組立除法の小手技

市立札幌旭丘高校　中村文則

○万能包丁ホーナー法

<先　生> 高次方程式の因数分解ではオプションツールとして組立除法を紹介したね。
<かず子> 剰余の定理では，整式を 1 次式で割るときの余りだけを求めますが，組立除法ではさらに商も求められるので，とても便利でした。
<先　生> 商は，通常の整式の割り算でも計算できるけど，組立除法の計算は他にどんなところがよかっただろう。
<よしお> 係数だけを抜き出して計算するので，計算の過程がとても分かりやすいと思います。
<アリス> 通常の割り算は引き算で次数を下げていきますが，組立除法は足し算なので計算ミスが少ないです。
<まなぶ> 最大の利点は省エネだろ。高い次数の割り算も僅か 3 行で計算できてしまう。
<かず子> まなぶらしい見方ね。でも，組立除法は，1 次式の割り算でしか利用できないし，それに 1 次の項の係数が 1 以外の場合は気を付けないと間違えてしまう。
<先　生> かず子は組立除法のよくないところも指摘してくれたね。そこで今日は，組立除法のいいとこどりとかず子の不安の解消を考えてみよう。最初に，次の問題を解いてみよう。

Ex1)　$P(x)=2x^3+3x^2+4x+5$ とする。次が恒等式であるように，定数 a , b , c , d の値を求めよ。

(1) $P(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

(2) $P(x)=a(x+1)(x+2)(x+3)+b(x+1)(x+2)+c(x+1)+d$

<まなぶ> なんかいい加減に並べたとしか思えない整式の係数だよな。でもこれ，数値代入とか係数比較で恒等式の係数を求める定番問題だ。組立除法と何の関係があるのかな。
<かず子> a の値は明らかに $a=2$ 。それと，右辺を変形すると，

$$P(x)=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$$

これは $P(x)$ を $(x+1)$ で割るときの余りが d ということだから，その値は組立除法で求められるわ。
<アリス> なるほど。わたし計算してみます。
$x+1=0$ より $x=-1$ 。抜き出した係数の左にこの値を書いて計算すると…
余りが 2 だから，$d=2$ となります。

-1	2	3	4	5
		-2	-1	-3
	2	1	3	2

<まなぶ> これから，$P(x)=2(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+2$ となるから，あとは恒等式の定番法で求めればいいということだ。
<よしお> もちろんそれでも求められるけど，組立除法で求めた商から，次がいえる。

$$2x^2+x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

だから，定数 c を求めるには組立除法で同様にできるのではないだろうか。
<アリス> ということは，組立除法でさらにその商から b ，その商から a を求められるということになりますね。
<まなぶ> 結局，組立除法だけで係数を求められるということか。それなら何回も係数を抜き出して組立除法を計算するのは大変だから，商の係数をリユースして連ねて計算すればいい。そうすると，右図のようになる。

-1	2	3	4	5	
		-2	-1	-3	
	2	1	3	2	d
		-2	1		
	2	-1	4	c	
		-2			
	2	-3	b		
	a				

<かず子> さすが，省エネまなぶ。$a=2$ ，$b=-3$ ，$c=4$ ，$d=2$ ですね。
<先　生> 結論がでたね。では同じように考えて(2)を解いてごらん。
<アリス> $P(x)=(x+1)\{a(x+2)(x+3)+b(x+2)+c\}+d$ として，
$P(x)$ を $(x+1)$ で割った余り d を求めます。次に，
その商 $(x+2)\{a(x+3)+b\}+c$ から，$(x+2)$ で割った余り c を求め，最後に
$a(x+3)+b$ を $(x+3)$ で割った余り b と商 a を求めればいいのですね。
右図から，$a=2$ ，$b=-9$ ，$c=9$ ，$d=2$ となります。

-1	2	3	4	5	
		-2	-1	-3	
-2	2	1	3	2	d
		-4	6		
-3	2	-3	9	c	
		-6			
	2	-9	b		
	a				

<まなぶ> 組立除法，おぬし，できるな。でも先生，ちょっと質問があるんだけど。
(1)は，$t=x+1$ とおくと，$P(t-1)=at^3+bt^2+ct+d$ となるよね。
だから，$P(t-1)=2(t-1)^3+3(t-1)^2+4(t-1)+5$ を計算して，降べきの順に整理すると，その係数が求めるものだと思うけど。
<かず子> まあ，確かに(1)はその方法でもできるけど(2)は無理だわ。
<まなぶ> いいたいのはそのことではないんだ。関数で考えるといいのかな。

