スラック変数による重複組合せの小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○不等式を等式に換えてみよう！

<先　生> 本時は重複組合せ問題を面白い発想法で解いてみよう。。

> Ex) 10 個のチョコレートをよしお，かず子，アリスの 3 人に次のように配る方法は何通りあるか。
> 　ただし，どの 1 人も少なくとも 1 個はチョコをもらえるものとする。
> 　(1) 10 個すべてを配る。
> 　(2) 10 個すべては配らなくてもよい。

<まなぶ> ひどい，アカハラだ。なんで僕がいないの。いつも横暴な先生の仕打ちにはじっと耐えてきたけどさすがに今回は許せない。

<かず子> なにいってんの。問題の登場人物はたとえの話でしょ。それにチョコを貰えるような食べ物の話題に過剰に反応するのは浅ましいわよ。

<先　生> ちゃんとまなぶのことは考慮しているよ。この後，重要な場面で登場する予定だ。

<まなぶ> それって(2)の問題で，3 人に 1 個ずつ配ってぼくが残りを総取りってことですか。でもなんか差別されているように感じるなあ。

<よしお> そのへんにして，(1)を解きます。これは基本的な重複組合せの問題ですね。「まる棒分配」，「しきり分配」，「棒グラフ分配」といったいろいろな考え方がありましたね。

<アリス> 1 個は貰えるから「仕切り分配」が良さそうね。10 個のチョコレートを並べて，チョコとチョコの間に 2 本の仕切りを入れると，3 つのグループに分かれ，左のグループからよしお，かず子，そして私が貰えばいい。

<まなぶ> 10 個のチョコの仕切りは 9 本あるから，

$${}_9C_2=36\ (\text{通り})$$

だね。でも誰がチョコを貰うということまでいう必要はないだろ。

<かず子> 無視して(2)の問題にいきましょ。先生が始めにいっていた面白い発想の問題ってこれのことね。チョコを全部配らなくていいことと，よしお，アリス，私は少なくても 1 個を貰うことを考えると，配るチョコを 3 個から 10 個のそれぞれの場合を求めればいいということね。

<アリス> わたしやります。3 個のときはよしお，かず子，私が 1 個ずつだからもちろん 1 通り。4 個のときは，仕切り 3 本から 2 本選べばいいから，${}_3C_2$ 通り。あとも同じように考えると，

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2$$

これを計算すると求められるわ。

<よしお> 一見難しそうだけど，そうでもない。

$$1+3+6+10+15+21+28+36=120\ (\text{通り})$$

<先　生> 正解です。チョコが 10 個ぐらいなら確かにそんなに面倒ではない。でも増やして 50 個にすると大変だということがわかる。これを簡単に求める方法を考えて見よう。そこで登場するのがまなぶだ。実はこの(2)の問題には背後にまなぶの存在があることにみんなは気が付いているはずだ。

<アリス> あっ，分かります。配らなかったチョコは全部，まなぶがとってしまうということですよね。さっき本人がいっていました。

<先　生> その通り。みんなもそう思っていることだからすぐに予想できる。

<かず子> 確かに。もし，よしおがメンバーから抜けていたとしたら誰一人，背後の存在なんて考えもしないわ。

<まなぶ> それで僕が抜けていたんですか。いま言いようのない気持ちで胸が圧し潰されそうなんだけど。

<よしお> それで，先生が考えていること，わかったような気がする。まなぶも仲間に加えて分配すればいいということではないですか。

<先　生> その通り。例が適切だとみんなの理解もはやいね。さて，この問題は式化して表現すると次のようになる。

　$a\geqq 1,\ b\geqq 1,\ c\geqq 1$　である整数 a,b,c に対して，

$$a+b+c\leqq 10$$

　となる a,b,c の組は何通りあるか。

これに，まなぶを表す m を加えるとどうなるだろうか。

<かず子> まなぶは，余ったチョコをすべて平らげてしまうから，チョコは絶対残るはずがないわ。ということは，常に 10 個を分配すると考えていいということね。

<アリス> 私も分かったわ。

$$a+b+c+m=10$$

そして，m の条件も $m\geqq 1$　ということね。

すごい。不等式が等式になっちゃった。

<かず子> m が平らげるチョコが，1,2,3 と増えていくと，私たちの分が，9,8,7 と減っていくということね。
でも，それだと私たちが 10 個すべて貰う場合がなくなってしまうわ。

