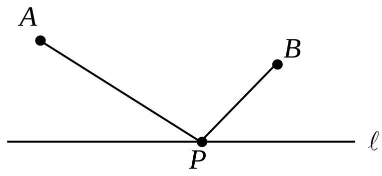
最短経路の実用的な求め方の観察

市立札幌旭丘高校　中村 文則

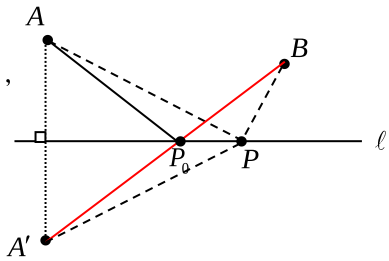
> 直線ℓによって分けられる 2 つの平面の同じ側に 2 点 A, B がある。
> 直線ℓ上の点 P に対して，
> $$AP+PB$$
> が最小であるとき，点 P の位置を求めよ。



数 II の図形と方程式や平面・空間ベクトルでは必須の問題である。
点 A の直線ℓに関する対称点を A' とし， $A'B$ と直線ℓの交点を P_0 とするとき，

$$\begin{aligned} AP+PB &= A'P+PB \\ &\geqq A'B \\ &= A'P_0+P_0B \end{aligned}$$

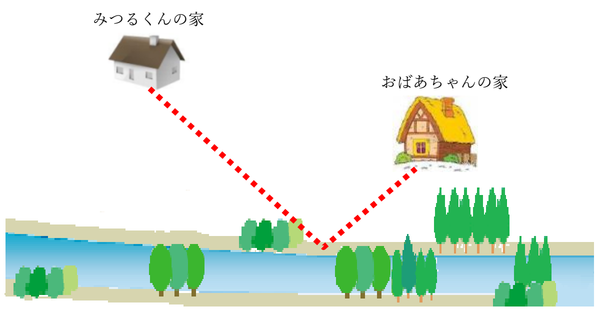
よって，点 P_0 が最小となる点 P である。
では，この問題が次のように出題されているとしたらどうだろうか。



> みつる君は、週に 1 回、お祖母ちゃんの家に行く。
> ロバを連れて近くの川岸で水を汲み、水袋をロバの背にくくりつけて、お祖母ちゃんの家まで運んでいるのだ。
> みつる君はどこの川岸で水を汲むのが一番いいだろうか。

もちろん，同じように川岸に関してみつるくんの家の対称点を求めることで川岸の位置は得られる。ただそれは解答者がみつるくんに代わり解いただけでみつるくんの視点に立っているわけではない。
今の解答を提示するとみつるくんは次のように困惑して言うかもしれない。

> ぼくはどうやってその対称点までいけばいいの。
> 対称点が川の中にあるならこの辺の川は流れが激しいから流されてしまう。川向うの場合でも，そこまでいけないし，すぐ近くに崖があるんだ。



模範解答が必ずしも現実的な解答とは限らない。
問題文をよく読むと，「どこの川岸で汲むのがいいか」とあるが，最短経路とは書かれていない。例えば水袋をロバの背に乗せるわけだから，ロバの負担や乗せた後のロバの速度を考えるとなるべく時間は短い方がいい。そうすると，

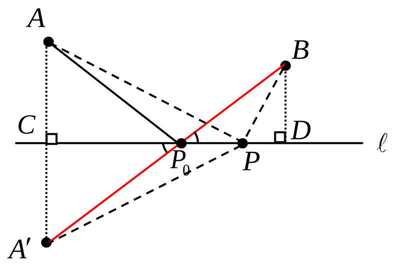
おばあちゃんの家から川に垂直に進んだところの川岸

がベストということになる。みつるくんの家を二世帯住宅にしたらといった意見もあるかもしれない。
問題文に「最短経路」の条件を加えたとしても，みつるくんがいっているような不満はでてくるだろう。数学的には間違いのない解答でも現実的・実用的ではないこともあるのだ。
実際に，みつるくんが簡単に水を汲む位置を調べるにはどうすればいいだろう。