$f(x)=2x^3+3x^2+4x+5$ とすると，$f(x-1)=2x^3-3x^2+4x+2$

だから，これは関数 $y=f(x)$ を x 軸の正の方向に 1 平行移動したら，$y=2x^3-3x^2+4x+2$ になるということだよ。

<先　生> まなぶがいいたいのは，組立除法でグラフの平行移動ができるということだね。

<まなぶ> そうそう。放物線の一般形から標準形への平方完成は，軸の方程式は $x=-\dfrac{b}{2a}$ が分かるから求められる。

例えば，$y=3x^2+5x+4$ とすると，軸の方程式は，$x=-\dfrac{5}{6}$ だから，

割る式を $x+\dfrac{6}{5}$ として組立除法で 2 回割り算をすると，

$-\frac{5}{6}$	3	-5	4
		$-\frac{5}{2}$	$-\frac{25}{12}$
	3	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{23}{12}}$
		$-\frac{5}{2}$	
	3	$\boxed{0}$	

$$3x^2+5x+4=3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+0\times\left(x+\frac{5}{6}\right)+\frac{23}{12}=3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{12}$$

ほら，平方完成できた。

<かず子> 確かにできているけど，2 回目の除算の余りが 0 になっているからたまたまできているだけで，却って計算は面倒なような気がする。

<まなぶ> そうかなあ，うまい方法だと思ったのだけど。

<先　生> うん，実はね。2 回目の除算の余りは必ず 0 になるんだ。だから，1 回の組立除法を実行すれば，平方完成できてしまう。

<まなぶ> やったー，一発逆転だ。

<かず子> それでも私は，普通に平方完成した方がいいと思うな。

<よしお> でも，商や余りを求めるツールである組立除法でグラフの平行移動や放物線の標準形の変形に利用できることは面白いと思います。他に利用できることはないのですか。

<先　生> それでは次の問題を考えてみよう。

> Ex2) 次の関数 $y=f(x)$ 上の $x=1$ に対応する点の接線の方程式を求めよ。
>
> (1) $f(x)=4x^2-3x+2$
>
> (2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

<まなぶ> 係数をいい加減に並べるその性格，なんとかならないのかな。これ，どちらも微分で瞬殺だよな。

<アリス> それを微分を使わないで組立除法で解けということですね。

<かず子> 適当な一次式でとりあえず除算するしかないけど，この場合は $x=1$ だから $x-1$ ということかしら。

<先　生> その通り。(1)を $x-1$ で 2 回割ってみてごらん。

<アリス> Ex1(1)の計算ですね。右のようになります。これから，

1	4	-3	2
		4	1
	4	1	$\boxed{3}$
		4	
	4	$\boxed{5}$	

$$f(x)=4(x-1)^2+5(x-1)+3$$

<先　生> この結果からなにか思うことはないかな。

<まなぶ> えっ，あっ，あっ，あっ。せっ，接線は $y=5(x-1)+3$ だ。

<かず子> なに，どもってるのよ。えーっと，$f'(x)=8x-3$ だから，

接線の傾きは，$f'(1)=5$ 。$f(1)=3$ より接点は $(1,3)$ 。ということは，接線の方程式は，

$$y=5(x-1)+3$$

わっ，わっ，さっきの接線だ。

<先　生> 似たものなんとかというけど。これで接線が求められる理由はそれほど面倒なことではない。

$y=ax^2+bx+c$ の接線を $y=mx+n$ とする。この 2 式の連立方程式を考えると，

$$ax^2+bx+c=mx+n$$

放物線と直線は接するから，重解 $x=\alpha$ をもつとする。そうすると，

$$ax^2+bx+c-(mx+n)=a(x-\alpha)^2$$

これから，$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+(mx+n)$

このように変形できれば，$y=mx+n$ が接線になる。

<よしお> すごいですね。2 次関数の接線は判別式を用いてもできますが，3 次関数では微分を使わなければ難しいと思っていました。でも組立除法と使うと求められるのですね。

