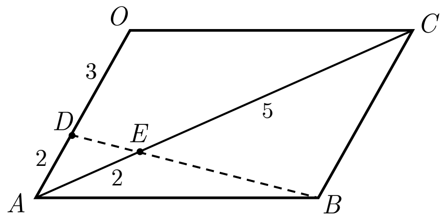
ベクトルの始点と視点の小手技

中村文則

○してんを変えてみると……

<先　生> 本時はベクトルの「してん」について考えてみよう．
<アリス> ベクトルで「してん」といったら，向きを決める「始点」のことですよね．
<まなぶ> 「考えてみよう」ということだから他の意味の「してん」もありえる．先生の性格はよく「しってん」から．
<かず子> あほ！
<先　生> いつものボケとつっこみはさておき，問題にとりかかろう．

Ex1 平行四辺形 OABC において，辺 OA を 3 : 2 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 5 に内分する点を E とする．
このとき，3 点 D，E，B は一直線上にあることを証明せよ．



<よしお> 共線問題ですね．普通に考えればベクトルの始点を O として，

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}\ ,\ \ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

とします．

<かず子> この 2 つのベクトルで，B，D，E の位置ベクトルを求める．

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{c}\ ,\ \ \overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\vec{a}\ ,\ \ \overrightarrow{OE}=\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{c}$$

これで準備完了．あとは 3 点 D，E，B が一直線上にあるから，

$$\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{DB}$$

こうなるような実数 k があることを示せばいい．

<アリス> わたしやります．

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\left(\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{c}\right)-\frac{3}{5}\vec{a}=\frac{4}{35}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{c}=\frac{2}{35}\left(2\vec{a}+5\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\left(\vec{a}+\vec{c}\right)-\frac{3}{5}\vec{a}=\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}=\frac{1}{5}\left(2\vec{a}+5\vec{c}\right)$$

これから，$\dfrac{35}{2}\overrightarrow{DE}=5\overrightarrow{DB}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{DE}=\frac{2}{7}\overrightarrow{DB}$$

$k=\dfrac{2}{7}$ です．だから，3 点 D，E，F は一直線上にあります．

<まなぶ> まあ，これだけでは普通の解答だけど，ふふふっ!．先生の悪だくみが分かってしまった．
だいたい，最初から平行四辺形の頂点を ABCD ではなく，OABC にしていることが怪しいと思っていたんだ．
今回は「してん」がテーマなのだから，O 以外の点で始点になるものを考えるということでしょ．
そうすると……，B を始点にするということでは．

<よしお> ぼくもそう思います．

$$\overrightarrow{BA}=\vec{a}\ ,\ \ \overrightarrow{BC}=\vec{c}$$

とすると，

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{2}{5}c=\frac{1}{5}\left(5\vec{a}+2c\right)$$

$$\overrightarrow{BE}=\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{c}=\frac{1}{7}\left(5\vec{a}+2\vec{c}\right)$$

これから，$\overrightarrow{BE}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{BD}$

<ありす> ほんとうだわ．ずいぶん簡単になったわ．
<かず子> 「してん」を考えるということは始点を安易に設定するなということなのですね．
<まなぶ> でも，先生.「してんを考える」とかいってるけど，語るに落ちたのでは．
この問題の場合，たまたま共線の 3 点のうち 1 つの点が平行四辺形の頂点だったからいいけど，そうでない場合は困るでしょ．
<先　生> 語るにうんぬんは，置いといて，いい着眼点だと思う．
では次の問題をやってごらん．

Ex2 三角形ABCにおいて，辺ABを2 : 3に内分する点をD，辺BCを3 : 1に外分する点をE，辺CAを1 : 2に内分する点をFとするとき，3点D，E，Fは一直線上にあることを証明せよ．

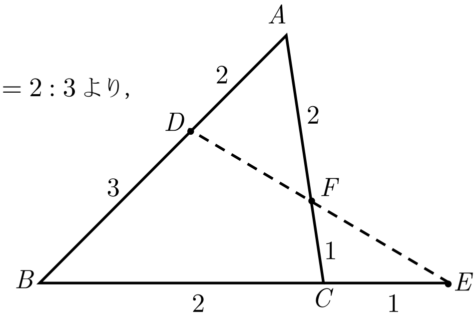
<まなぶ>　そうそう，この問題．やっぱり始点はAにするしかないよね．
<先　生> でも「語るに落ちた」のかそれとも「語るに足る」のか，ためしにDを始点にして解いてごらん．
<まなぶ> 先生，むきになっていない．まあ，やってみましょ．

Dを始点にして一次独立なベクトルを設定するということだから，

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$

こういうことかな．そうすると，点Bの位置ベクトルは，$AD:DB=2:3$ より，

$$\overrightarrow{DB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}=-\frac{3}{2}\vec{a}$$



