角の二等分線の性質を狩る

札幌旭丘高校　中村文則

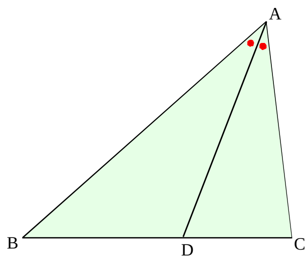
○はじめに

三角形 ABC の頂角 A の二等分線を，正確に引けない生徒が意外と多いことに驚く．

辺 BC の中点と交わり、なぜか中線になってしまう．「角の二等分」から「辺の二等分」へと安易に結びつけているのである．定規とコンパスによる角の二等分の作図は知っていても，その角が三角形の内角となると別問題となってしまうのだ．

三角形の頂角の二等分線には面白い性質がある

> 三角形 ABC の頂角 A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，
> $AB : AC = BD : DC$
> である．



この性質はよく使われるが，何故か性質の名はない．中線定理，方べきの定理，接弦定理といった諸定理と比較しても遜色のない価値ある性質であるのに「二等分線の性質」というように(こういう言い方をするかどうかも曖昧であるが)ぞんざいに扱われている．証明も三角比の単元において二辺挟角の面積公式の演習問題として，BC の分点を面積比較で求める程度である．しかし，実際はその証明は角の二等分線の作図法に裏打ちされたものであり，補助線の幾何学からも随分面白く興味あるものなのである．以下，二等分線の性質に見え隠れする性質を少し狩りだしてみよう

○初等幾何的証明法

(a)二等辺三角形の底角を利用した証明法

証明) 辺 AB の A の延長上に $AC = AE$ となる点 E をとる．

三角形 ACE は$\angle ACE = \angle AEC = \theta$ である二等辺三角形．

$\angle BAC = \angle ACE + \angle AEC = 2\theta$

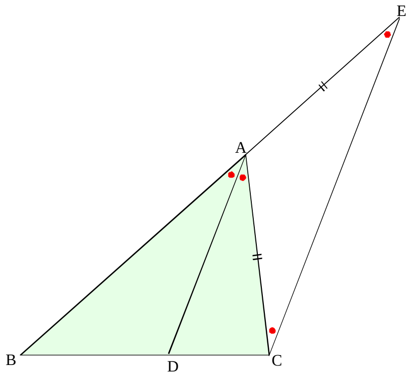
また，$\angle BAD = \angle CAD$ であるから，$\angle DAC = \theta = \angle ACE$

よって，錯角が等しいから，

$AD // EC$

これから，

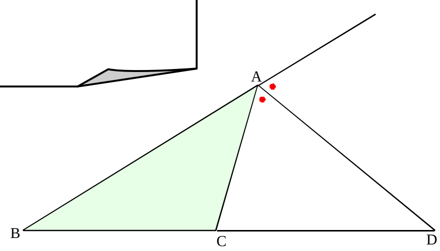
$BD : DC = BA : AE = AB : AC$



Q.E.D

ところで，この性質は外角の二等分線についても成立する．

> 三角形 ABC の頂角 A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とすると，
> $AB : AC = BD : DC$
> である．



証明は，内角の二等分線の場合が BA の延長(外分)上に点 E をとったのに対して，外角の場合は，$AB > AC$ のとき，AB 上に $AE = AC$ なる点 E をとる．

三角形 ACE は$\angle ACE = \angle AEC = \theta$ である二等辺三角形であり，

BA の延長上の点を X とすると，

$\angle XAC = \angle ACE + \angle AEC = 2\theta$

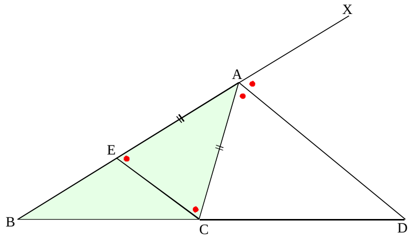
また，$\angle CAD = \angle DAX$ であるから，$\angle DAC = \theta = \angle ACE$
よって，錯角が等しいから，

