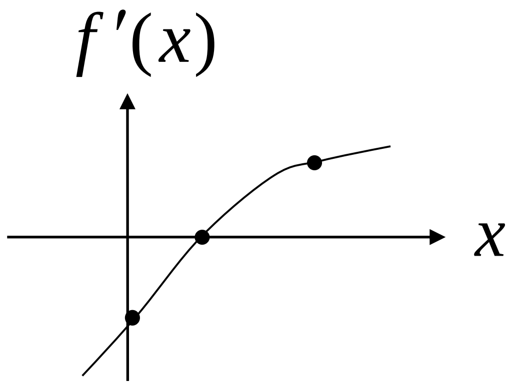
はじめ上手くできなくても全員かけるようになる



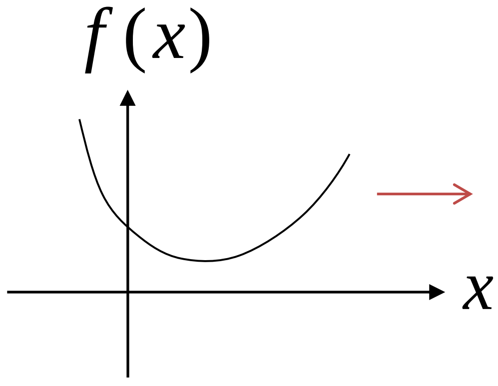
4時間目　導関数の性質



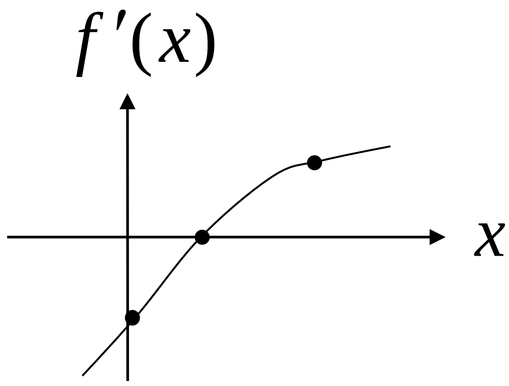
f(x)からf’(x)をイメージできるようになる



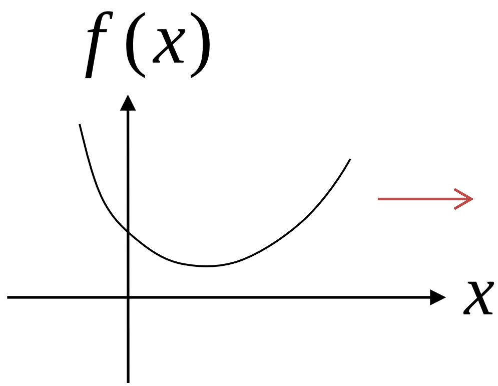
4時間目　導関数の性質



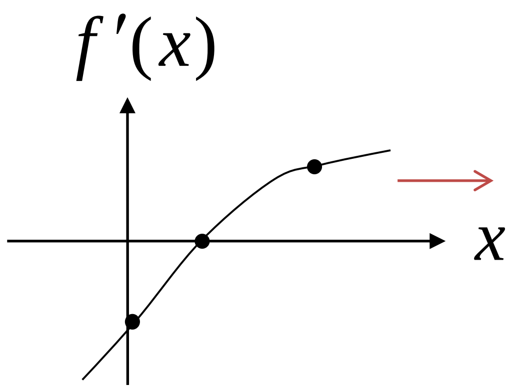
f(x)のグラフをx軸方向にpだけ平行移動すると・・・



4時間目　導関数の性質

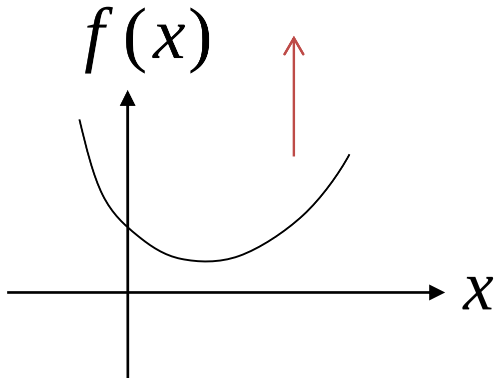


f(x)のグラフをx軸方向に
pだけ平行移動すると・・・

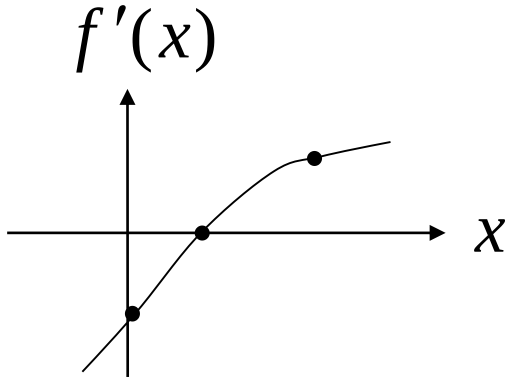


{f(x－p)}’＝f’(x－p)
がわかる

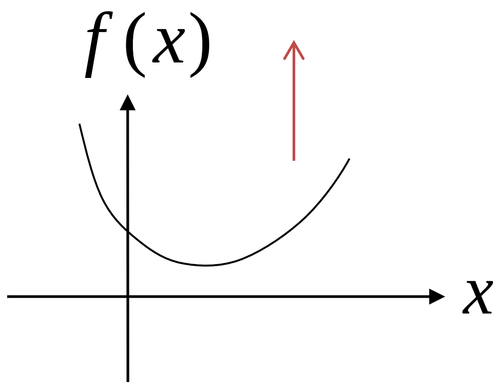
4時間目　導関数の性質



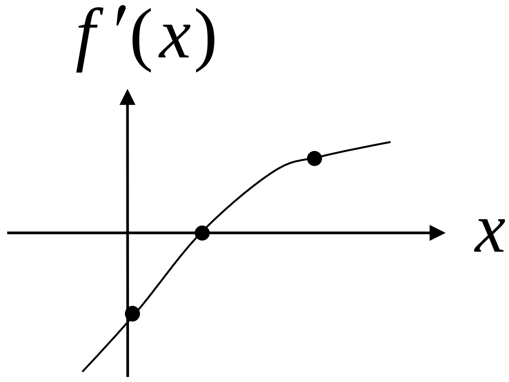
f(x)のグラフをy軸方向にqだけ平行移動すると・・・



4時間目　導関数の性質

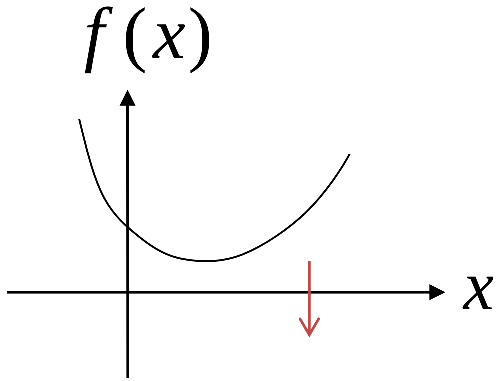