<先　生> 説明してごらん。

<よしお> 3 次関数を $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，接線の方程式を $y=mx+n$ とします。

接点の x 座標を $x=\alpha$ とすると，3 次方程式 $f(x)=mx+n$ は重解 $x=\alpha$ をもつから，

$f(x)-(mx+n)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$\therefore\ \ f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)+mx+n$

このように組立除法で変形できればいいということです。

<まなぶ> やってみようじゃないか 。この場合は$(x-1)$ での除算を３回だ。

右のようになるから,

1	4	−3	2	−1
		4	1	3
	4	1	3	2
		4	5	
	4	5	8	
		4		
	4	9		

$$f(x)=4(x-1)^3+9(x-1)^2+8(x-1)+2$$
$$=(x-1)^2\{4(x-1)+9\}+8x-6$$

接線の方程式は，$y=8x-6$　になる。

<アリス> ほんと，すごいですね。$y=8(x-1)+2$ から接点のy 座標である$f(1)$ は

組立除法のなかで計算ができていて，点$(1,2)$ であることも分かります。

<かず子> それだけじゃないわ。

$$f(x)=(x-1)^2(4x+5)+8x-6$$

となるから，接線が$y=f(x)$ と交わる接点以外の交点のx 座標は$x=-\dfrac{5}{4}$

ということも分かるわ。

<まなぶ> 組立除法で接線の方程式を求めることができるなら，ひょっとして，微分もできてしまうんじゃないの。

<先　生> 微分そのものはできないけれど，微分の定義に関わる微分係数の値は求めることはできる。

Ex3)　$f(x)=2x^3-5x^2+3x-4$　のとき，$f'(2)$ を求めよ。

<アリス> たぶん，組立除法を用いて$x-2$ で割ればいいのではないでしょうか。

でも何回，組立除法をすればいいのかしら。

<先　生> では，まず微分係数の定義からおさらいしよう。

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

<まなぶ> 確かにこの形，組立除法の匂いがプンプンする。

<かず子> 犬か，あんたは。

<先　生> さて，関数$f(x)$ を$(x-a)$ で割るとどのように表されただろう。

<よしお> 商を$g(x)$ とし，１次式で割った余りである定数をr とすると

$$f(x)=(x-a)g(x)+r$$

となります。

<先　生> では，その余りは剰余の定理を用いるとどう表されるかな。

<アリス> $r=f(a)$ です。あっ，そうしたら,

$$f(x)=(x-a)g(x)+f(a)$$

となるから,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g(x)$$

となるんですね。

<先　生> 先が読めるようになったね。すなわち,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

となるということだ。それでは問題を解いてみよう。

<よしお> １次式$(x-2)$ で割った商を組立除法で求めると,

2	2	−5	3	−4
		4	−2	2
	2	−1	1	−2

$g(x)=2x^2-x+1$　だから,

$f'(2)=g(2)=7$

となります。

<まなぶ> 微分係数が計算できるのだから，組立除法１回で接線の方程式は求められるということだよね。

組立除法の計算の余りの部分から，$f(2)=-2$ 。

だから$y=f(x)$ の$x=2$ における接線の方程式は,

$$y=7(x-2)-2 \qquad \therefore\ \ y=7x-16$$

うーん，深い。先生，他にも組立除法でできること，あるんでしょ。

<先　生> では，次の問題を考えて見ようか。

> Ex4) 整式 $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$ を，$(x+1)(x+2)$ で割った商と余りを求めよ。

<まなぶ> 懲りない係数の並びだ。でも，これ Ex1(2)に似てる。
<アリス> そうですね，やってみます。右のようになるので，

-1	1	2	3	4	5
		-1	-1	-2	-2
-2	1	1	2	2	3
		-2	2	-8	
	1	-1	4	-6	

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(x+1)(x^3+x^2+2x+2)+3\\
&=(x+1)\{(x+2)(x^2-x+4)-6\}+3\\
&=(x+1)(x+2)(x^2-x+4)-6(x+1)+3
\end{aligned}
$$

なんか，できちゃいました。

商が x^2-x+4 で余りが $-6x-3$ となります。

<先　生> だいぶ，組立除法の使い方がこなれてきたね。
<かず子> 同じように考えれば 3 次式でも組立除法が使えることは分かりますが，でも，先生，割る式が因数分解できなければ駄目と思うんですけど。それに，少ない行数で計算できるという組立除法の利点もなくなってしまっています。
<先　生> するどい指摘だね。