$$AD \,//\, EC$$

これから，

$$BD : DC = BA : AE = AB : AC$$

ほぼ，内角の二等分線と同じ証明を得る．



ところで，この証明の核となる線分 AE は補助線とみることができるがけっして発想から生み出されたものではない．これは角の二等分線の作図法が，

二等辺三角形の中線は底辺の垂直二等分線

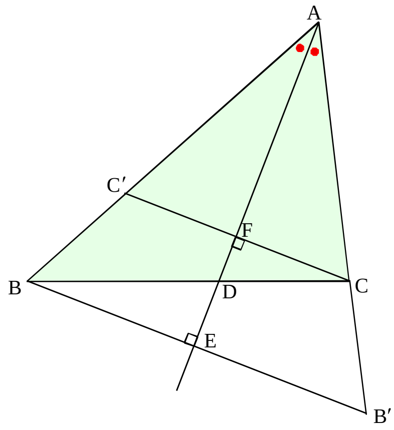
であることを利用したものであり，そこに二等辺三角形 ACE を作る必然が生まれるのである．
しかしながら点 E は内角の二等分線は線分 AB の外分に，外角は内分にとるわけで，この辺りが発想の妙といってしまえばそれまでであるが，必ずしも「理想的な証明」とは思わないのである．ただ，AB 上にとられた E に対して，内角，外角の二等分線の性質の証明はどちらもまったく同じように展開，帰結していく．補助線は，図形の性質の拡張に対してもこのように自然に適用されるべきものであろう．
このことを踏まえ，別証明を考えてみよう．
改めて，角の二等分線の性質を確認する．

> 三角形 ABC の頂角 A の二等分線と辺 BC 上またはその延長上との交点を D とすると，
> $$AB : AC = BD : DC$$
> である．

ここで，頂角 A の二等分線とは，内角・外角の二等分線である．

(b)直角三角形の相似を利用した証明法

二等辺三角形を作るには，$AB = AB'$ となる点 B' を辺 AC またはその延長上にとればよい．
このとき，角の二等分線と三角形 ABB' との交点を E とすると，$AE \perp BE$ である．すなわち二等辺三角形を作るとは点 B から角の二等分線に垂線を下ろすことである. このことを証明に利用してみよう.



証明) 2点 B, C から角の二等分線 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ E, F とする．

$\triangle ABE$ と $\triangle ACF$ において，

$$\angle BAE = \angle CAF\ ,\quad \angle BEA = \angle CFA = \angle R$$

であるから，

$$\triangle ABE \backsim \triangle ACF$$

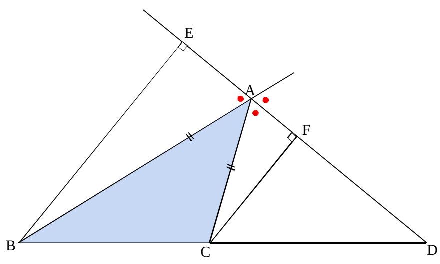
よって，$AB : AC = BE : CF$
また，$\triangle BED \backsim \triangle CFD$
であるから，

$$BE : CF = BD : DC$$

以上より，$AB : AC = BD : DC$

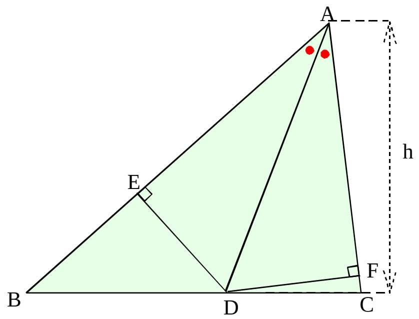
Q.E.D

外角の二等分線の場合においてもそのまま内角の二等分線の性質の証明が適用される．
右図において，上の証明をなぞっていくと，自然と証明が終わることが分かるだろう．



次に，面積比較により間接的に比の値を求めることを考えてみよう。

(c)面積比較による方法



証明)　点 A から対辺 BC に下ろした垂線の長さを h とすると,

$$\triangle ABD : \triangle ACD = \frac{h}{2}BD : \frac{h}{2}DC = BD : DC$$

　また, 点 D から辺 AB, AC またはその延長線に下ろした垂線の足を, それぞれ E, F とする. $\triangle AED \equiv \triangle AFD$ であるから,

$DE = DF$.

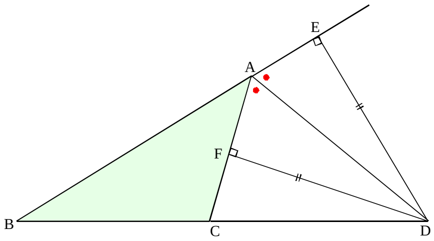
これから,

$$\triangle ABD : \triangle ACD = \frac{DE}{2}AB : \frac{DF}{2}AC = AB : AC$$

以上より,

$$\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC = BD : DC$$

Q.E.D

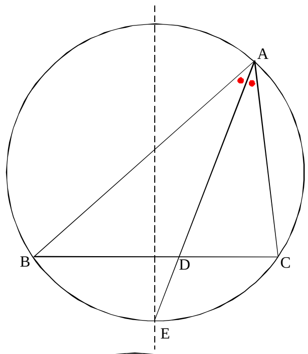


また, 外角の場合も右図から同様に証明することができる.
なお, 内角の二等分線の場合の証明は

$$\triangle ABD = \frac{1}{2}AB \cdot AD\sin\theta,\ \triangle ACD = \frac{1}{2}AC \cdot AD\sin\theta \qquad (\angle BAD = \angle CAD = \theta)$$

とみることで三角比の演習問題として扱われるものである.