もういちど，先ほど解答に用いた図をみてみよう。

点 A,B から直線 ℓ に下ろした垂線と直線 ℓ との交点をそれぞれ C,D とすると，

$$\angle AP_0C=\angle A'P_0C=\angle BP_0D$$



すなわち，点光源を A として光を投射するとき，直線 ℓ で反射して点 B を通る場合が最短経路ということになる。

$\Delta ACP_0 \backsim \Delta BDP_0$ であるから，

$$CP_0:P_0D=AC:BD$$

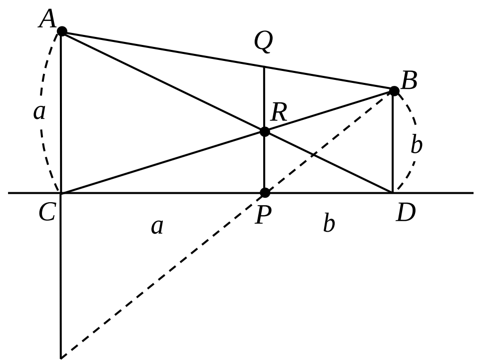
よって，P_0 は，線分 CD を $AC:BD$ の比に内分する点である。

だから，みつるくんは，自分の家とお祖母ちゃんの家からそれぞれ川岸までの最短距離 a,b を調べ，次にその川岸の間を $a:b$ に分けるような位置を調べればよい。

母親が川岸に沿って歩くのは危ないというのなら，

右図において，$AC//BD$ より，

$$AQ:QB=CP:PD=a:b$$



であるから，みつるくんは，次のように進めばよい。

① 自分の家からおばあちゃんの家の方向を目指して歩く。

② $a:b$ の比になるところで止まる。（Q）

③ 川に垂直に川岸まで歩く。

その川岸が水汲み地点である。

みつるくんが比の計算が苦手の場合は，

① 図の C,D の地点に目印を立てる。

② 家から D に向かってお祖母ちゃんの家と目印 D 地点を交互にみながら進む。

③ B,C が一直線上に来た位置で止まる。

④ 川に垂直に川岸まで歩く。（P）

なお，PQ の距離は次のように求めることが出来る。

前述の結果より，$CP:PD=AC:BD=a:b$ である。

$\Delta ACD \backsim \Delta RPD$ より，$AC:RP=CD:PD=(a+b):b$

$$\therefore \quad RP=\frac{bAC}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$$

$RP=QR$ より，$PQ=\dfrac{2ab}{a+b}$

すなわち，PQ の距離は，AC,BD の距離の調和平均である。

最短距離(道のり)を計算してみよう。

$CD=\ell$ とすると，$CP=\dfrac{a\ell}{a+b}$, $DP=\dfrac{b\ell}{a+b}$

$$AP=\sqrt{AC^2+CP^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\ell}{a+b}\right)^2}=\frac{a\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}}{a+b}$$

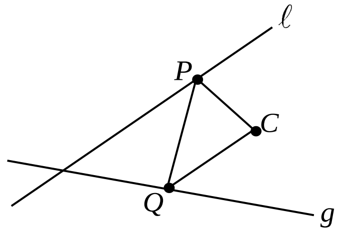
同様に，$BP=\dfrac{b\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}}{a+b}$

以上より，

$$AP_0 + P_0B = \sqrt{(a+b)^2 + \ell^2}$$

まあ，みつるくんにとってはどうでもいいことかも知れないが。

> 交わる 2 直線 ℓ, g 上のそれぞれの点を P, Q とする。
> 2 直線上にない点 C に対して，
> $$CP + PQ + QC$$
> が最小となる点 P, Q の位置を求めよ。