そのかず子の疑問の解消をするためには，みんなに告白しなければならないことがある。

<まなぶ> なんですか，急に。ドキドキするんだけど。
<先　生> 実は組立除法の求め方で嘘をついていたことがある。$P(x)$ を $(x-\alpha)$ で割るときは，$x-\alpha=0$ となるように考えて $x=\alpha$ としていた。そして項の係数を降べきの順に並べた左側にその値を置いていた。
<よしお> 別におかしくはないと思うのですけど。剰余の定理で，$P(x)$ を $(x-\alpha)$ で割るときの余り $P(\alpha)$ はそのように求めるのではなかったでしょうか。
<先　生> そうだね。剰余の定理と同じ方法だからみんなにも覚えやすいと思って，つい嘘をついてしまった。

そしてその嘘がばれないようにするために，$P(x)$ を $(ax+b)$ で割るときは，$ax+b=0$ より，$x=-\dfrac{b}{a}$ の値で組立除法を実行すればよいといって，嘘のうえに嘘を重ねてしまった。

<アリス> だんだんわからなくなってきました。いままでの解答がそれで間違いというのなら分かるのですけど，正しい結果になっていますよね。何か実害があったわけでもないと思うのですが。
<かず子> そうよね，まなぶの嘘とは次元が違う。
<まなぶ> なぜ，そこで僕の名前がでる。でも先生がそう告るなら何かまずいことが起きていたということなんだろう。
<先　生> かず子が 1 次の項の係数が 1 以外のときは気を付けなければならないといっていたね。そのことが嘘の実害なんだ。はっきり言おう。組立除法は，1 次の項の係数は 1 以外は使えない。
<まなぶ> ますます混乱してきた。使って問題がなかったと思うけど。
<よしお> えーっと，何となく分かったような気がします。例えば $(2x-1)$ で割るときは，商 $Q(x)$，余り R とすると，

$$P(x)=(2x-1)Q(x)+R$$

となります。これは組立除法では $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ とみて，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ で割るということですね。

<先　生> そういうこと。だから，組立除法で計算した商を $Q_1(x)$，余りを R_1 とすると，

$$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q_1(x)+R_1=\frac{1}{2}(2x-1)Q_1(x)+R_1$$

これから，　$R=R_1$ より，剰余の定理と組立除法では余りは同じだけど，商は $Q(x)=\dfrac{1}{2}Q_1(x)$。

すなわち，$(2x-1)$ で割るときの商は $\dfrac{1}{2}$ 倍しないければならない。

<アリス> うーん，分かりますけど，それが 1 次の項の係数が 1 以外の場合は気をつけろということなので，いままでやってきたことなのではないでしょうか。
<まなぶ> いや，違うよ。これまでは 1 次の項の係数が 1 以外のときには商が実際と違うから調整しろってことだった。でも係数が 1 のときしか使えないなら，その組立除法の結果から条件の除算になるように変形すればいい。

だから「気をつけろ」ということではない。嘘を正すことと，正しいことを積み重ねるでは意味が違うだろ。

<かず子> なんか自分が優位に立った時のまなぶって妙に説得力があるんだけど。でも先生は，1 次の組立除法の学習しか想定していなかったからそのような説明になったわけで，教育的解釈ということかしら。
<先　生> そういってくれると嬉しい。でも実は，もう一つ嘘をいっているんだ。
<まなぶ> えっ，まだあるの。それも教育的配慮なの。
<先　生> それは，$(x-\alpha)$ で割るときに，$x=\alpha$ の値を組立除法の左端に置くということだ。

<まなぶ> それって組立除法の手順の大原則じゃないですか。それが崩れてしまうってこと。じゃあ，本当は何なのですか。
<先　生> 本当は，定数項の符号を変えた値を置くということなのだ。
だから，$(x-\alpha)$ で割る場合は，定数項の $-\alpha$ に対して，$-(-\alpha)=\alpha$ を考えるということになる。
<アリス> ……，それも剰余の定理の考え方と合わせるためだったのですね。
<先　生> そうなる。剰余の定理は，割る式が 1 次式の割り算にしか適用できない。でも組立除法を割り式が高次式の場合に拡張するためにはどうしてもこのことの理解が必要になる。もう一度確認すると，組立除法は，
① 1 次の項の係数は 1　　② 定数項の符号を変えた値で実行
ということになる。
<まなぶ> 先生，これ以上追及されたくないから，まとめに入ったでしょ。それで，そこからどう高次式で割る場合に拡張できるの。
<先　生> 次の問題で，使い方を説明しよう。