(d)外接円を利用する証明



　角の二等分線の作図には, 三角形 ABC の外接円を利用することからも可能である.
　円に内接する三角形 ABC に対して, BC の垂直二等分線と円弧との交点を E とすると, $BE = EC$ であるから円周角の定理から AE が角 A の二等分線である. これから, 次の証明が考えられる.

証明) $\angle AEB = \angle ACD$ (円周角)より, $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$ であるから,

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC} \quad \cdots\cdots①$$

$\triangle DAC \backsim \triangle DBE$ であるから,

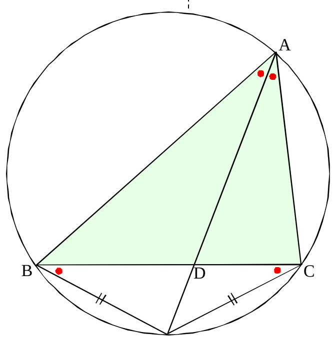
$$\frac{BE}{DB} = \frac{AC}{AD} \cdots\cdots②$$

①, ②を辺々掛けて

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC}$$

$\therefore \quad AB : AC = BD : DC$

Q.E.D



外角の二等分線については,

$\angle BAE = \angle XAD = \angle DAC$

$\angle BEA = \angle ACD$　より, $\triangle AEB \backsim \triangle ACD$

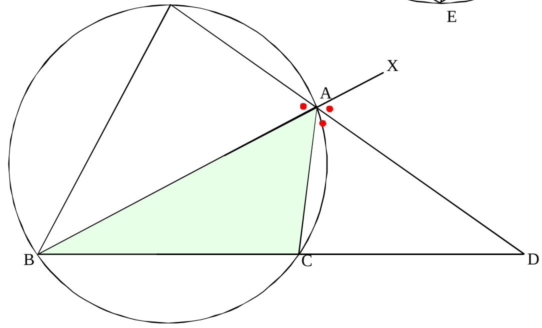
$$\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC} \quad \cdots\cdots①$$

また, $\triangle DAC \backsim \triangle DBE$ より,

$$\frac{BE}{DB} = \frac{AC}{AD} \quad \cdots\cdots②$$

①, ②を辺々掛けて,

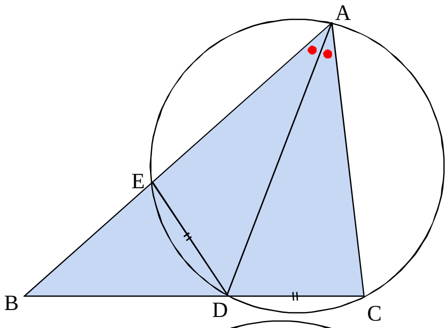
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC}$$



内角の二等分線と同じ流れで証明が得られる.

ここで，三角形 ABC の外接円は補助円の役目を果たしているが，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき， ΔADC の外接円を補助円と考えて証明を試みてみよう．

(e)補助円による証明



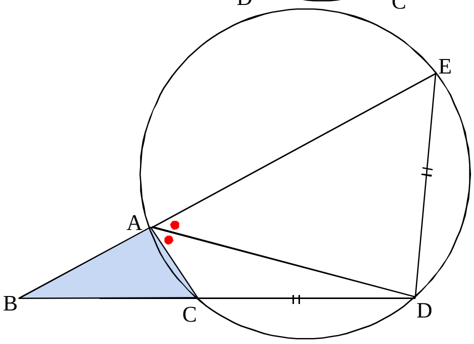
証明) ΔADC の外接円と辺 AB との交点を E とすると，
円周角の性質より，