本問は，パズル問題として有名だが，受験問題でも最近は出題されている。

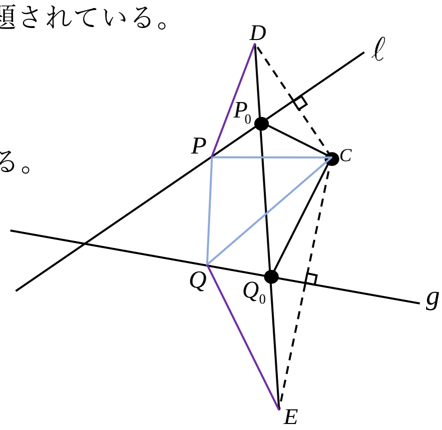
点 C の直線 ℓ, g に関する対称点をそれぞれ D, E とすると，

$$CP = DP,\ \ CQ = EQ$$

である。また，直線 DE と直線 ℓ, g の交点をそれぞれ P_0, Q_0 とする。

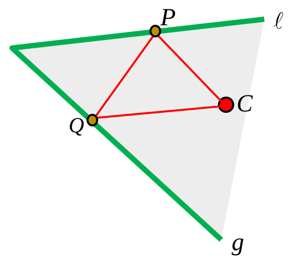
$$\begin{aligned} CP + PQ + QC &= DP + PQ + QE \\ &\geqq DE \\ &= DP_0 + P_0Q_0 + Q_0E \\ &= CP_0 + P_0Q_0 + Q_0C \end{aligned}$$

以上より，P_0, Q_0 が距離 $CP + PQ + QC$ が最小となる 2 点である。



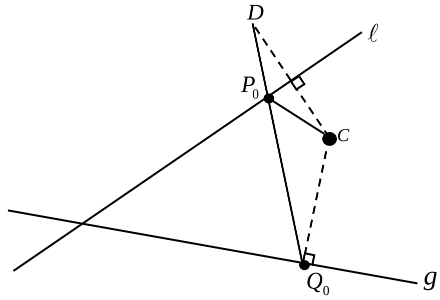
この問題を次のように変えてみよう。

> みつる君の家は、図のような三角州の中にあります。
> みつる君は毎朝、ℓ 側の川岸で洗濯をし、g 側の川岸で水を汲んで家に戻ります(洗濯した場所の川で飲料水は汲みたくないですね)。
> みつる君は、2 つの川岸のどこの場所で洗濯・水汲みをすればいいでしょうか。



問題では，最短距離とはなっていない。

これも前問と同じように，水を汲んだ後のみつるくんの負担を考えれば，家から g へ垂直に移動した川岸が水を汲む場所(Q_0)になるとしてもよい。洗濯については，洗濯後には多少は衣類が水分を含んで重くなるかもしれないが，最短距離として考えてみる。すなわち，点 C の ℓ に関する対称点を D とすると，線分 DQ_0 と直線 ℓ との交点(P_0)で洗濯をすればいいことになる。



なお，ℓ, g のどちらかで水汲み，洗濯と考えるのなら，図の場合では，C から ℓ までの距離の方が C から g までの距離より短いわけだから，ℓ 側で水汲みをすると別の経路が考えられる。

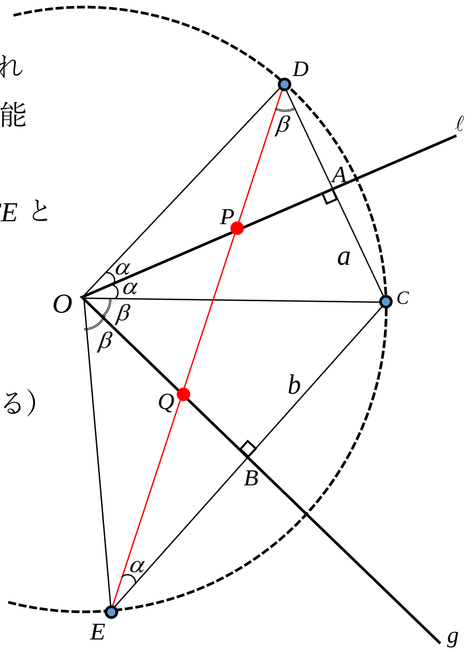
そしてさらに，みつる君が，「洗濯した場所の川で飲料水は汲みたくない」というだけの理由によって洗濯と水汲みの場所を変えているのならもっと要領のいい方法はある。