<よしお> それでもいいと思うけど，

$\overrightarrow{DA}=2\vec{a}$ ，$\overrightarrow{DB}=-3\vec{a}$

とすると，計算は楽になるよ．

<かず子> なるほどね．これで何とかなりそうな気がしてきたわ．

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}=\frac{2}{3}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{DE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{c}=\frac{3}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$$

この2つの式から，$\overrightarrow{DF}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{DE}$

できました．まなぶの難癖はいつものことだけど「語るに足りず」ということね．

<先　生> まあまあ，でもせっかくだから始点をAにする場合も考えてみようか．
<かず子> 先生，そんな敵に塩を送るようにこと必要ありません．
<先　生> うーん，塩というよりドッグフードかもしれないけどね．
<まなぶ> それ，アカハラでしょ．
<アリス> まあ，とにかくやってみます．始点をAとして，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると，

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\vec{b}$ ，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$ ，$\overrightarrow{AE}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

このようになります．そうしてあとは，

$$\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{DF}$$

こうなるようなkをみつければいいのですよね．でもこれでは始点の工夫が何もないような気がするんですけど．

<先　生> そこでだ．そのように考えないで一直線上にあることは示せないだろうか．
<かず子> だんだんまなぶの浅知恵から離れていくわ. でもどういうこと. 直線上に3点が乗っているということよね……．
<よしお> かず子, それだよ. 直線は2点が与えられれば決定する. だからその直線上にもうひとつの点があればいいんだ.
<かず子> えっ，あっ，そうか．直線のベクトル方程式ということですね．直線DFのベクトル方程式は，

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}(1-t)\vec{b}+\frac{2t}{3}\vec{c}$$

この直線DF上の点Pが点Eに一致する定数tが見つかればいいわ．

<アリス> $\overrightarrow{AE}$ と $\overrightarrow{AP}$ の $\vec{c}$ の係数から予想できるわ．

たぶん，$\dfrac{2t}{3}=\dfrac{3}{2}$ 　これから，$t=\dfrac{9}{4}$ のはずです．

<かず子> このときの点Pの位置ベクトルを求めると，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\left(1-\frac{9}{4}\right)\vec{b}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}=\overrightarrow{AE}$$

点Eに一致しました．だから3点，D，E，Fは一直線上にあります．

<先 生> そうですね．あるいは，点Eは直線BC上の点でもあることを利用してもよい．
<まなぶ> 係数の和が1ということか.

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{AC}$$

これより，直線DFと直線BCとの交点は次を満たす.

$$\frac{2}{5}(1-t)+\frac{2}{3}t=1$$

これから， $6(1-t)+10t=15$ より， $t=\dfrac{9}{4}$ になる.

<よしお> 先生，この場合の「してん」は，見方を変えるという意味の「視点」だったんですね.

<まなぶ> なるほどね. でもその視点を変えるということも僕が敢えて始点をAにすると言ってフォローしなければうまくその方向に展開できなかったということだよな.

<かず子> 「語るに落ちる」とのたまった，どの口が言う.

<アリス> 先生，視点を変えるということではベクトルではないのですが，「メネラウスの定理の逆」を用いることも考えられますよね.

<先　生> もちろん.

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}=1$$

これから，メネラウスの定理の逆より3点D，E，Fは一直線上にある．いろいろな視点で表現できるよういつも心掛けたいね．では次の問題でさらに「してん」の捉えた方を養ってみよう．

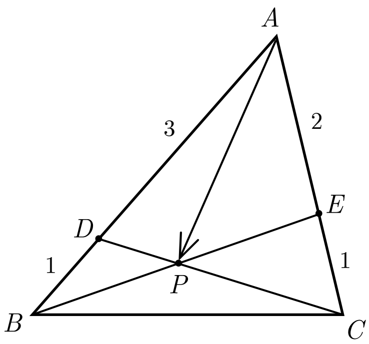
Ex3) 三角形ABCにおいて，辺ABを$3:1$に内分する点をDとし，辺ACを$2:1$に内分する点をEとする．線分DCと線分BEの交点をPとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$として，$\overrightarrow{AP}$を$\vec{b}$と$\vec{c}$を用いて表せ.

<まなぶ> あの～先生，自分の言ったこと分かってます.「してん」の捉え方って話だったけど，これ，もう始点はAしかないと分かっているじゃない.

<よしお> 別の意味の「してん」で考えるということだと思う.

<かず子> でもそうであってもこの問題，一次独立の代表的な問題ですよね．点Pを2つの直線上の点と考えて，２つの直線のベクトル方程式を連立させて解く，それ以外の方法は考えたことがなかったわ.