$$ED = DC$$

ΔEBD∽ΔCBA であるから，

$$AB : AC = BD : DE = BD : DC$$

Q.E.D



外分点についても ΔACD の外接円を考え、 BA の延長線と外接円との交点を E とすると、

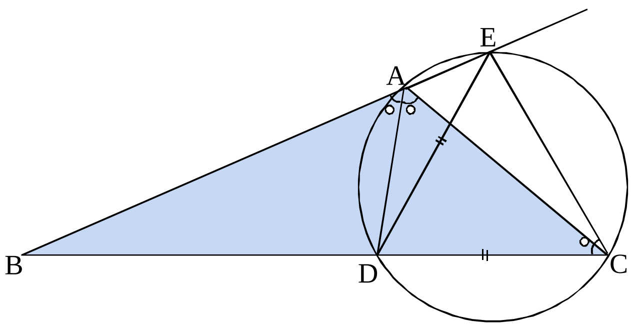
ΔABC∽ΔDBE

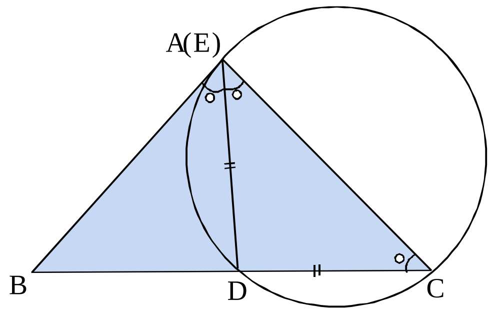
であることより，

$$AB : AC = BD : DE = BD : DC$$

となる．

本証明は直感的にもっとも分かりやすく簡潔なもののように思われるが内角の二等分線の場合， ΔACD の外接円と辺 AB との交点 E は辺 AB の内分点となるとは限らない．
三角形 ABC の形状によって， AB の外分上あるいは，頂点 A と一致(線分 BA は A を接点とする外接円の接線)することもある．また，外角の二等分線に対しても点 E は同様のことがいえる．その証明は，上記のものをそのままなぞることで得られるが，その場合分けを考えれば，直感的には分かり易いこの証明は，厳密にはもっとも難しいものであるかも知れない．

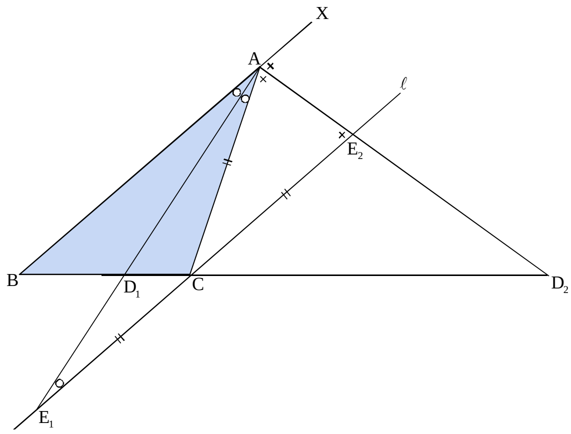




では，内角・外角の二等分線のもっとも簡単な証明法は何であろうか．

(f)平行線を補助線とする証明．

辺 AB に平行で，頂点 C を通る直線 ℓ を利用すると，次のように証明できる．



証明) 角の二等分線と直線 ℓ との交点を E とする．

$\angle CEA = \angle BAD$ (錯角)

また， $\angle BAD = \angle CAE$ であるから，

$\angle CEA = \angle CAE$

これから，三角形 CAE は二等辺三角形である．

$\therefore\ CE = AC$

また， ΔDAB∽ΔDEC であるから，

$$BD : DC = AB : EC = AB : AC$$

Q.E.D

外角の場合の証明は，

$\angle XAD = \angle CEA$ (錯角)

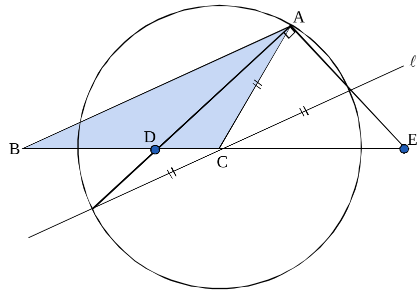
および， $\angle CAE = \angle XAD$ より，

$\angle CEA = \angle CAE$

以下，三角形CAE が二等辺三角形であることから証明することができる．

この証明は「二等辺三角形の底角を利用した証明」において，二等辺三角形から平行線を作る過程を逆に辿ったものでが，証明としてはこちらの方が見通しがよくなる．

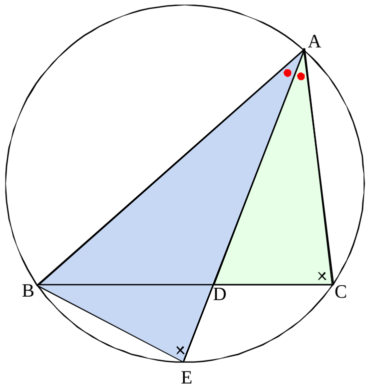
また，角の二等分線の作図も点C を通り AB に平行な直線ℓがある程度正確に引くことができれば，点C を中心とする半径 AC の円を描くことで容易に内角，外角ともにその二等分線が引けるのである．



○二等分線の長さ

頂点 A から対辺 BC に引いた二等分線の長さ AD を求めてみよう．

> 三角形 ABC の内角 A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，
> $$AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot DC$$
> である．



