植木算と数列

札幌旭丘高校　中村文則

数列の一般項やその和には常に$(n-1)$項の捉え方が絡んでいる。

一般項は項とその添字の値との比較から、いつの間にか出現する$(n-1)$によって表されるが、そのことが理解されないまま、数列の和の中で扱われる項数nとの違いに翻弄されてしまう。本質を理解しないまま単元が終了してしまい結果として数列は苦手分野というレッテルが貼られる。$(n-1)$の秘密と仕組みを植木算の計算法から考察してみよう。

○ 植木算とは

和算は日本の歴史と文化が育んだ日本独自の数学である。その内容は非常に高度なものであり、西洋数学(洋算)と比較しても勝るとも劣らない。鎖国政策の布いた江戸時代において、外部の影響を受けずに庶民の趣味・娯楽として花開いた伝統文化であると同時に、庶民の生活の中に溶け込んだ実用数学いう面も併せ持っていた。

当時の大ベストセラー「塵劫記」(吉田光由)に記されるねずみ講の「ねずみ算」を始めとして、高校入試頻出問題である「旅人算」、パズルとして今も親しまれている「小町算」、小学校の授業の教材として扱われる「鶴亀算」、これらの現代でも強い影響を残している「○○算」といった計算法とその発想は、算額と呼ばれる額(絵馬)に書き込まれ神社や仏閣に奉納されて日本全国に広まっていく。

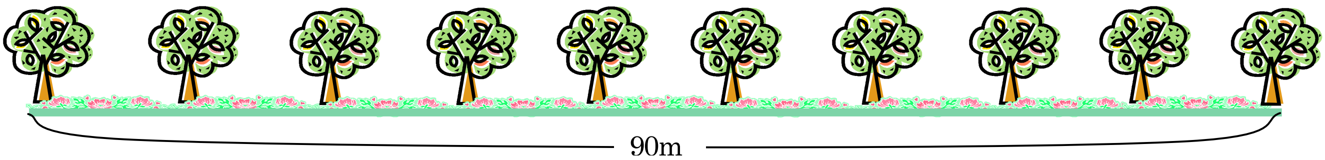
植木算もそうした和算のひとつである。その名が示す如く、植樹に関わる計算法であり、江戸時代の植木職人は経験的に身につけていたであろう実用的計算法である。具体例を示そう。

幅 90m の土手に、一直線に 10 本の木を等間隔に植えるには、何 m 間隔に植えればよいか。

安易に計算すると、

$$90 \div 10 = 9(m)$$

となるが、これは誤りである。下図をみると、実際は 10m 間隔に植えればよいことが分かる。



等分するものは「木」ではなく、木と木の間の土手の距離部分である。木と木の間は9箇所に等分割されるから、

$$90 \div (10-1) = 10(m)$$

が正解である。植える木そのものより「木と木の間」のスペースに注目する計算が植木算であるといえる。

○ 数列を学ぶ前に

前述の植木算の問題を、

幅 90 メートルの土手に一直線に、10 メートル間隔に木を植えるには何本植えればよいか。

と変えてみよう。計算式

$$90 \div 10 = 9$$

は木と木の間の個数を求めたことになる。したがって、木の本数は、

$$9 + 1 = 10(本)$$

である。 ここで、木が等間隔に並ぶことは、左端の木を起点として右方向に木が等差数列をなして植えられることになる。木は項(数)を、木と木の間隔は公差を表している。このように、

木の本数　⇒　項数 木と木の間の個数　⇒　項と項の間の個数

と対応させることで、数列の原理がみえてくる。nは項数であり、$(n-1)$は項と項の間の個数である。

この原理の理解が不十分なまま、マニュアル的に数列の公式を作り出していくと、数列の先っぽが見えなくなっていく。幾つかの植木算で、この感覚を養ってみよう。

あるデパートのエレベータは1階から4階まで上るのに12秒かかる。このエレベータで1階から10階まで上るのに何秒かかるか。

もちろん、

$12 \div 4 = 3$(秒)　$3 \times 10 = 30$(秒)

ではない。1階から4階までの階と階の間は3箇所である。

その3箇所を通過する平均時間は

$12 \div (4-1) = 4$(秒)

次に、10階まで上るには、$(10-1)$部分の階と階の間を通過すればよい。

$4 \times 9 = 36$(秒)

が正解である。なお、この問題の前半部分を

「7回から10階まで上るのに12秒かかる」

と変更すると、誤った解釈により正答率は上る。

4時の時報を聞き終わるのに6秒かかる。では、6時の時報を聞き終わるには何秒かかるか。

これも、エレベータと同種の問題である。
時報は長針が12を指したところから鳴り始めるわけだから、鐘と鐘の間の間隔は、

$6 \div (4-1) = 2$(秒)