Ex5) $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$ を，2 次式 x^2+3x+2 で割った商と余りを求めよ。

<よしお> この問題は Ex4 と同じで，割る式を展開しただけですね。
<先　生> 1 次式で割るときの 1 次の項は，最高次数の項ということだ。だからこの場合は最高次の 2 次の項の係数は 1 であり，このとき組立除法は利用できる。
整式 $P(x)$ を降べきの順に並べた各項の係数を並べ，先ほどの値を図のように配置する(これを 0 段目とする)。
次に一番左の列(0 列目とする)の 1 段目に 1 次の項の係数の符号を変えた値 -3 を入れる。
2 段目には定数項の符号を変えた値 -2 を入れる。
そして，1 段目の左端と右端，および 2 段目の左から 2 つの空欄に(*)のマークを入れる。なお，(*)はここには数字を入れることはできないということを表す記号だ。これで準備は終わり。　<図 A>
<アリス> なんか面倒に思えましたが，実際に作ってみるとそうでもないですね。次はいよいよ計算ですか。
<先　生> まず，1 段目に対していままでの組立除法をする。そうすると，左から 3 列目のところで，2 段目の空欄○を埋めなければならないのが分かる。ここに入るのは，2 段目の 0 行目の値で組立除法をしたものだけど，注意すべきは，その値に掛ける値は 1 行目の一番下の値からということ<図 B>。
<よしお> 2 段目では，ひとつズレて掛け算をするということですね。
<先　生> 掛けた後は，列の和を求めて列の下に書き込んでいけばよい。
すべて記入を終えたのが右下の<図 C>になる。

図A

	1	2	3	4	5
-3	*				*
-2	*	*			

図B

	1	2	3	4	5
-3	*	-3	3		*
-2	*	*	○		
	1	-1			

図C

	1	2	3	4	5
-3	*	-3	3	-12	*
-2	*	*	-2	2	-8
	1	-1	4	-6	-3

<アリス> その先は予想できます。Ex4 の組立除法と数値と比較すると，一番下の段の左側から 3 つめまでが，商である 2 次式の係数を次数の高い順に並べたもので，残りの 2 つの値は余りの 1 次項の係数と定数項ですね。
<まなぶ> これって超省エネの計算じゃないか。
<かず子> 整式 $P(x)$ の次数がどんなに高くても 4 行で計算できてしまう。
<先　生> それでは，因数分解できない 2 次式で割るときの商と余りを組立除法で求めてみよう。

Ex6) $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$ を x^2-x+2 で割るとき，商と余りを求めよ。

<よしお> まず割る式の最高次 x^4 の係数は 1 ですから組立除法が使えます。
次に割る式の 1 次の項の係数と定数項の値を (-1) 倍して1 と -2。
記入しないところに(*)を入れてブロックします。
そして，組立除法を実行すると……できました。
商は x^2+3x+4　で，余りは $2x-3$
先生，もっと高い次数の整式で割る場合も使えるのですよね。

	1	2	3	4	5
1	*	1	3	4	*
-2	*	*	-2	-6	-8
	1	3	4	2	-3

<先　生> もちろん，一般化できるから 1 次式での間違いを訂正した。
手順をまとめてみよう。$P(x)$ を n 次式，割る式を m 次式($n>m$)とする。
まず，大原則の n 次の項の係数が 1 であることを確認する。
そして，次の手順で組立除法を実行する。

