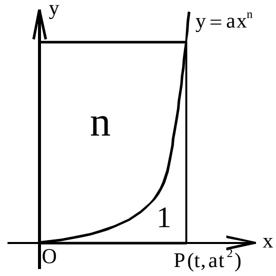
積分を使わず視る積分の性質

―――― $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の $\frac{1}{6}$ は何を意味するか？

札幌旭丘高校
中 村 文 則

Sec1> べき乗積分と面積比



曲線 $f(x)=ax^n$ $(a>0)$ と，x 軸および直線 $x=t$ $(0<t)$ で囲まれる図形の面積S は，

$$S=\int_0^t ax^n dt=\frac{1}{n+1}at^{n+1}$$

である．ここで，

$$S=\frac{1}{n+1}t\cdot at^n=\frac{1}{n+1}tf(t)$$

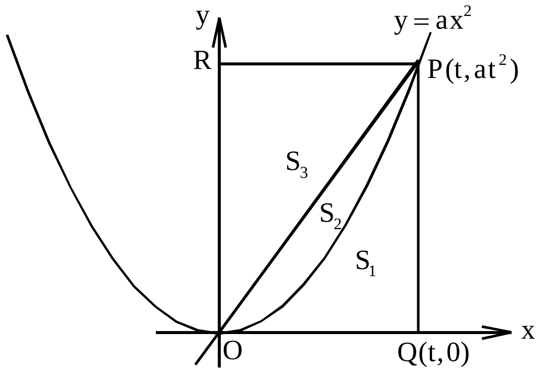
とみると，$t\cdot f(t)$ は，両軸と $x=t$，$y=f(t)$ で囲まれる長方形の面積T であるから，

$$S:T=1:(n+1)$$

これから，原点と点 $(x, f(x))$ を結ぶ線分を対角線のとする長方形の面積は，曲線 $y=f(x)$ により，$n:1$ の面積比に分割される．

$n=2$ の場合は，放物線によって，長方形は $2:1$ の面積比に分けられるということである．

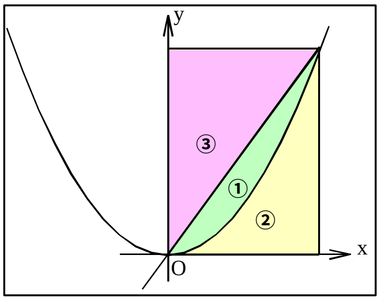
Sec2> 放物線に潜む面積比１：２：３



放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ の曲線上の点 $P(t,at^2)$ から x 軸，y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．
長方形OQPR の面積を S とすると，放物線と線分OQ，PQ で囲まれる図形の面積 S_1 は，

$$S_1=\frac{1}{3}S$$

である．また，線分OP と放物線で囲まれる図形の面積を S_2，三角形OPR の面積を S_3 とすると，



$$S_1+S_2=S_3$$

$S_3=\frac{1}{2}S$ であるから，

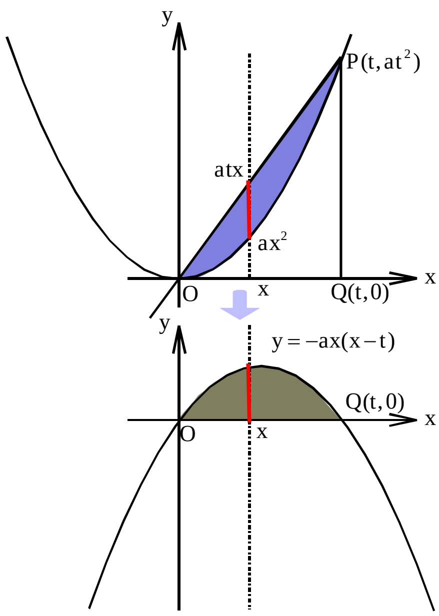
$$S_2=S_3-S_1=\frac{1}{2}S-\frac{1}{3}S=\frac{1}{6}S$$

以上より，

$$S_2:S_1:S_3=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=1:2:3$$

長方形の面積は弧OP と直線OP により，1 : 2 : 3の比に分割される．

Sec３> 放物線と直線が囲む面積



放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ が x 軸と異なる2点で交わるとき，囲まれる図形の面積を求めてみよう．

右図において，$P(t,at^2)$ とすると $y=ax^2$ と直線OP で囲まれる図形の面積は，図形を x 軸に対して垂直方向に，細かく等間隔にスライスした各々の短冊の図形の面積の和と考える．直線OP の方程式は $y=atx$ であるから，x 座標が x の位置での短冊の高さは，

$$atx-ax^2=-ax(x-t)$$

である．この短冊を x 軸の上に整形し直すことで，放物線

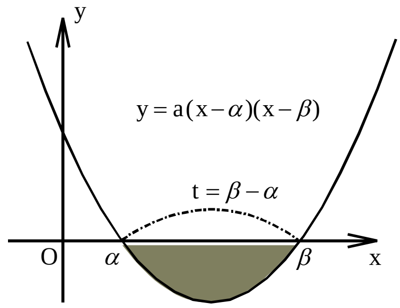
$$y=-ax(x-t)$$

が得られる.

