導数列と和の公式

北海道札幌国際情報高等学校　和田文興

このレポートでは、高校生用の読み物として数列の新しい和の公式を紹介します。“導数列” というもの（階差数列のようなもの）を定義し、その性質を調べます。そして、部分積分の数列バージョンとして和の公式をつくります。部分積分を用いて $\int x^2 e^x dx$ を計算したように、新しい和の公式で $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^{k-1}$ などを計算します。“導数列” という言葉は、高校生が導関数と対比して考えやすくすることを優先して考えたものです。それで、その記号も導関数を真似て $\{(a_n)'\}$ としました。あまり使いやすい記号ではないかもしれませんが、このような理由であることを了解してください。

以下は高校生向けのプリントです。

==

高校生の数学プリント「導数列と和の公式」

§１．はじめに

理系の３年生はわかっていることですが，積の微分法の公式を使って部分積分の公式を導きました。このプリントでは, 数学Ⅲの教科書と同じ手順で部分積分の公式を数列にアレンジした公式を作ります。さらに, 教科書の問題に適用して有用性も見てみようと思います。

§２．導数列の定義

数列 $\{b_n\}$ が数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるとは,

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことであった。ここでは，添字の番号を１つずらして,

$$c_1 = a_1,$$

$$c_n = a_n - a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって，数列 $\{c_n\}$ を定める。そして，この数列 $\{c_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の “導数列” と呼び， $\{(a_n)'\}$ で表すことにしよう。つまり，数列 $\{a_n\}$ の導数列とは,

$$(a_1)' = a_1,$$

$$(a_n)' = a_n - a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

をみたす数列 $\{(a_n)'\}$ のことを言う。(“導数列” という言葉やその記号は，私が勝手に考えたものなので，世間一般では通用しません。使用する場合は注意してください。)

定義として、まとめておきましょう。

【定義】
数列$\{(a_n)'\}$が数列$\{a_n\}$の導数列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $(a_1)'=a_1$，$(a_n)'=a_n-a_{n-1}$（$n=2,3,4,\cdots$）

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとするとき，上の定義から，$\{S_n\}$の導数列が$\{a_n\}$であることがわかる。実際，

$$a_1=S_1,$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

であることが容易に確かめられる（高校では教科書に公式として登場するのでよく知っているはず)。

このように，導数列をつくる操作は，数列の和をつくる操作の逆の操作となっていることがわかった。したがって，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)'=a_n \qquad \text{および} \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k)'=a_n$$

が成り立つ。

§３．導数列の性質

この節のはじめに，導数列をつくる操作に線形性があることを見ておきましょう。

【導関数の線形性】
(1) $(a_n+b_n)'=(a_n)'+(b_n)'$

(2) $(ca_n)'=c(a_n)'$（cは実数の定数）

(1)の証明：$n=1$のとき，$(a_1+b_1)'=a_1+b_1=(a_1)'+(b_1)'$

$n\geqq 2$のとき，$(a_n+b_n)'=(a_n+b_n)-(a_{n-1}+b_{n-1})=(a_n-a_{n-1})+(b_n-b_{n-1})=(a_n)'+(b_n)'$

したがって，すべての自然数nについて，$(a_n+b_n)'=(a_n)'+(b_n)'$ は成り立つ。

（証明終わり）

$\boxed{\text{問１}}$ (2)を証明してみましょう。

次に，２つの数列の各項の積を項とする数列の導数列がどのようになるかを確認します。

【積の導数列】
(3) $(a_nb_n)'=a_n(b_n)'+(a_n)'b_{n-1}$（$n=2,3,4,\cdots$）

(4) $(a_nb_n)'=a_n(b_n)'+(a_n)'b_n-(a_n)'(b_n)'$（$n=1,2,3,\cdots$）

(4)の証明：$n=1$のとき，$a_1(b_1)'+(a_1)'b_1-(a_1)'(b_1)'=a_1b_1+a_1b_1-a_1b_1=a_1b_1=(a_1b_1)'$

$n\geqq 2$のとき，$a_n(b_n)'+(a_n)'b_n-(a_n)'(b_n)'=a_n(b_n-b_{n-1})+(a_n-a_{n-1})b_n-(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})$

$$=a_nb_n-a_{n-1}b_{n-1}=(a_nb_n)'$$

したがって，すべての自然数nについて，$(a_nb_n)'=a_n(b_n)'+(a_n)'b_n-(a_n)'(b_n)'$ は成り立つ。

（証明終わり）

$\boxed{\text{問２}}$　(3)を証明してみましょう。

§４．導数列の公式

この節では，導数列の基本公式を示します。

【導数列の公式】

(a)　$a_n = c$（cは実数の定数）のとき，　$(a_1)' = c$（$n=1$），$(a_n)' = 0$（$n = 2,3,4,\cdots$）

(b)　$a_n = n$ のとき，$(a_n)' = 1$

(c)　$a_n = n(n+1)$ のとき，$(a_n)' = 2n$

(d)　$a_n = n(n+1)(n+2)$ のとき，$(a_n)' = 3n(n+1)$

(e)　$a_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ のとき，$(a_n)' = 4n(n+1)(n+2)$

(f)　$a_n = r^n - 1$ のとき，$(a_n)' = r^{n-1}(r-1)$

(a)の証明：$n=1$ のとき，$(a_1)' = a_1 = c$

$n \geqq 2$ のとき，$(a_n)' = a_n - a_{n-1} = c - c = 0$

（証明終わり）

(e)の証明：$n=1$ のとき，$(a_1)' = a_1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