点 C と川までの距離が近い ℓ 側でまず水を汲み，同じ場所で洗濯をして家に戻ればいい。

このように現実的な解答は解釈によりいろいろ考えることができるのである。

では，最短経路(道のり)として考えるとどうなるだろうか。

点 C の ℓ や g に関する対称点はみつるくんが川や海の中に入らなければならないわけだから現実的ではない。みつるくんが調べることが可能な方法を調べよう。



右図のように，2 直線 ℓ, g の交点を O， CD と直線 ℓ の交点を A， CE と直線 g との交点を B とする。ここで,

$$OD = OC = OE$$

であるから，点 O を中心とし，半径 OC である円周上に D, E はある。
（O は線分 CD, CE のそれぞれの垂直二等分線の交点より円の中心である）

$$\angle AOC = \alpha,\ \angle BOC = \beta$$

とすると， $\angle DOA = \angle AOC = \alpha$ より， $\angle DOC = 2\alpha$
円の中心角と円周角の関係より,

$$\angle DEC = \alpha \quad \cdots ①$$

これから， $\angle AOC = \angle QEB$ また， $\angle CAO = \angle QBE = 90°$ より，
$\Delta AOC \backsim \Delta BEQ$ である。

$$OA : AC = EB : BQ \quad \text{より，}\quad BQ = \frac{AC \cdot BE}{OA} = \frac{CA \cdot CB}{AO} \quad (\because \ CB = BE)$$

同様に， $\Delta BOC \backsim \Delta ADP$ より， $AP = \dfrac{CA \cdot CB}{BO}$

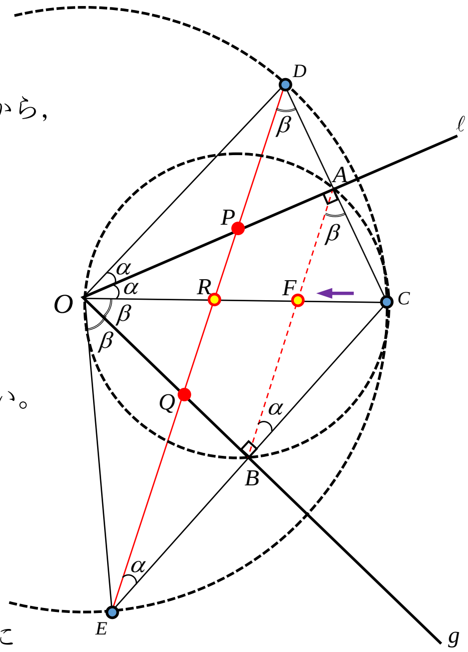
これから，洗濯および水汲みの地点は次のように定めればよい。

① 家から洗濯をする川までの距離 a と，その川岸 A から三角州の頂点 O までの距離 m を計測する。
② 家から水汲みをする川までの距離 b と，その川岸 B から三角州の頂点 O までの距離 n を計測する。
③ 次式により，洗濯，水汲みの場所を計算する。

洗濯は， A から O の方向に， AO の距離の $\dfrac{ab}{n}$ の割合だけ進んだ地点

水汲みは， B から O の方向に， BO の距離の $\dfrac{ab}{m}$ の割合だけ進んだ点

次に，みつるくんが計算が苦手の場合についても考えてみよう。



$$\angle OAC = \angle OBC = 90°$$

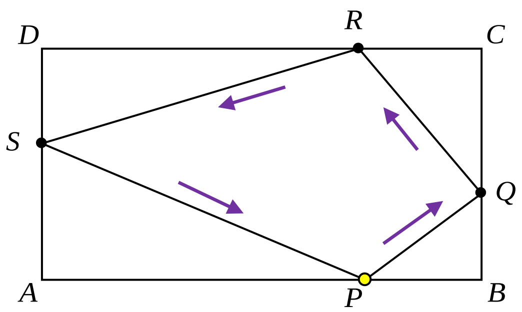
より，4 点 O, A, C, B は， OC を直径とする円周上の点である。これから,

$$\angle ABC = \angle AOC = \alpha \quad \cdots ②$$

①，②より，直線 DE と直線 AB は同位角が等しいから平行である。
よって， $\Delta CDE \backsim \Delta CAB$
線分 CO と，線分 AB, DE との交点をそれぞれ F, R とする。
$CA = AD$ より， $CF = FR$ である。
以上より，みつるくんは次のように洗濯と水汲みの地点を決めればよい。