さらに, 放物線を x 軸に関して対称移動し, x 軸の正の方向へ α 平行移動をする.

$$t=\beta-\alpha$$

とおくと, その面積 S は, 放物線 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸が囲む面積を表す.



$$\therefore \quad S=\frac{1}{6}at^3=\frac{1}{6}a(\beta-\alpha)^3$$

である.

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と, 直線 $y=mx+n$ で囲まれる面積についても同様に求められる. 放物線と直線の交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると, x 軸方向に垂直にスライスした x 座標が x である点の高さは,

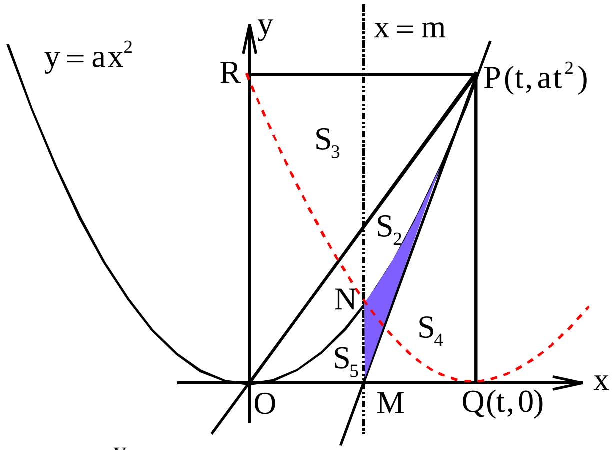
$$\left|ax^2+(b-m)x+(c-n)\right|=\left|a(x-\alpha)(x-\beta)\right|$$

であるから, 面積 S は,

$$S=\frac{1}{6}a(\beta-\alpha)^3$$

で得られる.

Sec 4> 放物線に潜むもうひとつの面積比１：２：３



放物線 $y=ax^2$ 上の点 $P(t, at^2)$ における接線を ℓ とし, x 軸との交点を $M(m, 0)$ とする.

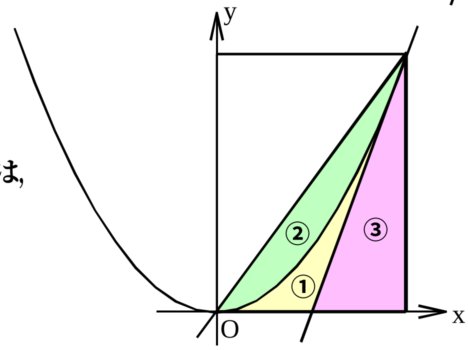
直線 MP と放物線 $y=ax^2$ および直線 $x=m$ で囲まれる図形の面積を x 軸方向にスライスして整形すると, $Q(t, 0)$ を頂点とする放物線

$$y=a(x-t)^2$$

が描かれる. この放物線は $y=ax^2$ と x^2 の係数(以後, グラフの開きとして表わす)は変わらないから, 点 M は OQ の中点となっている.

よって, 三角形 PMQ の面積を S_4 とすると,

$$S_4=\frac{1}{2}\Delta POQ=\frac{1}{2}S_3=\frac{1}{4}S$$



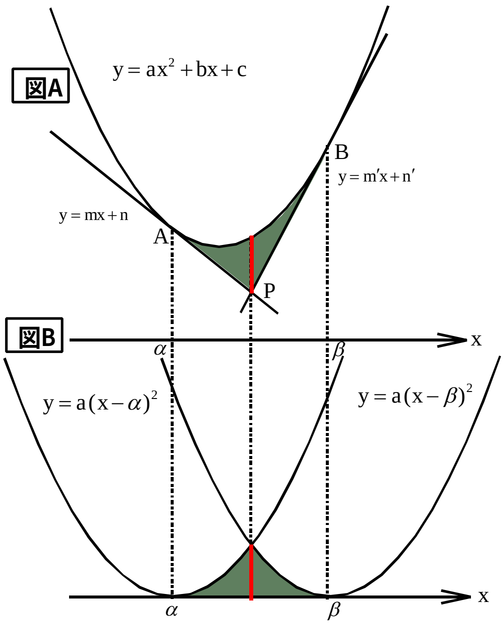
放物線 $y=ax^2$ と x 軸および直線 PM で囲まれる面積 S_5 は,