である。6時までには、(6−1)の間隔があるから、

$2 \times 5 = 10$(秒)

となる。この問題の後半を

「時報を聞いて、6時と分かるには何秒必要か」

と換えてみると面白いかもしれない。

円周100mの円形の池の周りに、柵を5m間隔に設置したい、何本の柵が必要か。

計算式、

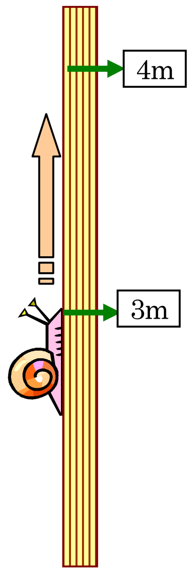
$100 \div 5 = 20$

で得られるのは、柵と柵の間が20箇所あるということである。

このとき、柵の本数は、一直線に並べる場合は21本であるが、円形の場合は事情が異なる。線分の両端にある柵は、円形にすることで1つに重なってしまう。これから円形の場合の植木算は、「柵の本数」と「間の個数」が一致する。

よって、正解は20本である。

地面にいるカタツムリが10mの高さの木を登り始めた。20分で2mを等速度で上るが根性がないので20分経ったら必ず10分休む。その休んでいる間に1mずり落ちてしまう。では、現在3m地点を通過したカタツムリが木のてっぺんに辿り着くには何分かかるか。



よくパズルとして出題される問題をアレンジしてみた。

2m登って1m落ちるわけだから、このかたつむりは30分で1m登っていることになる。現在3m地点だから、あとどれだけ登ればいいかを考えてみよう。この場合の距離は「間隔」のことだから

$10 - 3 = 7(m)$

を登ればよいが、よく考えないと「仕掛けの落とし穴」に落ちる。

まず、3m地点では、かたつむりの動き方はどういう状態であろうか。

すなわち、

休んだ後、1m地点にいて2m登った地点(登りきった点)

休んだ後、2m地点にいて1m登った地点(登る途中の点)

のいずれかであるかを調べなくてはならない。

これは文章中で「3m地点を通過」とあるから、登る途中の点であることが分かる。

ここで、カタツムリは「等速度で上る」とあるから、2m地点から1m登るには10分かかり、それから10分後に4m、その後10分後にはずり落ちて再び3m地点にいる。したがって、現在の地点から3mの高さに再び来るまでに要する時間は20分である。この後さらに、残り7mを登ると考える。

これから、

30(分)×7=210(分)

に 20(分)を加えればよいかというと、ここにも落とし穴がある。

それは、この地点は「落ちてきたときの点」であるということである。この地点の 10 分前にはかたつむりは空中の 11m 地点に(飛んで)いるというありえない状況になっている。このことから、最終的に 9m 地点に落ちた点から 10 分前が頂上に達した点ということになる。よって、

20(分)＋30(分)×6−10(分)=190(分)

となるのである。

これを、もう少し要領よく考えれば、現在は「上り始めている」3m 地点であるから、ここを起点とすると、次の上り始めている 3m 地点を通過するのに 30 分かかることになる。したがって、上り始めている 9m 地点を通過するには、

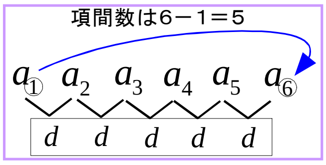
30(分)×(9−3)=180(分)

かかることから、この 10 分後に頂点に達する。

このような植木算を用いた問題を考え思考力を柔らかくすることで、間接的に数列の原理が理解できてくる。

○ 等差・等比数列の一般項

等差数列の一般項を、植木算を用いて示してみよう。



公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ は、隣接2項の差が公差であるから、公差は項間の部分の数である。項を加えて次の項が生成することは、項間の公差を加えていることになる。すなわち、第6項 a_6 は、第 1 項 a_1 に、6項と1項の間にある、項間数(6－1)個の公差を加えるから、