<アリス> とりあえず，やってみます．まず，DとEの位置ベクトルを求めます.



$$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\vec{b}\,,\quad \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\vec{c}\qquad\cdots①$$

点Pは直線DC上の点より，

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AC}=\frac{3(1-s)}{4}\vec{b}+s\vec{c}\qquad\cdots\cdots(*)$$

次に点PはBE上の点より，

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}=(1-t)\vec{b}+\frac{2}{3}t\vec{c}\qquad\cdots\cdots(**)$$

$\vec{b}$と$\vec{c}$は一次独立だから，(*)と(**)より，

$$\frac{3(1-s)}{4}=1-t\,,\quad s=\frac{2}{3}t$$

これを解いて， $s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$ です．最後に(*)に代入して

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

これでいいでしょうか.

<先　生> うん，できたね.

<まなぶ> いや，いや，そうでないでしょ.「してん」はどこいったの．しっかり失点してんでしょうが.

<かず子> なにおやじギャグいってるの.

<アリス> でもまなぶさんのいうようにこれでは普通の解答ですよね.

<先　生> そこで，この解答を元にして，視点を変えてみよう．この解答の中で煩わしいと感じるところはどこだろうか.

<まなぶ> まあ，しいて言うならsとtの連立方程式を解くところかな.

<先　生> そうだね．そこで，(**)の式をなくすことができれば変数はsだけになる.

<かず子> どういうことですか.

<よしお> うーん，たぶん，(**)は(*)で表すことができるということではないだろうか.

<先　生> その通り．(*)をもう一度示そう.

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AC}=\frac{3(1-s)}{4}\vec{b}+s\vec{c}\qquad\cdots\cdots(*)$$

これは，点Pは直線DC上の点であることを表しているけど，視点を変えて，この式から点Pは直線BE上の点であることを示すようにすればいい.

<アリス> $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AE}$で表すということですね．あっ，①が使えそうです.

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\text{ より，}\ \overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$$

これから(*)は，

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AC}=\frac{3(1-s)}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}s\overrightarrow{AE}$$

でも，この後はどうするのかしら．

<よしお> 先ほどのやった考え方を使えばいい．点Pは直線BE上の点だから係数の和は1になる．だから，

$$\frac{3(1-s)}{4}+\frac{3}{2}s=1 \quad これから s=\frac{1}{3}$$

最後に(*)に代入すると求められる．

<アリス> 変数が1つになることで，ずいぶん計算は楽になるんですね．同じように考えると，①の式を用いて(**)を$\overrightarrow{AD}$と$\overrightarrow{AC}$の関係に変えるとtの値も求めることができるのですね．

<まなぶ> なるほどね．でも僕なら変数の個数を0にできるな．

<かず子> まさか，メネラウスの定理を使うということではないよね．

<まなぶ.> うん，そうだけど．別に使ったっていいだろ．先ほどもメネラウスの逆を使っていたし，これも視点を変えるってことだから．

<かず子> そりゃあ，そうだけど…

<先　生> うん，さらに変数をなくせたらという発想はいい．でもメネラウスの定理を使わなくてもベクトルでそのことは可能なんだ．そのためには今度は「始点」も変えてみよう．

<アリス> えっ，始点を変えるんですか?．でも始点をAからBやCにしても大した違いはないだろうし．そうすると，DとかEということでしょうか．

<よしお> 先ほどの共線問題ではそう考えたけど，たぶん変数がでてきてしまう．あとは一般的に始点をOとするしか方法はないと思うのですが．

<先　生> もうひとつ候補があるのを見落としていないだろうか．

<まなぶ> えっ，まさかPですか．

<かず子> いくらなんでも先生，それはないのでは．Pを求めるためにPを始点にするということは，なんか循環論法みたいで……，わーっ，コレ，まなぶ的支離滅裂破滅直行死点だ．

<まなぶ> おいおい，それは言い過ぎでしょ．でも本当にそれでできるの．

<アリス> えっ，まなぶさんが不安になるのを初めて見たような．

<よしお> 先が見えないけどとりあえずやってみます．

点Pを始点として，点Dと点Eの位置ベクトルをまず求めます．

$AD:DB=3:1$ より，　$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PB}$　……①

$AE:EC=2:1$ より，　$\overrightarrow{PE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$　……②

この後はどういう視点でみるかということですね．

<先　生> そう，その視点の捉え方のヒントは①，②の式の右辺に$\overrightarrow{PA}$があることだ．これを消去してみようか．

<かず子> ①$\times\frac{1}{3}$ −②$\times\frac{1}{4}$ を計算すればいい．そうすると，

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{PE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}$$

うーん，さらにわからなくなりました．

<先　生> ちょっと移項して変形してみようか．

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PE} \quad ……③$$

さあ，この式からは何が読み取れるだろう．

<よしお> 点Pは直線DC上で点だったから，③の左辺は点Pを始点とする$\overrightarrow{DC}$に平行なベクトルを表していますね．

同じように考えると，右辺は点Pを始点とする$\overrightarrow{BE}$に平行なベクトルということになります．

それが等しいのだから…

<まなぶ> そうか．そうなるには左辺と右辺は$\vec{0}$になるしかないってことか．だから，

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}=\vec{0} \quad これから,\ \overrightarrow{PD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC} \quad \therefore\ DP:PC=1:2$$