$$S_5=S_1-S_4=\frac{1}{3}S-\frac{1}{4}S=\frac{1}{12}S$$

これから,

$$S_5 : S_3 : S_4=\frac{1}{12}S : \frac{1}{6}S : \frac{1}{4}S=1:2:3$$

Sec 5> 放物線と曲線外から引いた２接線で囲まれる図形の面積



放物線 $f(x)=ax^2+bx+c$ に曲線外の点 P から引いた2本の接線と $y=f(x)$ で囲まれてできる図形の面積を調べてみよう.

右図のように2接線の接点を $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ とし, 点 P を通り x 軸に垂直な直線の方程式を $x=p$ とする.

線分 AP と $y=f(x)$ および $x=p$ で囲まれる図形を x 座標が x の点で x 軸方向に垂直にスライスして x 軸の上に整形し直す.

グラフの開き a は変わらないから点 A を x 軸上に落とした点が頂点である放物線は

$$y=a(x-\alpha)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

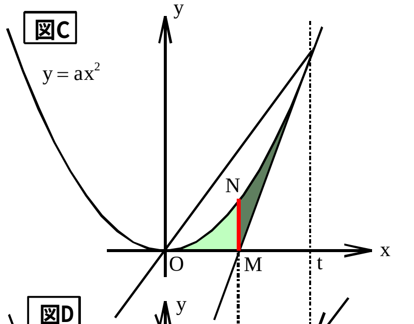
となる. 同様に, 線分 PB, $y=f(x)$ および $x=p$ で囲まれる図形を整形し直すと, 放物線

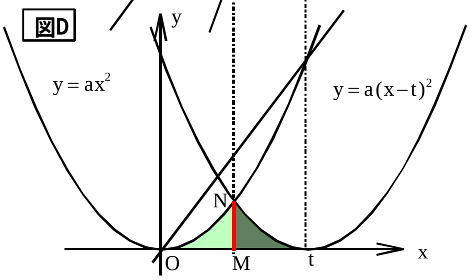
$$y=a(x-\beta)^2 \quad \cdots\cdots ②$$

となる.

放物線①と②はグラフの開きが同じであるから, 直線 $x=p$ は, ①と②の頂点から等距離にある.

$$\therefore \quad p=\frac{\alpha+\beta}{2}$$



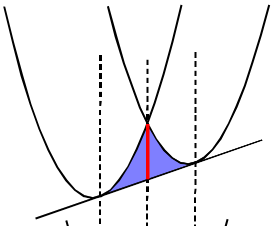


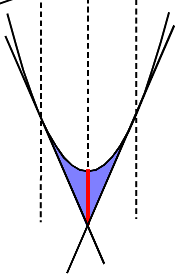
次に, 放物線 $y=ax^2$ 上の点 (t, at^2) における接線と x 軸との交点を M とすると, Sec4 で示したように点 M は原点と点 $(t,0)$ を結ぶ線分の中点である.

よって, 点 M を通り x 軸に垂直な直線の方程式は $x=\dfrac{t}{2}$ である.

この直線と接線および放物線で囲まれる図形をスライスし x 軸上に整形し直すと, 放物線 $y=a(x-t)^2$ が描かれる.

ここで, $t=\beta-\alpha$ とし, 2つの放物線 $y=ax^2$ と $y=a(x-t)^2$ を x 軸の正の方向に α 平行移動すると図 D は図 B に重なる.



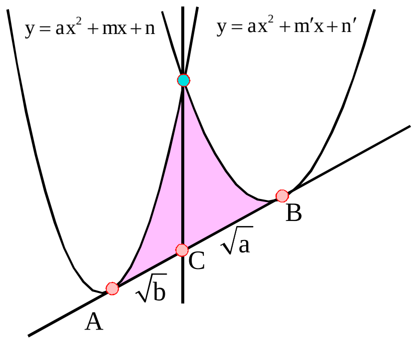


すなわち, 放物線とその2接線で囲まれる図 A の面積は, 図 C に整形し直すことが可能である. 図 C において, x 軸は放物線の接線でもあるから, 2接線で囲まれる図形の特別な場合と解釈することができる.

グラフの開きが等しい2つの放物線とその共通接線の関係は, 放物線と曲線外から引いた2接線の関係にみることもできる.