$$a_6 = a_1 + 5d$$

である。一般項を第 n 項とすると、第1項と第 n 項の項間数は $(n-1)$ であり、この分の公差 d を加えればよい。

したがって、一般項は、

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + \underline{(n-1)}d$$

である。これを、初項を $a_1 = a$ として、$a + (n-1)d$ とすべきではない。添字の数の差が項間数を示していることが重要なのである。

このことは、一般項の表現が初項を基点に必ずしも表されるべきではないことを示す。

例えば第3項を出発点とすると、第 n 項までの項間数は、$(n-3)$ であるから、

$$a_n = a_3 + (n-3)d$$

である。第 m $(1 \leqq m \leqq n-1)$ 項を基点にすると、$(n-m)$ の項間にある公差を加えて、

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

である。本来はこれを等差数列の一般項とすべきであろう。

このように、項間数を植木算として求めることで、等比数列の一般項も容易に得られる。

等比数列の場合は、項間に公比を乗ずるわけだから、第1項を基点にした場合、$(n-1)$ 項間であることより、

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

である。第 m 項を基点にした場合は、$(n-m)$ 項間の公比を乗じて、

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

が得られる。

$$a_n = a_m + \underline{(n-m)}d$$

$$a_n = a_m \cdot r^{\underline{n-m}}$$

例 1) 第 3 項が 10、第 7 項が 22 である等差数列の一般項

解) 公差を d とすると、

$10 + (7-3)d = 22$　より、$d = 3$

よって、一般項は、

$$a_n = a_3 + (n-3)d = 10 + 3(n-3) = 3n + 1$$

例 2) 第 2 項が 6、第 5 項が 48 である等比数列の一般項

解) 公比を r とすると、

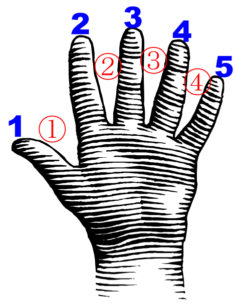
$6r^{5-2} = 48$　より、$r^3 = 8$

r は実数であるから、$r = 2$

よって、一般項は、

$$a_n = 6r^{n-2} = 6 \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

○階差数列の一般項



数列の「項数」と「項間数」の関係は、手の指と、指の間の付け根(指の股)の数との関係から理解することができる。親指、人差し指、中指、薬指、小指をそれぞれ、a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 に対応させ、指の股が植木算から得られる項間数としよう。このように掌に植木算の原理をまとめておけば、いつでも思考再現をすることが可能であろう。

さて、数列においては、項間数が一定値 d である場合は等差数列となる。値が変化し、ひとつの数列を形成する場合にそれらの数の並びを階差数列として定義する。いずれにしろ、項間で成立する原理は植木算と同じである。

したがって、階差数列の項数は、植木算より $(n-1)$ 項であるから、階差数列の一般項を $\{b_k\}$ とすると、第 1 項に異なる数(距離)である($(n-1)$ 項を加えればよい。

Σを用いて表される $\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ の $(n-1)$ と、等比数列・等差数列に出現する $(n-1)$ は同じ植木算による項間を個数を表している。当然、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

においても、a_1 と a_n の項間の数 $(n-1)$ は強調されるべきで、a_1 は a とすべきではない。

この場合も起点はどこでもよいことになる。a_m を起点とし、そこから作られる階差数列 $\{b_k\}$ を求めて、a_n との項間数である $(n-m)$ 項を加えればよい。

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$$

$$\boxed{b_1, b_2, \cdots\cdots\cdots, b_{n-m}}$$

$$a_n = a_m + \sum_{k=1}^{n-m} b_k$$

例 3) 次の数列の一般項を求めよ。

1, −1, −1, 1, 5, 11, ⋯⋯

解)

階差数列の一般項は、初項−2 、公差 2 の等差数列より、$b_k = 2k-4$

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & -1, & -1, & 1, & 5, & 11, & \cdots\cdots \\ & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots\cdots \end{array}$$

$$\therefore \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-4) = n^2 - 5n + 5 \quad \cdots\cdots①$$

である。これを、数列の第3項を起点とすると、階差数列の一般項は $b_k = 2k$ であるから、

$$a_n = a_3 + \sum_{k=1}^{n-3} b_k = -1 + \sum_{k=1}^{n-3} 2k = n^2 - 5n + 5 \quad \cdots\cdots②$$

である。ただし、①は $n \geqq 2$ 、②は $n \geqq 4$ という制約がつくが、これらは無視することになる。

もっと極端にいうと、第 1 項の前に第 0 項を作ると階差数列の値の変化から、$a_0 = 5$ であり、階差数列の一般項は $b_k = 2k-6$ である。よって、

$$\begin{array}{cccccccc} 5, & 1, & -1, & -1, & 1, & 5, & 11, & \cdots\cdots \\ & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots\cdots \end{array}$$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k = 5 + \sum_{k=1}^{n}(2k-6) = 5 + \frac{1}{2}n\left(-4 + 2n - 6\right) = n^2 - 5n + 5$$

項の制約もなくなり、少しは見通しがよくなる。

○平面上での植木算

植木算は、直線上では線分を分割する点の個数を求めるものである。

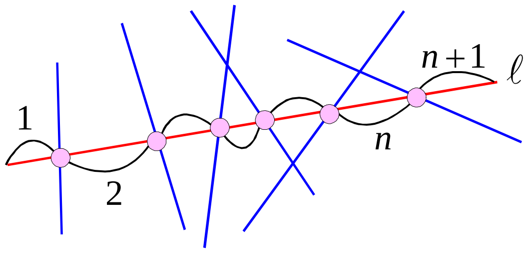
これは平面上で置き換えると「平面を分割する直線の個数」となり、空間内では、「空間を分割する平面の個数」となる。