f(x)のグラフをy軸方向にqだけ平行移動すると・・・

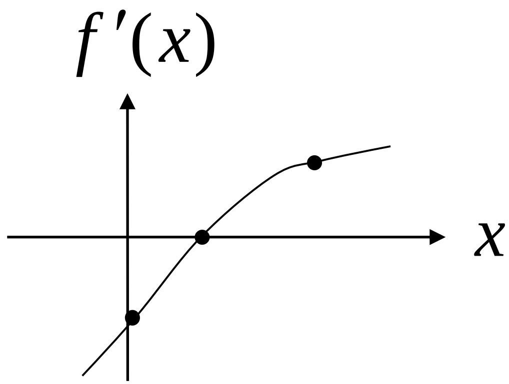


{f(x)＋q}’＝f’(x)
がわかる

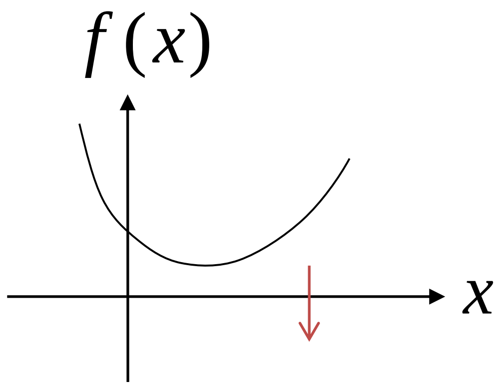
4時間目　導関数の性質



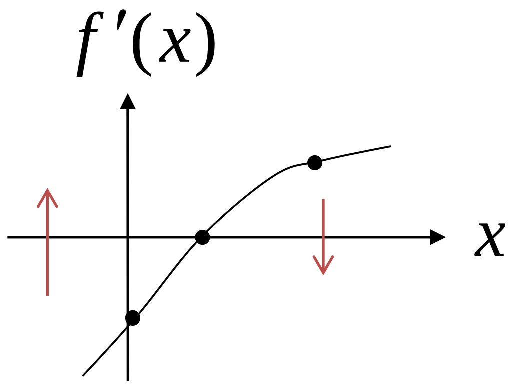
f(x)のグラフをx軸に関して対称移動すると･･･



4時間目　導関数の性質

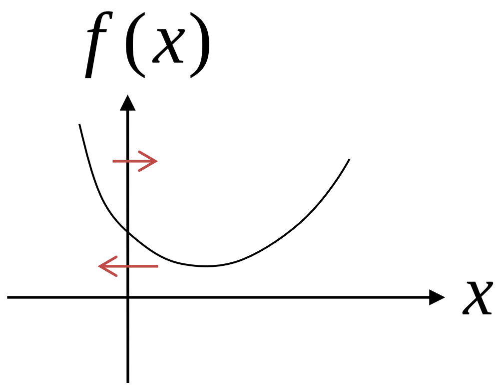


f(x)のグラフをx軸に関して対称移動すると･･･

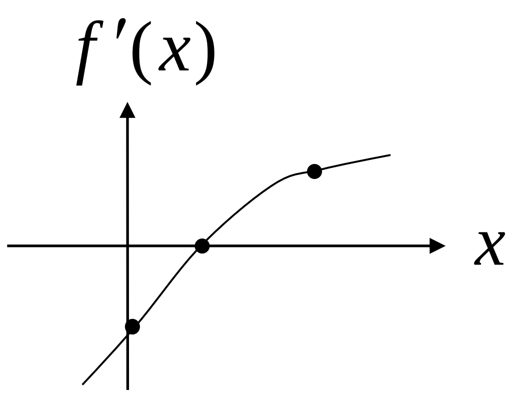


{－f(x)}’＝－f’(x)
がわかる

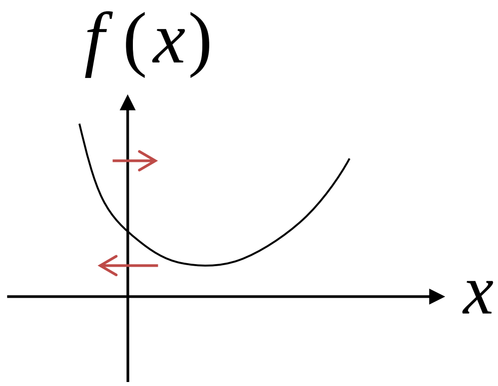
4時間目　導関数の性質



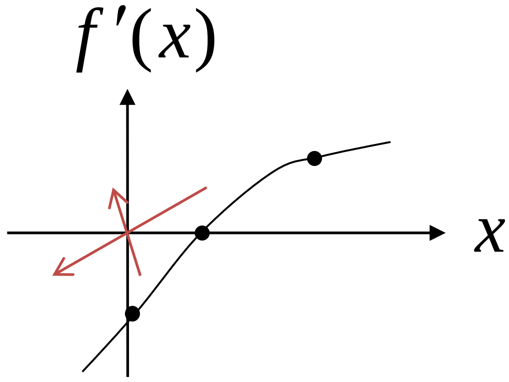
f(x)のグラフをy軸に関して対称移動すると･･･



4時間目　導関数の性質



f(x)のグラフをy軸に関して対称移動すると･･･



{f(−x)}’＝−f’(−x)
がわかる

5時間目　導関数の計算

4時間目に予想したことを極限を用いて計算で確かめる.