① $P(x)$ を降べき順に整理し，各項の係数を 0 段目に書く

② 割る式を降べきの順に整理した係数を (-1) 倍した値を 0 列目の 1 段目から $(m-1)$ 段目まで書く。

③ k 段目の左から k 個，右から $(m-k)$ 個に(*)を記入する (すべての段の*の個数は m 個)。

④ 最初に数値が入る各段の空欄は，その段の 0 列目の値と，1 列目の一番下の数値の積から始める。

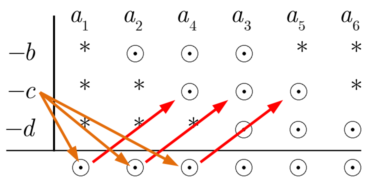
例えば,

$P(x)=a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$ を

x^3+bx^2+cx+d で割るときは，右の計算となる。

(*)のある場所のつき方の規則性と，そのときの左端との数の積の規則性を確認してみよう。

それでは，演習で実際に確認しよう。



Ex7) $P(x)=x^9+2x^7+3x^5+2x^3+x+1$ を x^3-x^2+2x-1 で割った商と余りを求めよ。

〈まなぶ〉9 次式を 3 次式で割るの？

先生，認めたくなかったミスの報復をしようとしていない。受けて立ちましょう。

右のように組立除法で計算すると,

商 $x^6+x^5+x^4+2x^2+3x+1$

余り $-3x^2+2x+2$

どうだ。

	1	0	2	0	3	0	2	0	1	1
1	*	1	1	1	0	2	3	1	*	*
-2	*	*	-2	-2	-2	0	-4	-6	-2	*
1	*	*	*	1	1	1	0	2	3	1
	1	1	1	0	2	3	1	-3	2	2

〈よしお〉でも先生，こんなに高い次数で割算をすることって実際あるのですか。

〈先　生〉割る式は 1 次式か 2 次式ぐらいを考えれば十分。それ以上は単純に縦書きで整式の割り算をした方が速い。
ただ，一般化できる高次の組立除法の仕組みを理解しておくと，かず子が最初にいっていた不安や疑問は解消され，ミスは少なくなるはずだ。

〈まなぶ〉でもどうしてこのような拡張を考える必要があるんだろう。

〈先　生〉実は，拡張ではないんだ。もともとこの計算方法は，19 世紀にイギリスの数学者，W.G.Horner が高次方程式の近似解を得るために考案したものなのだ。Horner 法で割る式を 1 次式にしたものを日本では組立除法といっている。

〈まなぶ〉Horner 法の機能限定のサンプル版が組立除法ということか。
機能限定版でこれだけのことができるのだから，製品版の性能は凄いんだろうな。

〈先　生〉Horner 法の性能を問題で実感してみようか。

Ex8) 方程式 $x^5+ax^4+bx^3+x^2+2x+6=0$ の解が，$x=1-\sqrt{2}i$ のとき，実数 a,b の値を求めよ。

〈アリス〉解を方程式に代入して，複素数の実部と虚部がそれぞれ 0 になるようにすればいいけど大変だわ。

〈かず子〉3 次方程式なら解と係数の関係が使えるけど，この場合はできないので，$x=1-\sqrt{2}i$ を解にもつ 2 次方程式を作り，それで直接割るのが一番いい方法ね。

〈よしお〉$x-1=\sqrt{2}i$ の両辺を平方して整理すると，$x^2-2x+3=0$。これで割るということだけど，それはホーナー法で計算することができます。

〈まなぶ〉やってみよう。実行すると，次の結果になる。

	1	a	b	1	2	6
2	*	2	$2a+4$	$4a+2b+2$	$2a+4b-6$	*
-3	*	*	-3	$-3a-6$	$-6a-3b-3$	$-3a-6b+9$
	1	$a+2$	$2a+b+1$	$a+2b-3$	$-4a+b-7$	$-3a-6b+15$

余りは，$(-4a+b-7)x+(-3a-6b+15)$ となるけど，割り切れるから,

$-4a+b-7=0$，$-3a-6b+15=0$ 　これを解いて，$a=-1$，$b=3$

ちょっと計算は大変だけど，ホーナー法ってとても切れ味のいいツールだよね。
たぶん他にもいろいろな使い道があるんだろうな。

〈先　生〉「切れ味のよい」は，上手い表現だね。確かにホーナー法はいろいろな分野の素材をスパッと切ることができる万能包丁といってもいいかもしれない。

〈まなぶ〉でも先生の嘘はすっぱり切って帳消しにはできないとおもうな。

あとがき

ホーナー法の除算の原理は，もともと中国で考案され，江戸時代に日本に伝わっている。ホーナーより 1 世紀ほど前には，関孝和は現在の組立除法を完成させている。だから，日本では「関式除算法」といった方が適切かもしれない。