したがって、平面分割や空間分割の問題には植木算の原理が用いられる。

> Ex1) 平面上にある n 本の直線は、どの 2 本も平行でなく、どの 3 本も 1 点で交わらないとき、これらの直線による平面の分割数を求めよ。

n 本の直線により、平面の最大分割領域数を求める問題である。

n 本による平面の分割数を a_n 個とするとき、新たに加える直線 ℓ により、どれだけ平面が増えるかを考える。



この直線 ℓ と、すでに存在する n 本の直線との n 個の交点により、直線 ℓ が分割される線分または半直線の個数は、植木算より $(n+1)$ 本で

ある。この $n+1$ 本により、平面は新たに $n+1$ 個の領域が増える。
平面の $n+1$ 本の直線による最大分割数は a_{n+1} であるから、

$$a_{n+1}=a_n+n+1$$

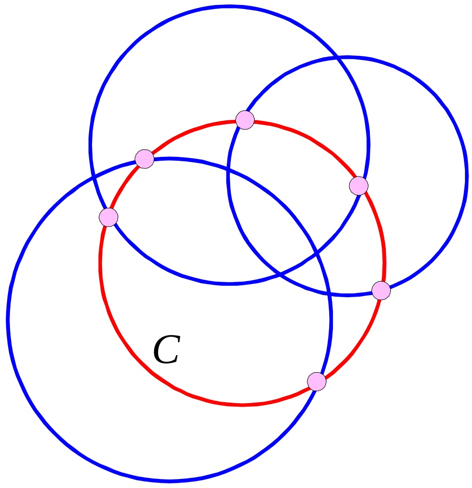
なる関係式が成立する。これから、

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$$

この問題を

Ex2) 平面が、n 本の円により分割される最大個数を求めよ。

としてみよう。



この場合は、n 本の円による最大分割個数を a_n とし、これに円 C を加えると、円 C はすでに存在する n 本の円のそれぞれと交点を 2 つもつ。したがって交点の個数は $2n$ 個である。このとき、円 C は、円形の植木算により $2n$ 個の円弧に分割される。この $2n$ 個の円弧により、平面には新たに $2n$ 個の平面が増える。以上より、

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}2k=n^2-n+2$$

が得られる。

これらの解法の原理は、「点による直線または円の分割」、すなわち、直線上の植木算であり、平面上の植木算は、「1 つの平面は 1 つの直線により 2 つの領域に分割される」ことのみで用いられている。平面の分割は 1 つ次元が下がった直線上の植木算に依るということである。
したがって、空間の分割には平面上の植木算が用いられる。

Ex3) 空間が、n 枚の平面により分割される最大個数を求めよ。

n 枚の平面による空間の最大分割個数を a_n とする。これにさらに平面 α を加えると、平面 α は既に存在する n 枚の平面と交わり、それぞれ 1 本の交線ができる。その交線の総数 n 本が平面 α を分割する最大個数は、前述 Ex1)の問題により、

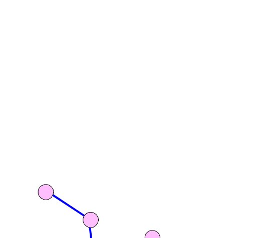
$$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

である。これらの平面により、空間はさらに2つに分割されるから、

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

これから、

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(k^2+k+2)=\frac{n^3+5n+6}{6}$$



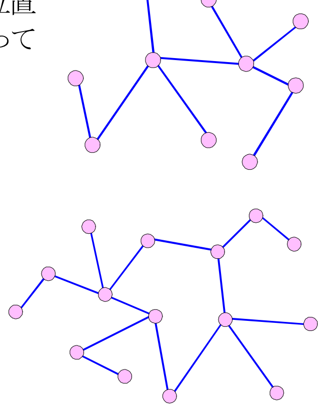
江戸時代に発達した和算の一つである植木算は、現代数学においても思考の中枢に位置する。例えばグラフ理論において、頂点(ノード)と辺(エッジ)の個数の関係は、辺によって閉じている領域がなければ、

(頂点の総数) ＝(辺の総数)＋1

であり、閉じている領域が 1 つあれば、

(頂点の総数)＝(辺の総数)

である。この性質は、それぞれ、点による線分分割、点による円分割の植木算である。



グラフ理論は18世紀の頃、オイラーが一筆書きの可能性を論じた(否定的に解決された)「ケーニヒスベルクの橋渡り」問題を原点とするといわれるが、このとき、日本は江戸時代。グラフ理論の概念の発端は日本の中にも芽生えていたことになる。
温故知新は、いつの時代にあっても忘れてはならないことである。