$n \geqq 2$ のとき，$(a_n)' = n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)\{(n+3)-(n-1)\}$

$$= 4n(n+1)(n+2)$$

したがって，すべての自然数nについて，$(a_n)' = 4n(n+1)(n+2)$ は成り立つ。

（証明終わり）

$\boxed{\text{問３}}$　(b),(c),(d),(f)を証明してみましょう。

§５．和の公式

いよいよ和の公式をつくります。ここでは【積の導数列】(4)を利用してみます。

(4)　$(a_n b_n)' = a_n(b_n)' + (a_n)'b_n - (a_n)'(b_n)'$ より

$$a_n(b_n)' = (a_n b_n)' - (a_n)'(b_n - (b_n)')$$

となるから，両辺の和をとることにより

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k)' = a_n b_n - \sum_{k=1}^{n}(a_k)'(b_k - (b_k)')$$

が成り立つ。この公式は，$(b_n)'$ を改めて b_n に置き換えることにより，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n}(a_k)'\left(\sum_{i=1}^{k} b_i - b_k\right)$$

と表すこともできる。

まとめておきましょう。

【和の公式】

(※) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k)' = a_n b_n - \sum_{k=1}^{n}(a_k)'(b_k - (b_k)')$

(＊) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n}(a_k)'\left(\sum_{i=1}^{k} b_i - b_k\right)$

$\boxed{\text{問４}}$ (3) $(a_n b_n)' = a_n(b_n)' + (a_n)' b_{n-1}$ （$n = 2, 3, 4, \cdots$）を利用して，別な和の公式を作ってみましょう。

最後に，この公式で教科書の問題を解いてみます。

$\boxed{\text{例題１}}$ 和 $S_n = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + n\cdot 2^{n-1}$ を求めよ。

まずは教科書の解答からやってみます。

教科書の解） $S_n = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + n\cdot 2^{n-1}$ … ①

両辺を２倍して

$$2\,S_n = \quad 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n \quad \cdots \text{②}$$

①－②より

$$-S_n = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + \cdots 1\cdot 2^{n-1} - n\cdot 2^n$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n\cdot 2^n$$

$$= -(n-1)\cdot 2^n - 1$$

ゆえに，$S_n = (n-1)\cdot 2^n + 1$

（答） $S_n = (n-1)\cdot 2^n + 1$

次に公式(＊)を利用した解答を示します。

解） $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$

$$= n\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}(k)'\left(\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} - 2^{k-1}\right) \qquad \text{（公式(＊)を適用した）}$$

$$= n\cdot\frac{2^n - 1}{2 - 1} - \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\left(\frac{2^k - 1}{2 - 1} - 2^{k-1}\right)$$

$$= n(2^n - 1) - \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1} - 1)$$

$$= n(2^n - 1) - \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} - n\right)$$

$$= n(2^n - 1) - (2^n - 1 - n)$$

$$= (n-1)\cdot 2^n + 1$$

（答） $S_n = (n-1)\cdot 2^n + 1$

問５ 公式(※)または(＊)を利用して，和 $S_n = 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 5\cdot 3^2 + \cdots (2n-1)\cdot 3^{n-1}$ を求めよ。

例題２ 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^{k-1}$ を求めよ。

解）
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^{k-1} = n(n+1)\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}(k(k+1))'\left(\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} - 2^{k-1}\right) \quad \text{（公式(＊)を適用した）}$$
$$= n(n+1)(2^n - 1) - \sum_{k=1}^{n} 2k(2^{k-1} - 1)$$
$$= n(n+1)(2^n - 1) - \sum_{k=1}^{n} k(2^k - 2)$$
$$= n(n+1)(2^n - 1) - \left\{ n\sum_{k=1}^{n}(2^k - 2) - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}(2^i - 2) - (2^k - 2)\right)\right\}$$
（公式(＊)を適用した）
$$= n(n+1)(2^n - 1) - n\{2(2^n - 1) - 2n\} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2(2^k - 1) - 2k\right) - (2^k - 2)\right\}$$
$$= (n^2 - n)\cdot 2^n + n^2 + n + \sum_{k=1}^{n}(2^k - 2k)$$
$$= (n^2 - n)\cdot 2^n + n^2 + n + 2(2^n - 1) - n(n+1)$$
$$= (n^2 - n + 2)\cdot 2^n - 2$$

（答） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^{k-1} = (n^2 - n + 2)\cdot 2^n - 2$

例題３ 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 2k - 1)\cdot 2^{k-1}$ を求めよ。

解）
$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 2k - 1)\cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$
$$= \left\{(n^2 - n + 2)\cdot 2^n - 2\right\} + \left\{(n-1)\cdot 2^n + 1\right\} - (2^n - 1)$$
（例題１と例題２を利用した）
$$= n^2\cdot 2^n$$

（答） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 2k - 1)\cdot 2^{k-1} = n^2\cdot 2^n$

このプリントでは積の導数列の公式をつくり，それを利用して新しい和の公式をつくりました。

このプリントを最後まで読んだ皆さんは,「商の導数列はどのように表されるか？」,「部分積分をまねるだけでなく，置換積分をまねた公式がつくれないか？」,「つくれたとして，どんな使い道があるのか？」など，いろいろと思いをめぐらして，あれこれ自分でやってみると楽しく良い勉強ができると思います。

＜生徒用プリントはこれで終わりです＞