同様に，

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PE}=\vec{0} \quad これから,\ \overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PE} \quad \therefore\ BP:PE=1:1$$

これで，点Pの位置が分かるんだ．

<先　生> 最後はまなぶがひとりで駆け抜けてしまった．確かにこの視点はまなぶ的発想に近いのかもしれないね．

ちなみに，③の両辺を2倍してみると，

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{PD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PE}$$

まなぶが示した比は両辺の内分点からも読み取れることが分かる．

<アリス> 本当に変数を使わないでできちゃった．結局この問題は，始点だけでなくさらに視点も変えるとどうなるかということだったのですね．

<まなぶ> でもこれだって「変数をさらに少なくしたら」という僕の視点があったからこそ導けた．「してん」の捉え方も大事だけど，そこに導くナビゲーターの存在が必要なんだ．まあ，今回は僕がそれを担ったことになるけど，これってやっぱり能力だから誰にでもできるということではないよな．

<よしお> うーん，最強であると自分で思っている孫悟空とお釈迦様の関係かもしれないけど．

<まなぶ> どういうこと．

<かず子> あんたの視点はお釈迦様(先生)の掌で踊っているだけってことよ．

あとがき

初等幾何は1本の補助線が解法への道を拓くように，発想的な図形分析ツールです．同じ図形の性質を調べるツールであるベクトルは，それに対して愚直に進む自動算出(automatic calculation)の傾向が強いように感じます．

線形独立となる基底さえ決めてしまえば，あとは多少煩雑であってもただただひたすら計算するだけであり，だから面白みに欠けてしまい，いつの間にか導き出されてしまう結論に達成感はあまりありません．ルーチンが定まっているのは合理的とはいえますが，そんな計算はパソコンにでもやらせろよ，とぶつぶついいたくなるのです．

でもそれは始点や基底が定石のように置き方が決まっていると錯覚しているからかもしれません．ベクトルの成分表示を，直交座標平面で原点を始点として両軸に基底ベクトルを定める，と理解してしまうとベクトル本来の「平行移動が可能」という自由性が損なわれるのです．斜交座標でも原点以外の点で自由に始点が定められるのに，定型化されてしまうから，こう始点を定めたらどんな解法の道筋を拓けるのだろう，というワクワク感が薄れてしまいます．

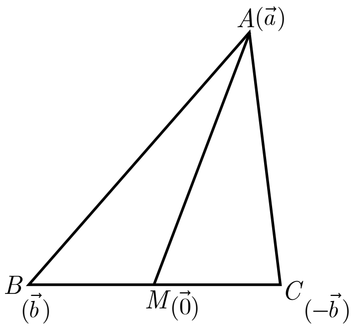
そこで，本文では，「してん」である始点や視点を変えることで自動算出の道筋がどう変わるのかを考えてみました．

例えば，始点の取り方でエレガントな解法に変わるものとして，「中線定理」の証明は好例です．

中線定理(*Pappus*)

三角形ABCの辺BCの中点をMとすると次の式が成り立つ．

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$



証明は，三角比，初等幾何等，多くの方法がありますが，もっとも簡単なのはベクトルです．

始点をAにしてしまうと，それなりのガチャガチャした自動算出になりますが，始点をMにすると，驚くほど鮮やかに導かれるのです．

証明）$\overrightarrow{MA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{MB}=\vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{MC}=-\vec{b}$ である．

$$AB^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=AM^2+BM^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$AC^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|-\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=AM^2+BM^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

2式を辺々加える

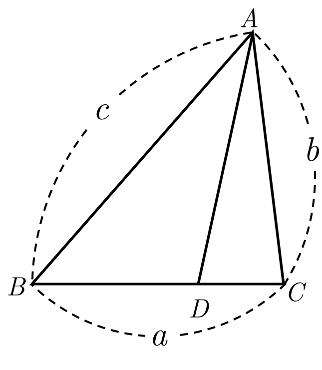
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$ (終)

ここで，さらに視点を広げると，次の性質を導くことができます．

スチュワートの定理(*Stewart*)

三角形ABCにおいて，辺BC上の点をDとすると，次の式が成り立つ．

$$DB\cdot b^2+DC\cdot c^2=a(DA^2+DB\cdot DC)$$



証明）$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\dfrac{\overrightarrow{DB}}{DB}=\vec{e}$ とすると，$\overrightarrow{DB}=DB\cdot\vec{e}$，$\overrightarrow{DC}=-DC\cdot\vec{e}$ である．

$$c^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right|^2=\left|\overrightarrow{DA}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2-2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=DA^2+DB^2-2DB\vec{a}\cdot\vec{e}\quad\cdots①$$

$$b^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right|^2=\left|\overrightarrow{DA}\right|^2+\left|\overrightarrow{DC}\right|^2-2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=DA^2+DC^2+2DC\vec{a}\cdot\vec{e}\quad\cdots②$$