まず, 共通接線が x 軸になるように整形し直すことで図 D が得られ, 図 A にさらに整形し直せばよい. なお, グラフの開きが異なる2つの放物線の共通接線については次の性質が成り立つ.

> **2つの放物線**
>
> $y=ax^2+mx+n, \quad y=bx^2+m'x+n' \quad (ab>0)$
>
> **の共通接線の接点をそれぞれ A, B とする. このとき2つの放物線の交点を通り, y 軸に平行な直線と接線との交点を C とするとき, $AC:CB=\sqrt{b}:\sqrt{a}$ である.**



$a>0, b>0$ とし, 共通接線が x 軸となるように整形した2つの放物線,

$$y=ax^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=b(x-p)^2 \quad \cdots\cdots ②$$

について示しても一般性は失われない.

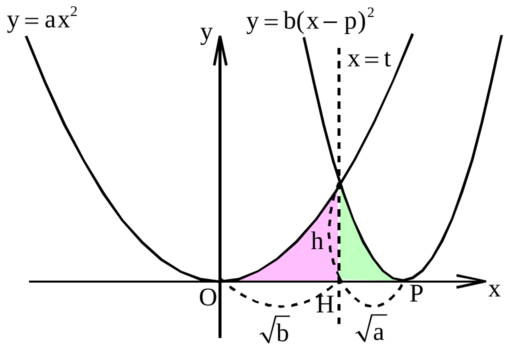
放物線②の頂点を P , 2つの放物線の交点の座標を (t,h) とし, 直線 $x=t$ と x 軸との交点を H とする.

$h=at^2=b(t-p)^2$ より,

$$OH^2=t^2=\frac{h}{a} \quad , \quad HP^2=(t-p)^2=\frac{h}{b}$$

であるから,

$$OH:HP=\sqrt{\frac{h}{a}}:\sqrt{\frac{h}{b}}=\sqrt{b}:\sqrt{a}$$



また, 放物線 $y=ax^2$ と x 軸および $x=t$ で囲まれる図形の面積を S_a , 放物線 $y=b(x-p)^2$ と x 軸および $x=t$ で囲まれる図形の面積を S_b とするとき,

$$S_a:S_b=\frac{1}{3}\sqrt{b}h:\frac{1}{3}\sqrt{a}h$$

$$=\sqrt{b}:\sqrt{a}$$

である.

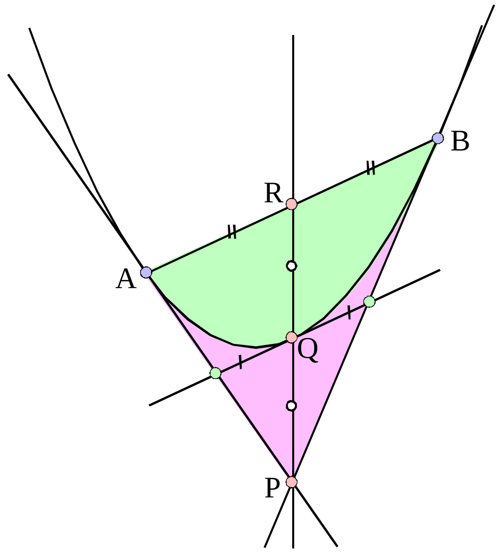
Sec6> 放物線と曲線外から引いた２接線とで囲まれる図形の性質

放物線と曲線外から引いた2接線の種々の性質を調べてみよう.

放物線 $y=f(x)$ に曲線外の点 $P(x_1, y_1)$ から引いた２接線の接点を $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ とする.

また, 点 P を通り, y 軸に平行な直線と放物線 $f(x)$, 直線 AB との交点をそれぞれ Q, R とする.

以下の性質が成り立つ.



①２接線と放物線で囲まれた図形の面積を S_1, 直線 AB と放物線で囲まれた図形の面積を S_2 とすると,

$$S_1 : S_2 = 1 : 2$$

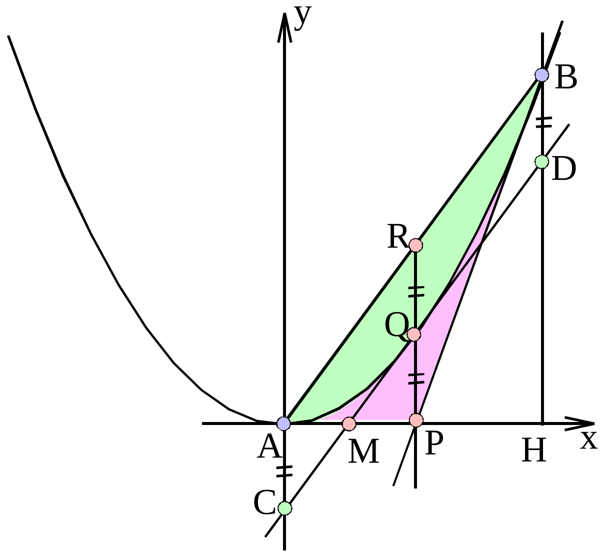
である.