証明) $\angle BAE = \angle DAC$，$\angle BEA = \angle DCA$　より

$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

よって，$AB : AE = AD : AC$

$$\begin{aligned} AB\cdot AC &= AD\cdot AE \\ &= AD(AD+DE) \\ &= AD^2 + AD\cdot DE \end{aligned}$$

方べきの定理より，

$$AD\cdot DE = BD\cdot DC$$

$$\therefore \quad AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot DC$$

Q.E.D

ここで，$AB = c, BC = a, CA = b$ とすると，

$BD : DC = AB : AC = c : b$ であるから，

$$BD = \frac{ca}{b+c}, CD = \frac{ba}{b+c}$$

よって，

$$\begin{aligned} AD^2 &= bc - \frac{ca}{b+c}\cdot\frac{ba}{b+c} \\ &= \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

この公式は三角形の３辺の長さが与えられたとき，余弦定理を$\triangle ABD$，$\triangle ABC$ でそれぞれ使い，機械的に計算することでも得られ，三角比の問題として扱われる．

また，一般に，頂点とその対辺上の点を結ぶ線分の長さは，スチュアートの定理(中線定理の拡張)により次式で求めることも可能である(スチュアートの定理はベクトルで簡単に証明できる)．

> **スチュワートの定理**
>
> 三角形 ABC において，辺 BC を $m:n$ の比に内分する点を D とすると，
> $$nAB^2 + mAC^2 = \frac{mn}{m+n}BC^2 + (m+n)AD^2$$
> が成立する．

ここで，$m=c, n=b$ としてよいから，スチュワートの定理に代入すると，

$$bc^2+cb^2=\frac{bc}{b+c}a^2+(b+c)AD^2$$

これから上述の式が得られる．

次に，角 A の外角の二等分線については，内角同様に考えると，

$\angle CAD=\angle DAX=\angle BAE$

$\angle BEA=\angle ACD$　より，

$\Delta ABE \backsim \Delta ADC$

よって，

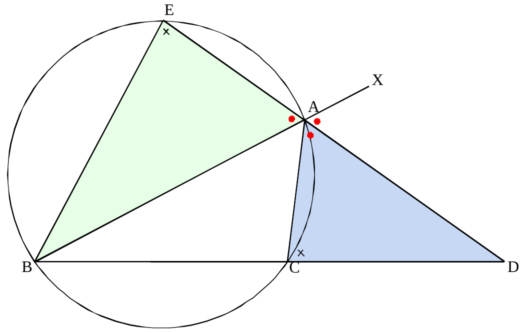
$$AB:AE=AD:AC$$

$$\begin{aligned}AB\cdot AC&=AD\cdot AE\\&=AD(DE-AD)\\&=AD\cdot DE-AD^2\end{aligned}$$

ここで，方べきの定理より，

$$AD\cdot DE=DB\cdot DC$$

$$\therefore\quad AD^2=BD\cdot DC-AB\cdot AC$$



以上より，角の二等分線の長さは次のようにまとめられる．

三角形 ABC の角 A の二等分線と辺 BC またはその延長との交点を D とすると，

$$AD^2=\left|AB\cdot AC-BD\cdot DC\right|$$

である．

○アポロニウスの定理

2点 A, B からの距離の比 $m:n\,(m\neq n)$ が一定である点 P は定円周上にある．

これをアポロニウスの定理という．特に直線 AB と定円との交点は，線分 AB を $m:n$ の比に内分・外分する点であるから，角の二等分線がこの定理に関係していることが予想できる．角の二等分線の性質から証明を試みてみよう．

証明)

直線 AB 上にない点 P に対して，三角形 PAB を考える．

また，直線 AB 上において，線分 AB を $m:n$ の比に内分・外分する点をそれぞれ C, D とする．

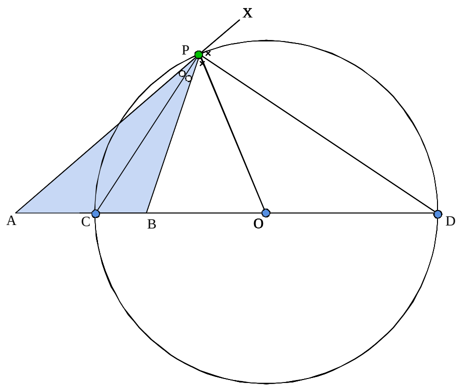
このとき角の二等分線の性質により，直線 PC, PD はそれぞれ $\angle APB$ の内角，外角の二等分線である．

線分 AP の P の延長上の点を X とすると，

$$\angle CPD=\angle CPB+\angle BPD=\frac{1}{2}\left(\angle APB+\angle BPX\right)=90^\circ$$