①×DC+②×DB より，

$$\begin{aligned}DC\cdot c^2+DB\cdot b^2&=DC\cdot DA^2+DB\cdot DA^2+DC\cdot DB^2+DB\cdot DC^2\\&=(DB+DC)DA^2+DB\cdot DC(DB+DC)\\&=aDA^2+aDB\cdot DC\end{aligned}$$

以上より，　$DB\cdot b^2+DC\cdot c^2=a(DA^2+DB\cdot DC)$　　　　（終）

ちょっと始点を変えて，さらに基底ベクトルの視点を変えるとベクトルによる解法はとても鮮やかなものになります．

スチュワートの定理を少し変形してみましょう．

$BD:DC=m:n$ とします．

$BD=km$，$DC=kn$　$(k>0)$ とおき，公式の左辺と右辺をそれぞれ変形します．

$DB\cdot b^2+DC\cdot c^2=k(mb^2+nc^2)$

$a(DA^2+DB\cdot DC)=k(m+n)(DA^2+DB\cdot DC)$

これから次の式が得られます．

$$mb^2+nc^2=(m+n)(DA^2+DB\cdot DC)\quad\cdots(*)$$

(*)において $m=n$ とすると中線定理になります．

さらに(*)より，

$$AD^2=\frac{mb^2+nc^2}{m+n}-DB\cdot DC$$

ここで，

$$DB\cdot DC=km\cdot kn=k^2mn=k^2\frac{m^2n+mn^2}{m+n}=\frac{nDB^2+mDC^2}{m+n}$$

以上より，

$$\boxed{AD^2=\frac{nAB^2+mAC^2}{m+n}-\frac{nDB^2+mDC^2}{m+n}}$$

線分 AD の長さが，分点の公式のように表現することができます（$m=n$ とすると中線定理の別表現）．

特に，AD が内角 A の二等分線のとき，

$BD:DC=m:n=c:b$　より，

$$AD^2=\frac{bc^2+cb^2}{c+b}-DB\cdot DC=\frac{(b+c)bc}{b+c}-DB\cdot DC=bc-DB\cdot DC$$

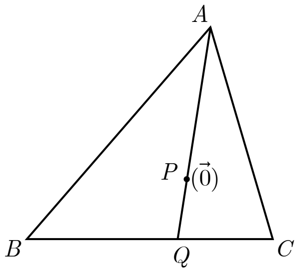
$\therefore\quad AD^2=AB\cdot AC-DB\cdot DC$

スチュワートの定理より，角の二等分線の長さを求めることができるのです．

本文の後半の Ex3 では，求点を始点にした解法を紹介しました．あのタフなまなぶでさえ不安になった置き方ですが，これに関して考えてみましょう．

> 三角形 ABC において次の式を満たす点 P の位置を求めよ．
>
> $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

この場合の位置ベクトルの始点は通常は A ですが点 P にするともっと見通しがよくなります．

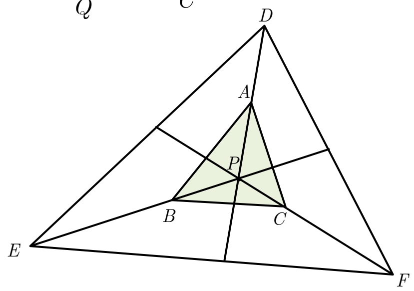


$$\overrightarrow{PA}=-\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{2}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}$$

辺BC を 4 : 3 に内分する点を Q とすると，$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PA}=-\frac{7}{2}\overrightarrow{PQ}$$

よって，$AP:PQ=7:2$ となります．



このように求められることは次のことから説明できます．

$$\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PA},\quad \overrightarrow{PE}=3\overrightarrow{PB},\quad \overrightarrow{PF}=4\overrightarrow{PC}$$

とおきます．これから

$$\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\vec{0}\qquad\cdots(*)$$

始点を O にすると，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}$．

すなわち，(*)を満たす点 P は三角形DEF の重心になります．

重心は三角形の 3 つの頂点に同じ重さを加えたときに釣り合う点ですが，三角形ABC の場合は，A，B，C の各頂点にそれぞれ，2，3，4 の重みが乗っていることになります．このとき，点 P は三角形ABC の 3 つの頂点の重みの和になり，この点 P を三角形ABC の質量中心といいます(力のモーメントを考えてみるとわかりやすいでしょう)．