線形性を導く場合は，代数的定義を用いた方が分かりやすく楽にできる.（アイデア　1）

また，関数が増加しているところで導関数が正の値をとることなども見てすぐに納得できる.

5時間目　導関数の計算

＜x^nの導関数＞

$(c)' = 0$　（ただし, c は定数）

$(x^n)' = nx^{n-1}$　（ n は自然数）

二項定理を使って証明する

＜微分の計算練習＞

上の公式と微分の線形性を用いて練習

Ⅴ．まとめ

微分の代数的な定義（アイデア　１）と導関数の概形をえがかせる作業（アイデア　２）を組合せることで，もとの関数のグラフからその導関数のグラフがイメージできるようになり，関数の増減と導関数の符号がしっかりと結びつく．また，微分という操作と平行移動という操作が可換であることなどが当たり前のように感じられるようになる．

Ⅴ．まとめ

　さらに，この代数的な定義式を用いると，４次関数のグラフと直線が異なる2点で接することも簡単に表現できる．代数的定義は1次近似式の考えに基づいているため，２次近似式などへ発展させていくことも容易である．

　微分がすぐにイメージすることができるようになるため，生徒の微分の理解や見方･考え方を大きく向上させることができるものと考えている．

Ⅵ. 今後の課題

導関数のグラフの概形をえがかせる授業はこれまで何度か行っており効果を実感しているが，代数的定義による授業は試行したことはない．

今後は実証的研究を行って効果を検証していきたい．