<よしお> うーん。どうしても m を 1 以上にするとバランスがとれない。$m \geqq 0$ とするべきなんだろう。

<まなぶ> おいおい，犬に餌を与えるように，チョコの個数をカウントして次は邪魔者扱いかい。その上僕だけチョコを貰えないことがあり，あまりに不公平だ。

<アリス> まなぶ，たとえ話に感情移入のしすぎでは。

<先　生> 3 人が 1 個以上なのに，まなぶだけが 0 個以上では分配のときに面倒になる。だから 1 個以上にするように調整すればいい。そういう方法があったよね。

<よしお> $m \geqq 0$ なら，$m+1 \geqq 1$ として，$m' = m+1$ とおく。そうすると，$m' \geqq 1$ になります。整理すると，

$$a+b+c+m=10, \quad a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ m \geqq 0$$

これを変形し，

$$a+b+c+(m+1)=11$$

とし，$m' = m+1$　とおくと，$m' \geqq 1$ 。a,b,c,m' は 1 以上の同等の条件になりました。

<かず子> 重複組合せではよく使う方法ね。そうすると，10 本の仕切りから 3 本の仕切りをえらび，左から順に，よしお，アリス，私，そして最後を m' とすればいいのね。だから

$$_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

<まなぶ> 問題は解けたけど，この方法だと，チョコを 11 個用意して，10 個に戻すわけだから，僕が 1 個の場合は，なくなってしまうよ。やっぱり不公平だ。

<先　生> うん，まなぶはよく原理を理解しているね。では，もうひとつ問題を考えて見よう。

Ex）次の条件を満たす自然数 a,b,c,d の組は何通りあるか求めよ。

(1) $1 \leqq a < b < c < d \leqq 10$
(2) $1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq 10$
(3) $1 \leqq a < b < c \leqq d \leqq 10$
(4) $1 \leqq a \leqq b < c \leqq d \leqq 10$

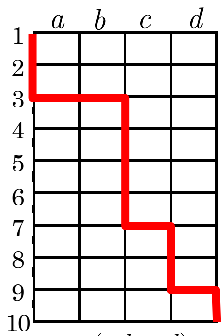
<まなぶ> 僕の質問が軽くかわされて次の問題に移ってしまってるけど。だけど，この問題もなんかマニアックというかいやらしいというか…まさか，ここにも僕が登場するわけではないですよね。a,b,c,d の 4 つの文字があるから 4 人に対応はできるけど。

<かず子> 被害妄想よね。これらの問題，くどそうにみえるけど，考え方は難しくはないですよね。例えば(1)は，1 から 10 の数字から 4 つの異なる数字を選び，それを小さい順に並べると 1 通りに決まるから，

$$_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{（通り）}$$

<よしお> (2)は重複組合せの問題ですよね。1 から 10 までの 10 個の数字から重複を許して 4 個とり，それを小さい順に並べる方法は 1 通りだから，

$$_{10}H_4 = {}_{10+4-1}C_4 = {}_{13}C_4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715$$



(a,b,c,d)
$=(3,3,7,9)$

<まなぶ> うわぁぁぁ，もろに重複組合せ。以前，右図のような最短経路に対応させる方法で考えたと思うけど。

<アリス> (3)はわたし，解きます。$c=d$ がある場合が(1)との違いだから，$a<b<c=d$ の場合の数を求めて(1)と合わせればいいですね。1 から 10 の数字から 3 つ選んで，1 番大きな 2 数を c,d　にすればいいから，

$$_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

だから，$_{10}C_4 + {}_{10}C_3 = 330$（通り）

<かず子> 最後の(4)は私ね。次のケースで考えます。

① $a<b<c<d$　② $a<b<c=d$　③ $a=b<c<d$　④ $a=b<c=d$

①と②は終わっているし，③の場合の数は②と同じ。だから④だけ調べればいい。
1 から 10 の数字から 2 つ選んで，小さい方を a,b ，大きい方を c,d とすればいいから，

$$_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

①～④の結果を合わせると，

$$ {}_{10}C_4 + 2\times {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 = 495 $$