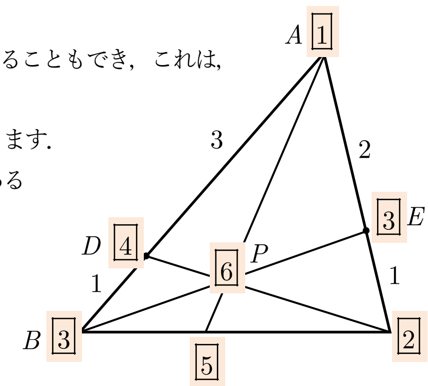
重心は三角形のバランス点であり，この点を始点と考えると重心の性質を表現しやすくなるのです．

$$(*)\text{より，}\quad \overrightarrow{DP}=2\cdot\frac{\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}}{2}.$$

点 P は頂点 D と線分 EF の中点を結ぶ線分(中線)を 2 : 1 に内分する点であることが分かります．

始点は与えられている条件を表現しやすい点にすることが望ましいわけで，だから Ex3 においても求点を始点にすることは不自然ではありません．

なお，分点でバランスをとっていくという視点では，「してん」は「支点」とみて考えることもでき，これは，バランス・メソッドという解法で知られています．



右図のように，三角形ABC の辺や線分を支点で釣り合うようにバランスをとっていきます．

点 P には 6 の重みが乗っています．これを B と C で表現するにはそれぞれの重みである 3 と 2 と点 P の重みの 6 で割って比にすることで，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$

このように点 P の位置ベクトルは求められます．

外心もまた位置ベクトルの始点の候補となります．

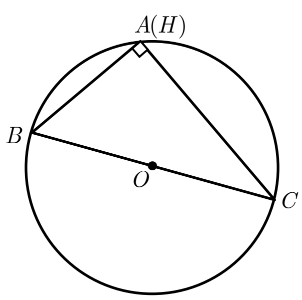
外心を位置ベクトルの始点にすると，外心と三角形の 3 つの頂点までの距離が等しい(外接円の半径)ことが利用できます．

> 三角形ABC の外心を O とする．このとき，
>
> $$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
>
> を満たす点 H は垂心である．

証明)

（ i ）三角形ABC が直角三角形のとき

$A=90^\circ$ の場合を示す．



斜辺 BC は外接円の直径である．このとき，垂心 H は頂点 A である．

また，外心は BC の中点より，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

これから，$\quad\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

B，C が直角のときも同様である．

（ⅱ）三角形ABC が直角三角形でないとき

各頂点から対辺に下ろした垂線が対辺と垂直になることを示せばよい．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AH}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ より，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

同様に，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ が導かれる．

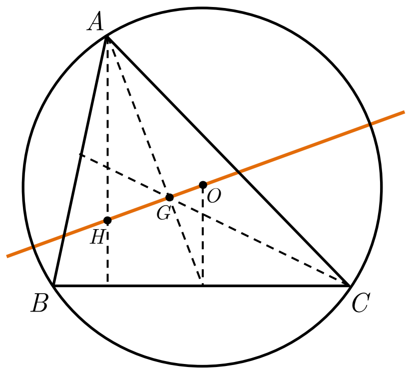
（ⅰ），（ⅱ）より点H は三角形ABC の垂心である．（終）

なお，上の証明を逆に辿れば，次も成立します．

> 三角形ABC の垂心をH とすると，
> $$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
> を満たす点O は三角形ABC の外心である．

この関係式から重心，外心，垂心に関する重要な性質が得られます．

> **オイラー線（Euler-Line）**
>
> 三角形ABC の外心O，重心G，垂心H は共線であり，次を満たす．
> $$OG:GH=1:2$$



証明）　外心の性質より，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

これから，

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$$

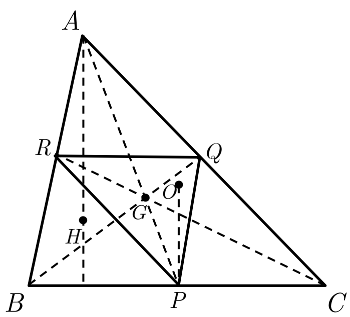
∴　3点O，G，H は一直線上に並び，

$$OG:GH=1:2$$

（終）

この共線をオイラー線といいます．

初等幾何でもオイラー線の証明法は幾つか知られていますが，その中でもっとも鮮やかな方法を示しましょう．



証明）三角形ABC の重心G は，中線AP，BQ，CR の交点であり，各中線を2 : 1 に内分する点である．よって，三角形ABC と三角形PQR は，重心G を相似の中心として，相似の位置関係にある．

ここで，点O は三角形PQR では垂心であるから，三角形ABC の垂心H と三角形PQR の垂心O はG を相似の中心として一直線上にあり，$HG:GO=2:1$ である．

点O は三角形ABC の外心より証明は帰結する．（終）

このように，三角形の外心を始点にすると，基底ベクトルの大きさが外接円の半径に等しいことを用いて，容易にオイラー線の存在を示せました．では，三角形の頂点を位置ベクトルの始点にするとどうなるでしょうか．