① 家から 2 つの川までの最短距離である地点 A, B に目印を置く。
② 家から三角州の頂点の方向へ真っすぐ歩数を数えながら歩く。
③ 視点の左右に A, B が一直線にきたときの歩数を確認する。
④ その歩数分だけさらに三角州の頂点の方向に進んで止まる。
⑤ 止まった地点から， AB に平行になるように，2 つの川の方向に川岸にたどり着くまで進む。

> 図の長方形 $ABCD$ の辺 AB 上の点 P から，BC，CD，DA 上の点を通り，点 P に戻るための最短経路を求めよ。



右図において，

$$PQ+QR+RS+SP$$

の最小値を求めものである。

いままでの考察から，各辺上の求める点の作図は次のようになる。

① 直線 BC に関する点 P の対称点 E を求める。

② 直線 CD に関する点 E の対称点 F を求める。

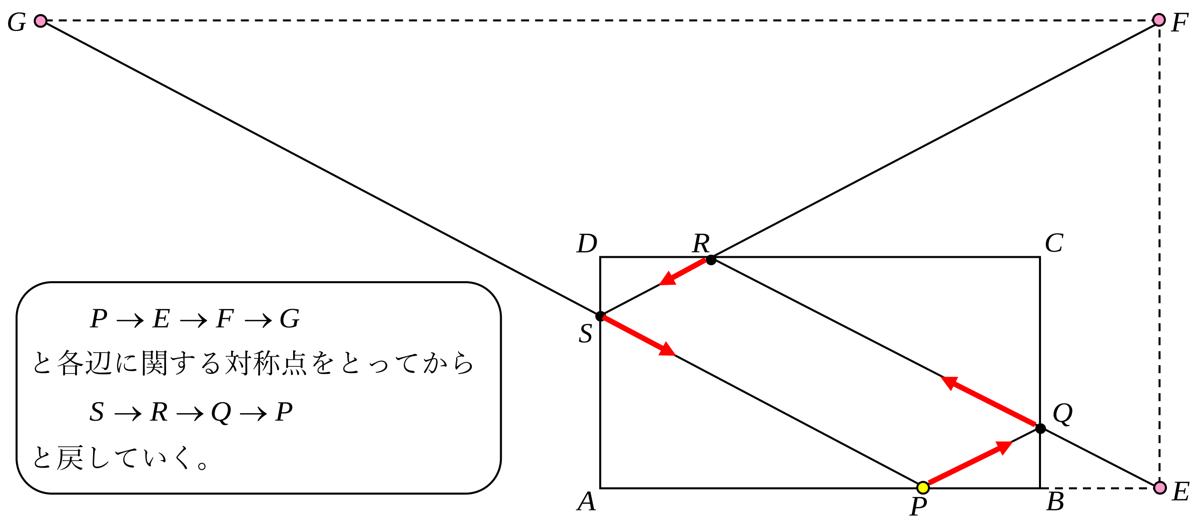
③ 直線 DA に関する点 F の対称点 G を求める。

④ 直線 GP と辺 DA の交点を S とする。

⑤ 直線 SF と辺 DC の交点を R とする。

⑥ 直線 RE と辺 CB の交点を Q とする。

こうして得られた点 Q,R,S を順に通るとその距離は最短になる。



よって，点 P を点光源として，辺 BC,CD,DA の順に反射して，また点 P に戻ってきたときの光の道筋が最短経路になる。したがって，四角形 $PQRS$ は平行四辺形である。

ではこれをパズル的な実用問題に変えるとどうなるだろうか。

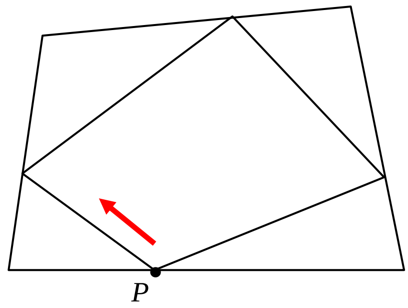
みつるくんが，長方形の部屋の中の壁の位置でテニスラケットでボールを壁に思いっきり打ったとき，跳ね返ったボールが自分にあたるようにする…とか，そんな風に考えてもいいかもしれないが，実はいままで解いてきた最短経路の問題は，実際は実用的な解答なのである。