よって，点 P は，線分 CD を直径とする円周上の点である．

Q.E.D



アポロニウス(Apoloniun:B.C.260-200)は，アレキサンドリア学派のユークリッド，アルキメデスと並ぶ三代数学者の１人である．彼は当時の数学者がユークリッド幾何の伝統にたち構築・発展させた円錐曲線に関する理論を集大成し、8 巻よりなる「円錐曲線論」を書き上げる．この中で彼は空間概念を導入し，円錐を切り分けて割線による比の長さから幾何的に諸性質の証明を試みているが，そこに射影幾何学の萌芽をみることができるのである．

彼の書物の１つに上述のアポロニウスの定理があり，この定理により得られる定円をアポロニウスの円

という．

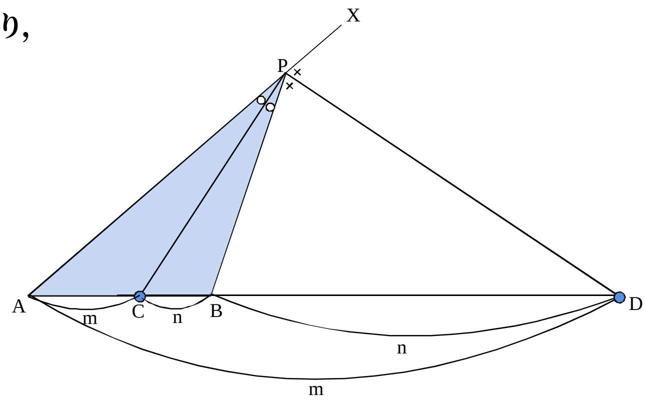
ただ，既にアリストテレスは虹が半円形の円弧を描くことを数学的に証明するときにこの性質を利用したといわれており，この定理はアポロニウスが見つけたものではないともいわれている．

ところでアポロニウスの円の半径は，前述した角の二等分線の長さから求めることができる．

$$PC^2 = PA \cdot PB - AC \cdot CB$$
$$PD^2 = AD \cdot DB - PA \cdot AB$$

また，三角形PCDが直角三角形であることより，

$$CD^2 = PC^2 + PD^2$$
$$= AD \cdot DB - AC \cdot CB$$



となる、さらに、もっと単純に考えるならば，

$$CD = CB + BD$$
$$= \frac{n}{m+n} AB + \frac{n}{m-n} AB$$
$$= \frac{n(m-n)+n(m+n)}{(m+n)(m-n)} AB$$
$$= \frac{2mn}{m^2-n^2} AB$$

よって，円の半径は$\frac{mn}{m^2-n^2} AB$である．

では、この半径を円の中心との関係を考えながら求めてみよう．

次の補題を用意する．

(補題A)
三角形PABの頂角Pおよびその外角の二等分線と辺ABおよびその延長との交点をC, Dとし，CDの中点をOとすれば，OPは三角形PABの外接円に接する．

証明)