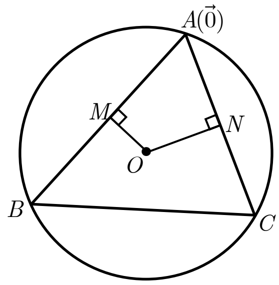
> 三角形ABC の外心をO とする．次の式を満たすs，t の値を求めよ．
> $$\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

この問題では位置ベクトルの始点をAとし，2つのベクトル$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$を基底ベクトルとしています．
そこで外心の性質を反映させるためには，2辺ABとACに着目し，

「2辺(外接円の弦)の垂直二等分線の交点が外心である」

ことを利用します．

AB，ACの中点をそれぞれM，Nとします．



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,,\quad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

これから，

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}=\left(s-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AN}=s\overrightarrow{AB}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$$

ここで，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AN}$

$\therefore\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NO}=0$

この2式よりs，tの値を求めます．そのためには，

2つの基底ベクトルの大きさと内積

が分かればいいわけです．

では始点を外心Oにするとどうなるでしょうか．

$$\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}\qquad\cdots(*)$$

とします．始点をAに変えてみましょう．

$$-\overrightarrow{AO}=m\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}\right)+n\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\right)$$

$\therefore\qquad \overrightarrow{AO}=\dfrac{m}{m+n-1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{n}{m+n-1}\overrightarrow{AC}$　　(3点O，B，Cは共線ではないから$m+n\neq1$)

よって，m，nを求めることができれば，

$$s=\frac{m}{m+n-1}\,,\quad t=\frac{n}{m+n-1}$$

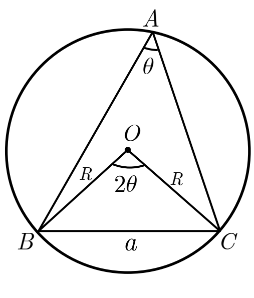
とおくことで，始点をAとして，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$を基底ベクトルとする一次結合で表現することができます．

では，(*)を満たすm，nを求めてみましょう．

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とし，三角形ABCの外接円の半径をRとすると，

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=R$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\angle BOC=R^2\cos2A$$



ここで，三角形OBCに余弦定理を用いると，

$$\cos2A=\frac{R^2+R^2-a^2}{2R\cdot R}=1-\frac{a^2}{2R^2}$$

$$\therefore\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=R^2-\frac{a^2}{2}$$

同様に計算すると．

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=R^2-\frac{b^2}{2}\,,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=R^2-\frac{c^2}{2}$$

(*)より，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=m\left|\vec{b}\right|^2+n\vec{b}\cdot\vec{c}\,,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=m\vec{b}\cdot\vec{c}+n\left|\vec{c}\right|^2$$

これからmとnの値が得られます．

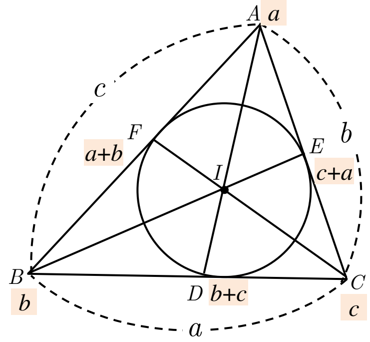
このように，外心Oを始点する場合，2つの基底ベクトルの大きさと内積の値は「外接円の半径」だけで得られ，円の性質が使いやすくなるのです．

さて，オイラー線は三角形の重心，外心，垂心に成立する性質です．外心と内心については，その距離が外接円の半径と内接円の半径で与えられる美しい性質があります．

オイラー・チャップルの定理（Euler-Chapple）

三角形ABCの外接円の半径をR，内接円の半径をrとする．
このとき，外心Oと内心Iの距離OIは，次により与えられる．

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$



三角形ABCの内心Iは内角の二等分線の交点であり，角の二等分線の性質より，右図のように頂点A，B，Cのそれぞれに a，b，c の重みを乗せたときの質量中心です．したがって，内心Iの位置ベクトルは次のようになります．

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

三角形の外心Oを始点とすると，外心と内心の距離は $\overrightarrow{OI}$ の大きさを求めればよいのです．

証明）位置ベクトルの始点を外心Oとすると，

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = R$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{c^2}{2},\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2 - \frac{a^2}{2},\quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = R^2 - \frac{b^2}{2}$$

である．

$$\left|\overrightarrow{OI}\right|^2 = \frac{\left|a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}\right|^2}{(a+b+c)^2}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\left|a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}\right|^2 &= a^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + b^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + c^2\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + 2ab\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 2bc\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + 2ca\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\ &= a^2R^2 + b^2R^2 + c^2R^2 + 2ab\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) + 2bc\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right) + 2ca\left(R^2 - \frac{b^2}{2}\right)\\ &= \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\right)R^2 - (abc^2 + a^2bc + ab^2c)\\ &= (a+b+c)^2R^2 - abc(a+b+c)\end{aligned}$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{OI}\right|^2 = \frac{(a+b+c)^2R^2 - abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2} = R^2 - \frac{abc}{a+b+c} \qquad \cdots(*)$$