なぜならば，どの問題も紙に正確な地図(地形図)を描き，その地図上で数学的な解答を考察し，それを現実的な場面に置き換えればいいのである。それを何も道具を使わず勘だけで経路を導き出すことの方が，どれだけ非合理的で直感的な解法であろうか。

だいたい，「ロバに水袋を背負わせておばあちゃんの家にいく」とか，「川で洗濯と水汲みをする」といったことはいつの時代の話なのかということになる。

紙に地形を再現することで，紙を直線を折り線として，点を対称移動させれば容易に最短経路にたどり着ける。オリガミクスのような問題として捉える方がより実用的な解答なのである。

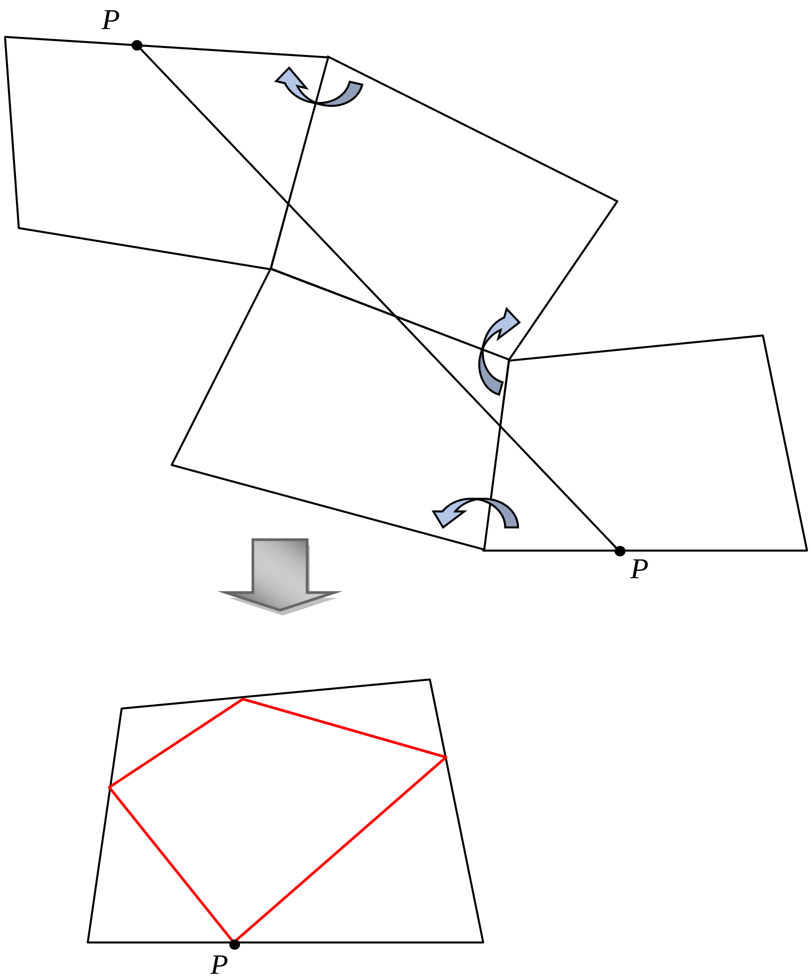
図の辺上の点 P から時計回りに隣り合う辺上の点を結ぶ操作を続けて点 P に戻るとき，その最短経路を実用的な方法で求めよ。



どうすればいいだろうか。

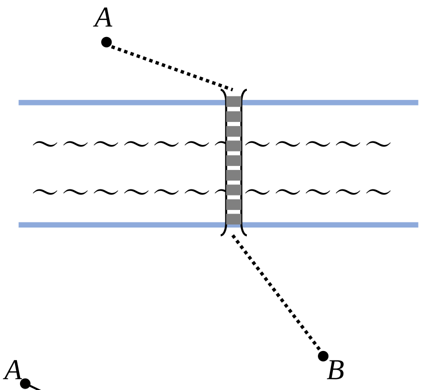
いままでのように実用的な方法を探究的に考察すればよいが，ここでは四角形を紙から切り抜くことで求めてみよう。