関は，自著で高次式 $f(x)$ について $(x-\alpha)$ の除算を繰り返すことで，次のように変換できることを示している。

$$f(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)^3+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+a_n(x-\alpha)^n$$

ここで,

$$a_0=f(\alpha)\ \ ,\ \ a_k=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\ \ (1\leqq k\leqq n)$$

であり，$x=\alpha$ を極とする Taylor 展開を導いている。

微分積分学は，２人の数学者ニュートン(1643 年～1727 年)とライプニッツ(1646～1716 年)がそれぞれ独自の方法で発見した。この世紀の大発見に対してそれぞれの母国であるイギリスとドイツはどちらが最初であるかという不毛の論争を繰り広げるが，日本では江戸時代に関孝和(1643 頃～1708 年)は２人を尻目に和算としての微分積分学を確立している。

さて，Taylor 展開により，関数 $f(x)$ の $x=\alpha$ での第 n 次導関数の値は容易に求めることができる。

例えば，Ex3 の $f(x)=2x^3-5x^2+3x-4$ では，$x-2$ の除算の商から $f'(2)$ を求めている。

しかし，$(x-2)$ の除算をさらに繰り返すと，$f^{(k)}(\alpha)=k!\,a_k$ より得ることができる。

右の組立除法の結果より，

$$f'(2)=7\ ,\ \ f''(2)=2!\times7=14\ \ ,\ \ f'''(2)=3!\times2=12$$

となるのである。

2	2	−5	3	−4
		4	−2	2
	2	−1	1	$\boxed{-2}$
		4	6	
	2	3	$\boxed{7}$	
		4		
	2	$\boxed{7}$		

また，$f(x)$ が n 次式で，n 次の項の係数を a，$(n-1)$ 次の項の係数を b とするとき，

$x=-\dfrac{b}{na}$ を極として Taylor 展開をすると，$a_{n-1}=0$ となる。

計算の流れが見やすいように，$(n-1)$ 次の項の係数を nb として，

$x=-\dfrac{nb}{na}=-\dfrac{b}{a}$ での組立除法を右に示すと，$(n-1)$ 次の項の係数が 1 回の除算で b 減っていく様子をみることができる。したがって，n 回の除算を繰り返すと $(n-1)$ 次の項の係数は 0 になる。これから，2 次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ では，

$x=-\dfrac{b}{2a}$ で 2 回除算することで，放物線 $f(x)$ は標準形になるのである。

$-\dfrac{b}{a}$	a	nb	$\cdots$
		$-b$	$\cdots$
	a	$(n-1)b$	$\cdots$
		$-b$	$\cdots$
	a	$(n-2)b$	$\cdots$
		$-b$	$\cdots$
	a	$(n-3)b$	$\cdots$

このことは，高次方程式の解の公式の導出に大きく関わる。

３次方程式の解の公式は，16 世紀のイタリアの数学者カルダノが発見し(本当は同時代の数学者フォンタナが見つけた)，彼の弟子であったフェラーリが，4 次方程式の解の公式を考案した。その解法のアイデアになったのが最高次のひとつ下の項を変換により消し去ることであった。そしてそれは組立除法では簡単に示されることなのである。

例として，次の問題を解いてみよう。

Ex9)　4 次方程式　$4x^4+16x^3+41x^2+50x+25=0$　の解を求めよ。

解）$x=-\dfrac{16}{4\times4}=-1$ での除算をすると，3 次の項はなくなる。

右により，組立除法で 4 回除算を実行する。これから，

$4x^4+16x^3+41x^2+50x+25=4(x+1)^4+17(x+1)^2+4$

$t=x+1$ とおき，次の方程式の解を求める。

$4t^4+17t^2+4=0$

$(4t^2+1)(t^2+4)=0$ より，　$t^2=-\dfrac{1}{4},-4$

$t=\pm\dfrac{1}{2}i,\ \pm2i$

以上より，$x=-1\pm\dfrac{1}{2}i,\ -1\pm2i$

−1	4	16	41	50	25
		−4	−12	−29	−21
	4	12	29	21	$\boxed{4}$
		−4	−8	−2	
	4	8	21	$\boxed{0}$	
		−4	−4		
	4	4	$\boxed{17}$		
		−4			
	4	$\boxed{0}$			