$$PA : PB = AC : CB = AD : DB \quad \cdots\cdots(*)$$

点Oは，線分CDの中点であるから，

$$OC = OD = r$$

とおくと，(*)より，

$$AC \cdot DB = CB \cdot AD$$

よって，

$$(OA - OC)(OB + OD) = (OC - OB)(OA + OD)$$
$$(OA - r)(OB + r) = (r - OB)(r + OA)$$

これを展開して整理し，

$$r^2 = OA \cdot OB$$

ここで，$\angle CPD = 90°$であるから，

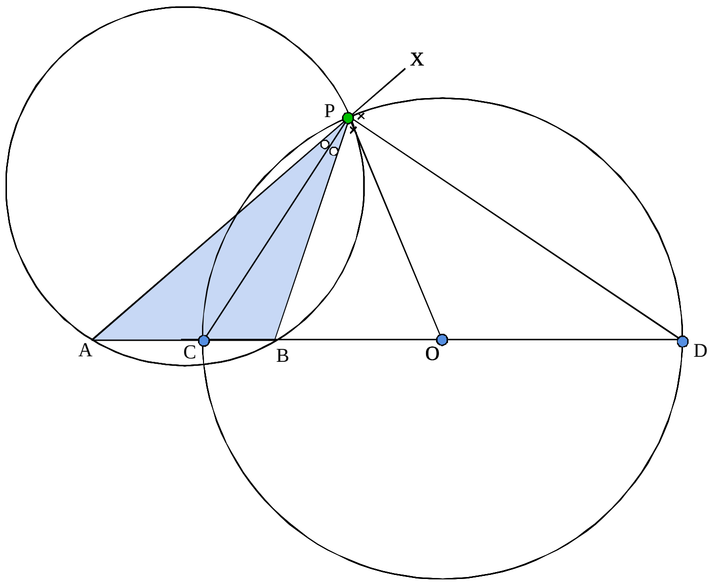
点Pは線分CDを直径の両端とする円周上の点である．

よって，$OP = r$．

$$\therefore \quad OP^2 = OA \cdot OB$$

方べきの定理の逆により，

OPは三角形PABの外接円に接する．



Q.E.D

補題Aより，$OP^2 = OA \cdot OB$であるから，

アポロニウスの円の半径は$\sqrt{OA \cdot OB}$である．

また，ΔOPBとΔPAOにおいて，OPは三角形PABの接線であるから，接弦定理より，

$$\angle OPB = \angle PAO$$

$\angle$POA を共通角とみると，二角が等しいから

$\Delta OPB \backsim \Delta OAP$

である．よって，

$OP : BP = OA : AP$ より，$OA = \dfrac{OP \cdot AP}{BP}$

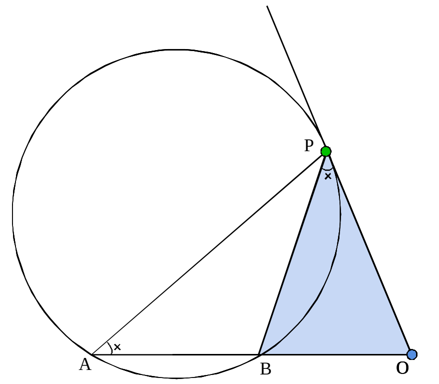
$OB : BP = OP : PA$ より，$OB = \dfrac{BP \cdot OP}{AP}$

これから

$$AO : OB = \frac{OP \cdot AP}{BP} : \frac{BP \cdot OP}{AP}$$
$$= AP^2 : BP^2$$
$$= m^2 : n^2$$

よって，点 O は，AB を $m^2 : n^2$ の比に外分する点である．

以上より，アポロニウスの円は次のようにまとめられる．



２定点 A, B からの距離の比 $m : n (m \neq n)$ が一定である点 P の軌跡は

線分 AB を $m^2 : n^2$ の比に外分する点 O を中心とし，

半径 $\sqrt{OA \cdot OB} = \dfrac{mn}{m^2 - n^2} AB$

である円である．

○二等分線にみる調和点列

線分 AB を一定の比に内分・外分する２点をそれぞれ P, Q とすると，

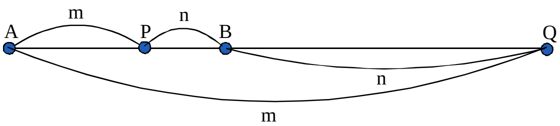
$AP : PB = AQ : QB$

を満たす．このとき，点 P, Q は線分 AB を調和に分けるといい，４点 A, B; P, Q は調和点列をなすという．

三角形 ABC の頂点 A の内角・外角の二等分線と対辺 BC またはその延長との交点をそれぞれ，D, E とするとき，

$AB : AC = BD : DC = BE : EC$

であるから，４点 B, C; D, E は調和点列をなす．



角の二等分線にみる調和点列の性質を調べてみよう．

(1) 調和数列と調和点列

B, C; D, E が調和点列をなすとき，線分 BD, BC, BE は，この順に調和数列をなす．

証明)

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BE}{EC}$ であるから，

$$\frac{BD}{BC - BD} = \frac{BE}{BE - BC}$$

よって，

$$\frac{BC}{BD} - 1 = 1 - \frac{BC}{BE}$$

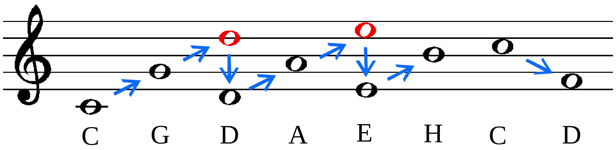
$$\therefore \quad \frac{1}{BD} + \frac{1}{BE} = \frac{2}{BC}$$

これから，$\dfrac{1}{BD}, \dfrac{1}{BC}, \dfrac{1}{BE}$ は等比数列をなすから，その逆数は調和数列である．

Q.E.D

(閑話休題)

調和点列の意は，上の事実によるものである．
調和数列の例の１つとして，ピタゴラス音階がある．
ピタゴラスは，音楽に潜む美を追求し，「神の調べ」である協和音に興味を持ち，研究したといわれる．
キタラという弦楽器の弦の長さと数学的な比の関係を調べ，長さ 1 の弦を $\frac{1}{2}$ の長さにしてつま弾くと音の高さが 1 オクターブ上がり，$\frac{2}{3}$ の長さにしてつま弾くと，長さ 1 の音と美しく協和することを発見した．1 の長さをドとすると，$\frac{2}{3}$ の長さはソであり，これを完全 5 度の協和音という．また，オクターブ上のドを完全 8 度の協和音という．この３つの長さは，その逆数をとると，