切り抜いた四角形を 3 辺に関して対称移動させながら，移動した図を紙の上に鉛筆でかたどり書く。点 P どうしを結んだ直線と各辺との交点の位置を，最初の四角形に打って点を結べば最短経路が描かれるはずだ。



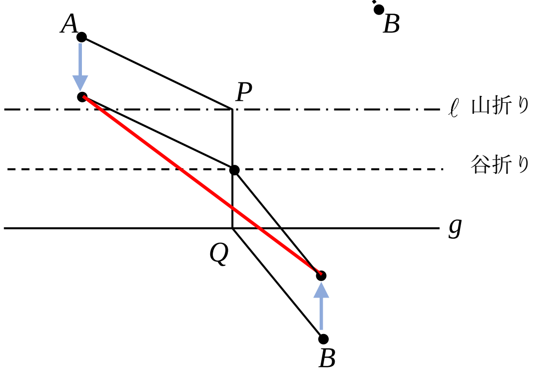
あとがき（補足）

次はパズルでは有名な問題である。



> 川をはさんで2つの家 A, B がある。
> A から B へ行くために川に垂直に橋を架けたい。
> 川岸のどの位置に架ければいいだろうか。

たぶん，みた記憶のある人も多いだろう。



右図で PQ の長さは川幅であり不変より， $AP+QB$ の長さの最小値を考えればよい。ベクトルの問題として解答している解説もあるがそれはやり過ぎだろう。

最短経路を直感的に理解するなら，紙に図を描いてから紙を折ってみればよい。直線 ℓ は山折り， ℓ, g から等距離にある直線(真ん中の直線)は谷折りにしてみる。そうすると，点 P と点 Q が重なり，折れ線が浮かび上がってくる。折れ線が直線になる場合が最短経路であることが分かる。すなわち，直線 AP と直線 BQ の傾きが一致していればよい。

右下図のように，

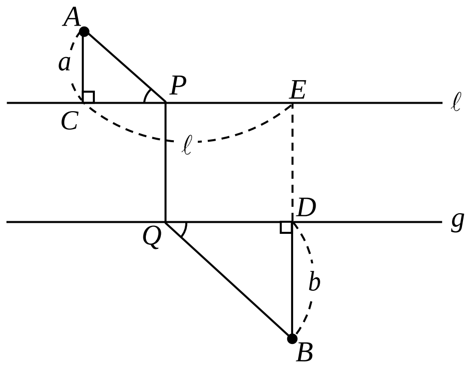
$$AC=a,\ BD=b,\ CE=\ell$$

とすると， $\Delta ACP \backsim \Delta BDQ$ であることから，

$$CP:PE=CP:QD=AC:BD=a:b$$

よって，

$$CP=\frac{a\ell}{a+b}\ ,\quad DQ=\frac{b\ell}{a+b}$$



である。また，このとき

$$AP=\sqrt{AC^2+CP^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\ell}{a+b}\right)^2}=\frac{a\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}}{a+b}$$

同様に， $BQ=\dfrac{b\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}}{a+b}$ 　であるから， $AP+QB=\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}$

これに川幅を加えたものが最短距離となる(みつるくんとお祖母ちゃんの問題と同じ結果)。

ただ，この場合も，橋の幅を考慮すると問題がでてくる。丸太で橋を架けるのならいいが，橋の幅はそれなりにあるわけだから，橋を通るとき，左端，中央，右端，斜め方向に歩くことで最短距離は微妙に異なってくる。上述の解答をするには，問題の条件に「人ひとりが歩けるくらいの幅の橋」という条件が必要なのである。川に垂直にという条件だけならば，極端な例として，図の CE より少し広い幅の橋を架けてしまうと問題はすべて解決してしまう(トンチ的解答)。