<まなぶ> 答えはでたけど，もちろん先生がいいたいのはこういう解法ではたぶんないよね。
<先　生> よくわかっているね。この問題も発想を変えてみよう。1 から 10 までの 10 個の数字に新たに m 君を加える。
<まなぶ> 先生，文字 m を君付けするのは可笑しいよ。その m って僕のことみたいじゃないか。
<先　生> そんな深い意味はない…たぶん。この m くんは 1 つの数字を表しているのではなく変化し動く数字, だから move の頭文字の m を表している。
<まなぶ> なに，そのとってつけたような説明。ぼくの名前の頭文字じゃないの。
<先　生> そんなことはない…たぶん。具体的に説明しよう。1 から 10 の数字と m 君を合わせた 11 個の数字から 4 つ選んでみよう。例えば，選ばれた数字が，2,5,7,8 ならば，

$$ a=2,\ b=5,\ c=7,\ d=8 $$

に対応させる。次に，選ばれた数字が， $2,5,7,m$ としてみよう。
このように m が選ばれたときは，その m を等しい 2 数のもう一方に対応させるんだ。
例えば(2)の問題の場合は， $a<b<c\leqq d$ だから，

$$ a=2,\ b=5,\ c=7,\ d=m=7 $$

とすればいい。
<よしお> $a<b\leqq c<d$ のとき，選ばれた 4 つの数字が，$3,5,8,m$ のときは，

$$ a=3,\ b=5,\ c=m=5,\ d=8 $$

ということですね。なるほど，このように変化する m を用意すると前問と同じように等号を扱えるんですね。
だから場合の数は， m を加えた 11 個の数字から 4 つの数字を選ぶと考えれば，

$$ {}_{11}C_4 = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 330 $$

(2)が求まります。
<アリス> m 君も不等式を等式に換える数字なんですね。m 君，すごい!!
<まなぶ> いやー，ちょっと照れるな。
<かず子> だからまなぶの m じゃないって先生いってるでしょ。
ということは，この方法を用いれば， m くんを 2 つ用意して，

m_1 くん， m_2 くん

とすれば，(4)にように $a=b, c=d$ の 2 組の等しい数字がある場合も， $m_1=b$ ， $m_2=d$ とすればいいってことになるわ。例えば， m_1, m_2 を加えた 12 個の数から 4 つの数字を選んだ場合， $2,5,m_1,m_2$ のときは，

$$ a=2,\ b=m_1=2,\ c=5,\ d=m_2=5 $$

とする。だから(4)の場合の数は，

$$ {}_{12}C_4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495 $$

いま，すごく感動しているんだけど，一方でなんかこのザワっとする気持ちはなんだろう。
<まなぶ> かず子，自分の心の想うままに謙虚に受けとめ素直に感動した方がいいよ。
ところで先生，この m くんを使うと(2)の重複組合せの問題もできちゃうのではないだろうか。
<先　生> 説明してごらん。
<まなぶ> a,b,c,d の 4 数に等号がつく場合があるのなら， m 君を増殖させて， $m_1,\ m_2,\ m_3$ を用意する。
この 3 つの数字と 1～10 の数字を合わせた 13 個の数字から 4 つ選ぶとき，

$2,m_1,m_2,m_3$ のとき $a=2, b=m_1=2, c=m_2=2, d=m_3=2$

$2,5,m_1,m_2$ の とき， $a=2, b=m_1=2,\ c=m_2=2, d=5$

$2,5,m_1,m_3$ のとき， $a=2,\ b=m_1=2,\ c=5,\ d=m_3=5$

このように対応を考えれば，場合の数は，

$$ {}_{13}C_4 = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 715 $$

どうだい，できちゃった。m 君，万能だね。
<先　生> アリスがいっていたように，この m は不等式を等式に換える動的な数字だ。ちょっと周りには馴染まない数字だけど，だからこそトンデモナイ働きをしてくれる。ときとしてこういった数字も重宝するということだ。
<かず子> 馴染まないから必要悪ということですよね。m が増え続けることを想像してしまうとわたし，やっぱり感動よりはざわつきの気持ちの方が強いんですけど。

あとがき～スラック変数と温故知新

表題のスラック変数という用語は本文にはまったく登場していない。
スラック(slack)とは，余裕といった意味で，スラックスにするとズボンの種類になる。このスラック変数は線形計画法で用いられる概念である。