三角形ABCの面積をSとすると，

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2}r \quad より，\quad \frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$$

以上より，

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

（終）

(*)は単純な計算で導き出すことができ，これも面白い性質です．
(*)以降は三角比で扱う面積比較の知識が必要になります．
なお，定理から，

$$OI = R^2 - 2Rr = R(R-2r) \geqq 0 \qquad \therefore\quad R \geqq 2r$$

すなわち，外接円の半径の長さは，内接円の直径の長さ以上ということが分かります．
等号が成立するのは，外心と内心が一致する三角形，すなわち正三角形だけです．
　この不等式をオイラーの不等式といいます．

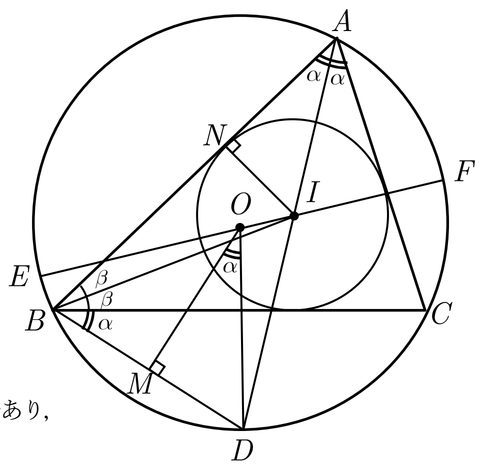
ところで，この証明には図が示されていません．図形問題であるのに必ずしも補助的に図を用いる必要はなく，始点を定めれば一気に自動算出できるのがベクトルの特徴なのです．

初等幾何による証明を示しましょう．

証明）

直線 AI と三角形 ABC の外接円との交点で A 以外の点を D とします．

また，直線 OI が外接円と交わる 2 点を E，F とします．



方べきの定理より，

$IE \cdot IF = IA \cdot ID$　…①

ここで，外接円の半径を R，$OI = d$ とすると，

$IE \cdot IF = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2$　…②

角 A，B の内角をそれぞれ 2α，2β とすると，

内心 I は内角の二等分線の交点より，

$\angle CBD = \angle CAD = \alpha$，$\angle IBC = \beta$ より，

$\angle IBD = \angle IBC + \angle CBD = \beta + \alpha$

また，$\angle DIB = \angle IAB + \angle ABI = \alpha + \beta$

これから，$\angle IBD = \angle DIB$ より三角形 DIB は二等辺三角形であり，

$ID = BD$．

外心 O から線分 BD に下ろした垂線を OM とする．

三角形 OBD は，$OB = OD = R$ の二等辺三角形より，OM は BD の垂直二等分線である．

$\therefore$　$DM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}ID$　…③

次に三角形 ABC の内接円と辺 AB との接点を N とすると，$AB \perp IN$．

内接円の半径を r とすると，

$IN = r$　　…④

また，$\angle NAI = \angle BAD = \dfrac{1}{2}\angle BOD = \angle MOD$

これから，$\Delta ANI \backsim \Delta OMD$ であるから，

$AI : IN = OD : DM$

$\therefore$　④より，$AI \cdot DM = OD \cdot IN = Rr$

③より，

$AI \cdot ID = AI \cdot 2DM = 2Rr$

①②より，

$d^2 = R^2 - IE \cdot IF = R^2 - IA \cdot ID = R^2 - 2Rr$　　　　（終）

方べきの定理，図形の相似，円周角と中心角の関係等，いろいろな性質を散りばめた賑やかな解答になっています．

初等幾何による証明は，解法の途中であれやこれやと思考を巡らせて試行錯誤的に道筋を尽くし結論に至ります．

これに対して線形代数であるベクトルによる証明は，方針を組み立てた後は，ひたすら直進して結論にたどり着く，といったところでしょうか．ベクトルによる解法は幾何ほどの閃きを必要としませんが，自動算出のフローチャートをなぞる Start の始点が重要になります．その Start から End を見据えることが面白いのです．

ところで，ベクトルは向きと大きさで定まる量なので，進路の指針に例えられます．でも，そこでは目標である「進路実現」に重きが置かれてしまいます．しかし，ベクトルがそうであるように重要なのはどこから始めたかという Start(始点)なのです．その基盤がしっかりしていて愚直に頑張れば，自ずと進路実現の道は拓けるものなのです．

※ オイラー・チャップルの定理の詳細は拙著「方べきの Power を解き放つ」の内心の方べきの項を参照

※ オイラー・チャップルの定理は，2002 年度の大学入試センター試験の数学 I A 第 4 問で出題されています．

（2023 年 1 月 13 日，大学入学共通テスト前夜に脱稿）