問題の条件設定や解釈でいろいろな解答が想定できるのである。

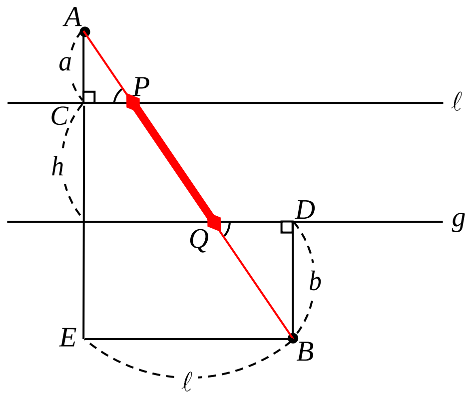
数学の問題は画一的なものが多い。問題文の出だしで要求が予測できてしまうのだ。問題を読み流して解答に取り掛かり，後で条件の見落としに気づくこともある。問題と解答がパックで与えられてしまっていると思い込み，問題を「よく読む」ことが薄れがちな傾向にあるのではないだろうか。

このパズル問題でも，「川に垂直に橋を架ける」という条件がなければ最短経路はまた違ったものになる。川は無視して，点 A から点 B までの進み方だけを考えれば最短経路は線分 AB である。

右図において， $\Delta ACP \backsim \Delta AEB$ であるから，川幅を h とすると，

$AC : AE = CP : EB$ より，

$$CP = \frac{EB \cdot AC}{AE} = \frac{a\ell}{a+b+h}$$



同様に， $DQ = \dfrac{b\ell}{a+b+h}$ となる。

点 C, D から上の比だけ川岸を移動し，それぞれ橋の両端 P, Q を求めればよい。ここで，直角三角形 ACP において，

$$AP = \sqrt{AC^2 + CP^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\ell}{a+b+h}\right)^2} = \frac{a\sqrt{(a+b+h)^2 + \ell^2}}{a+b+h}$$

また， $\ell // g$ であるから， $AP : PQ = a : h$

$$\therefore \quad PQ = \frac{h\sqrt{(a+b+h)^2 + \ell^2}}{a+b+h}$$

これが川に架ける橋の長さである。

このように問題の条件を緩めることで，解く側の「思考の遊び」が生まれるのである。

そして，それが学習者の意欲や興味を引き出すことになる。

ところで，本文中では，三角州の問題は円の性質を用いて解答を示した。

しかし舞台裏では最初は次のように三角比でガチャガチャと計算している。

$OD = OC = OE$ より，三角形 ODE は二等辺三角形である。

よって， $\angle ODE = \dfrac{1}{2}(\pi - 2\alpha - 2\beta) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha - \beta$

$$\therefore \quad \angle ADP = \frac{\pi}{2} - \angle AOD - \angle ADP = \frac{\beta}{2}$$

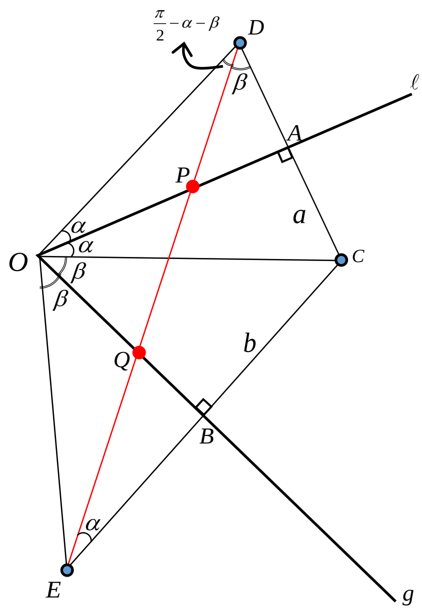
直角三角形 ADP において， $AP = a\tan\beta$

直角三角形 OAD において， $OA = \dfrac{a}{\tan\alpha}$

これから，

$$AP : AO = \tan\beta : \frac{1}{\tan\alpha} = \sin\alpha\sin\beta : \cos\alpha\cos\beta = ab : AO \cdot BO$$

$$\therefore \quad AP = \frac{ab}{BO}$$



この計算と結論を得てからもう一度，解答を眺めて円の性質を引き出している。

すなわち，数学的な解答の後に，さらに問題の実用的な観察とアプローチをした。

このように，問題をよく読み，解答をよく吟味する。それが探究的な数学活動につながるのだろう。