4つの不等式
$$x+2y \leqq 4\ ,\quad 3x+y \leqq 5,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$
を満たす領域内の点(x, y)について，$x+y$の最大値を求めよ。

数学での解法は，$x+y=k$とおき，直線$y=-x+k$のy切片kの取りうる値の範囲から解が得られる簡単な領域問題である。しかし，条件(不等式)が増え，複雑な領域になると単純には解けなくなる。そこで，条件である不等式を等号に換えてしまう。

$$x+2y+m_1=4,\ 3x+y+m_2=5$$
$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ m_1 \geqq 0,\ m_2 \geqq 0$$

２つの等式を満たす(x, y)で，$x+y$が最小のものを求めればよい。これはシンプレックス法(simplex method)という解を求める最強の手法で解決することができる。

この不等式を等式に変換するスラック変数を導入して組合せの問題に応用したのが本文の最初の問題である。スラック変数は，数に余裕をもたせ，不等式の数値の変化を相殺して等式に変えることが可能なのである。

２つめの問題はスラック変数とは少し異なるが，不等式を等式に換える動的数を定義することで，同様に簡単な結論を導き出している。

実は，このような等式と不等式の変換方法は古くから知られていた。昭和50年代の教科書では，重複組合せの概念を捉えるために，「同じものを選ぶ」ことを「異なるものを選ぶ」ことに変換する方法が一般的であった。すなわち，等式を不等式に変えるということである。

例えば，「1から9までの整数から同じ数字をとることを許して3個とる」ことが重複組合せであるが，そうやって選ばれた3つの数を小さい(または等しい)順に並べる。例えば$3, 3, 4$を選んだとしよう。次のこれを組$(3, 3, 4)$とする。この組の要素に左から順に$(0, 1, 2)$を加えた組を対応させる。
$$(3, 3, 4)+(0, 1, 2) \quad \to (3, 4, 6)$$
このように作られた組の要素である3数はすべて異なる数になり，その数は，1～11の間の数になる。逆に，1～11個の数から異なる3個を選び，小さい順に並べ，左から0,1,2を減ずると，同じものを含む組合せになる。
$$(5, 9, 10)-(0, 1, 2) \to (5, 8, 8)$$
このことから，場合の数は${}_{11}C_3$で得られる。

しかし，この順序組の対応概念が高校生には難しいこともあり，昭和60年台に入ると○と棒を並べる(不思議な)方法が教科書の解説の主流を占めるようになる。順序組の説明は研究課題のページに追いやられ，そしていつの間にか教科書からは完全に姿を消してしまう(拙著「重複組合せの指導法について」参照)。

しかし，この順序組による方法は重複組合せの問題では万能解決法であり，本文の２つめの問題の等号を含む不等式の組合せにも威力を発揮する。
$$1 \leqq a < b < c \leqq d \leqq 10$$
これを満たす4数a, b, c, dを選ぶとき，$c=d$の等号を不等号に換えるには，(a, b, c, d)に$(0, 0, 0, 1)$を加えればよい。
$$(2, 5, 6, 6)+(0, 0, 0, 1) \to (2, 5, 6, 7)$$
この操作によりすべて異なる4数に変わり，数の範囲は1～11になる。よって場合の数は${}_{11}C_4$である。
$$1 \leqq a \leqq b < c \leqq d \leqq 10$$
の場合は，(a, b, c, d)の組の要素に$(0, 1, 1, 2)$を加えて等号を不等号に変える。
$$(3, 3, 7, 7)+(0, 1, 1, 2) \to (3, 4, 8, 9)$$
このとき，変換した組の要素である数の値は1～12なので，重複組合せの場合の数は${}_{12}C_4$である。

このように，順序組は等式を不等式に変換し，ただの組合せ問題にしてしまう。

これを現代流にアレンジしたのが本問の動的数である。動的数は，逆に不等式を等式に変えるための規則を与える。このような方法は，不等式の概念が学生にとって理解が困難になり等式的なものが好まれる今の時代には分かりやすい方法なのかもしれない。でも数学は分からないことを分かるように理解するものであり，分からないことを別の分かる方法で理解してしまうと分からないことは分からないままということになる。温故知新の格言が妙に胸に突き刺さるのは私だけだろうか。