$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2}$$

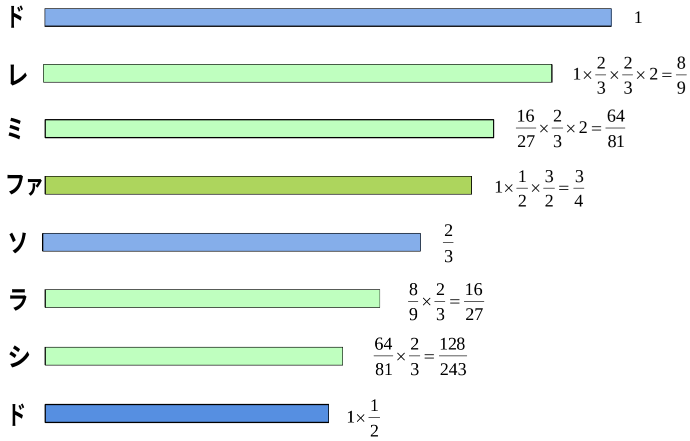
となり，調和数列になるのである．
そしてこの３音を基音にすることで他の音をすべて作り出すことができる．例えば，ファはオクターブ下のドと完全 5 度であることより，

$$1\div\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

ドとファの音を完全 4 度の協和音という．
また，ソとオクターブ上のレも完全 5 度であることより，レの長さは，

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{8}{9}$$

である．このように作っていくと各音階の長さは図のように表すことができる．音楽の歴史上，最初の音階といわれるピタゴラスの音階はやがて彼の弟子であるアルキュタスによって完成される．ただし，この音階は現在の平均律に比べると，全音の幅が広く，半音の幅が狭い音階になっており，３音以上重なると不協和音になってしまう．



****

さて，調和点列の性質を利用すると内角の二等分線から外角の二等分線を定規のみで作図することが可能となる．

> 三角形 ABC において，角 A の内角の二等分線上の任意の点 P とする．
> 直線 BP, CP と辺 AC, AB またはその延長との交点をそれぞれ Q, R とし，直線 QR と直線 BC との交点を E とすると，直線 AE は角 A の外角の二等分線である．

証明)

三角形 ABC において，点 P に関するチェバの定理より，

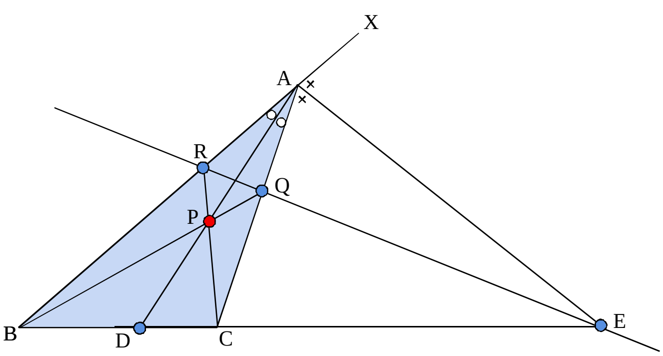
$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1 \quad \cdots\cdots①$$

また，三角形 ABC において，直線 QR に関するメネラウスの定理より，

$$\frac{RB}{AR}\cdot\frac{EC}{BE}\cdot\frac{QA}{CQ}=1 \quad \cdots\cdots②$$

①，②を辺々掛けて，

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{EC}{BE}=1$$



よって,

$$BD:DC=BE:EC$$

∴　角の二等分線の性質より点Eは，角Aの外角の二等分線と直線BCとの交点である．

Q.E.D

外角の二等分線は内角の二等分線ADが与えられれば，ADに垂直で点Aを通る直線を作図すると，それが外角の二等分線になる．これに対して上記の性質は，定規のみで作図が簡単にできることを表しているものである．

なお，角の二等分線上の点Pは，線分ADの延長上の点であっても上記の性質は成り立つ．

それは,メネラウスの定理が三角形の外側に引いた直線に対してもすべての辺の外分を考えれば成立し，チェバの定理も，三角形の外部の点においても成立することに拠っている．

また，本性質は，必ずしもADが角Aの二等分線である必要がないことも，その証明の過程をみると明らかであろう．

一般にB,C;D,Eが調和点列になるとき，点Eを２点B,Cに関する点Dの調和共役点という．
上記の性質は，２定点B,Cの点Eに関する調和共役点を求めるためには，線分BC上にない適当な点Aをとり，AD上の任意の点に対して上記の作図をすることで見出すことが可能であることを示しているのである。