漸化式の項をShareしよう!!

【隣接２項漸化式】

$$\boxed{a_{n+1} = pa_n + q} \quad \cdots\cdots(*)$$

どうバランスをとればいいかというと、定数qの値をa_nとa_{n+1}にシェアして、

$$a_{n+1} - \alpha = \bigcirc(a_n - \alpha)$$

とするといいかもしれない。

$$a_{n+1} - \alpha = pa_n + q - \alpha = pa_n + (q - \alpha)$$

これから、　$1:(-\alpha) = p:(q-\alpha)$　　すなわち

$$\alpha = \alpha p + q$$

なあんだ、これは(*)で、

$$\boxed{a_{n+1} = \alpha \text{、} a_n = \alpha}$$

としたものじゃないか。

【隣接３項漸化式】

$$\boxed{a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0} \quad \cdots\cdots(*)$$

どうバランスをとればいいかというと、項a_{n+1}をa_{n+2}とa_nにシェアして、

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \bigcirc(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

とするといいかもしれない。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = -pa_{n+1} - qa_n - \alpha a_{n+1} = -(p+\alpha)a_{n+1} - qa_n$$

これから、$1:(-\alpha) = -(p+\alpha):(-q)$　　より、　$(p+\alpha)\alpha = -q$　すなわち

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$$

なあんだ、これは(*)で、

$$\boxed{a_{n+2} = \alpha^2 \text{、} a_{n+1} = \alpha \text{、} a_n = 1 \quad \text{（もっと簡単にいうと} a_n = \alpha^n\text{）}}$$

としたものじゃないか。

【分数漸化式】

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{ra_n + s}{pa_n + q}} \quad \cdots\cdots(*)$$

どうバランスをとればいいかというと、右辺の分子のsを両辺にシェアして、

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{\bigcirc(a_n - \alpha)}{pa_n + q}$$

とするといいかもしれない。

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{ra_n + s}{pa_n + q} - \alpha = \frac{(ra_n + s) - \alpha(pa_n + q)}{pa_n + q} = \frac{(r - \alpha p)a_n + (s - \alpha q)}{pa_n + q}$$

これから、　$1:(-\alpha) = (r - \alpha p):(s - \alpha q)$　より　$\alpha(p\alpha + q) = r\alpha + s$　すなわち、

$$\alpha = \frac{r\alpha + s}{p\alpha + q}$$

なあんだ、これは(*)で、

$$\boxed{a_{n+1} = \alpha \text{、} a_n = \alpha}$$

としたものじゃないか。

【連立漸化式】

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}} \quad \cdots\cdots(*)$$

どうバランスをとればいいかというと、２式をまとめシェアして、

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \bigcirc(a_n - \alpha b_n)$$

とするといいかもしれない。

第１式－α×第２式より、$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = (p - \alpha r)a_n + (q - \alpha s)b_n$

これから、$1:(-\alpha) = (p - \alpha r):(q - \alpha s)$　より、$\alpha^2 r + \alpha s = \alpha p + q$　すなわち、

$$\alpha = \frac{\alpha p + q}{\alpha r + s}$$

なあんだ、これは、(*)で、

$$\boxed{a_{n+1} = a_n = \alpha \text{、} b_{n+1} = b_n = 1}$$

として、第１式、第２式を辺々割ったものじゃないか。