②点 R は, 線分 AB の中点である.

③点 Q は, 線分 PR の中点である.

④点 P における放物線の接線は直線 AB に平行である.

これらの関係は, 図形を x 軸方向に垂直にスライスして整形した図形で考えても一般性は失われない.



右図の放物線と線分 AB で囲まれた図形と, 放物線と x 軸および接線 BP で囲まれた図形の面積比は Sec4 より, 2 : 1 である. (①)

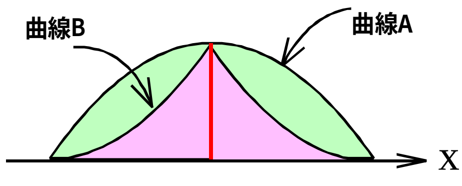
また, 点 B から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると, Sec5 より点 P は AH の中点より, $AP = PH$ である.

ここで, $PR // HB$ であるから, $AP : PH = AR : RB$ より

$AR = RB$ (②).

放物線と線分 AB で囲まれた図形を x 軸方向に垂直にスライスし整形した図形を「曲線 A」とする. 同様に, 放物線と x 軸および線分 PB で囲まれた図形を x 軸方向に垂直にスライスし整形した図形を「曲線 B」とすると, 曲線 A,B は放物線であり, どちらのグラフの開きは同じであるから, その高さは等しい.

よって, $PQ = QR$ である. (③)



点 Q を通る接線と y 軸, x 軸, BH との交点をそれぞれ C, M, D とすると, Sec5 より,

$AM = MP$

よって, $\Delta ACM \equiv \Delta PQM$

∴ $AC = PQ = QR$

以上より, $AB // CD$ (④)

あとがき

本稿は積分を用いて得られる放物線の面積に関する性質を論じたものである.

しかしながら, 積分計算をしているのは Sec1 における, 「べき乗の不定積分 $\frac{1}{3}x^3 + C$」のみである. 以後は一切積分を用いていない.

受験数学では直線と放物線が囲む面積は

$$\frac{1}{6}|a|(\beta - \alpha)^3$$

として面積公式で与えられるが，これを用いた解答が許されるかどうかは議論の分かれるところである．三角形の面積公式と同等に扱ってしまってもいいような気もするのだが，マニュアル的受験テクニックの最先鋒の如く目をつけられしまった節もある．べき乗関数の積分指導においては，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

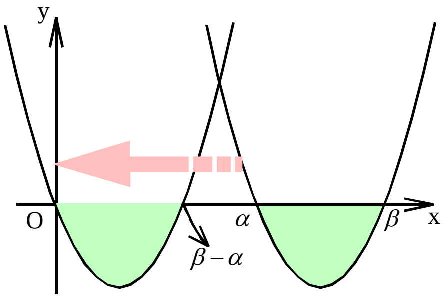
は計算練習問題として扱われてしまい，図形の面積との関わりを避けているように思えるが，その計算方法がテクニック的になっているのは可笑しい．だが曲線の囲む面積とみると証明は容易である．

証明)

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ とおくと，x軸と放物線で囲まれる図形の面積Sは，$S=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ である．

ここで，放物線とx軸の2交点の座標は，$A(\alpha,0)$, $B(\beta,0)$ ($\alpha<\beta$ とする)であるから，点Aが原点になるように放物線をx軸方向に平行移動すると，点Bの座標は，$B'(\beta-\alpha,0)$ に移る．よって，

$$\begin{aligned}
S&=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
&=-\int_{0}^{\beta-\alpha}x\{x-(\beta-\alpha)\}dx\\
&=\int_{0}^{\beta-\alpha}\{-x^2+(\beta-\alpha)x\}dx\\
&=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{\beta-\alpha}{2}x^2\right]_0^{\beta-\alpha}\\
&=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}+\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}\\
&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$



結局は，置換積分をしたことになるのだが，積分の見通しはずいぶんよい．本稿もこういった「見通しのよさ」を重視してまとめてみた．その典拠となるのがカバリエリの原理である．

カバリエリ(Bonaventura Cavalieri 1598-1647)はデカルトと同時代のイタリアの数学者である．彼は，長さも大きさもない点が無限個集まり曲線を形成するとし，積分法の前駆である「不可分の方法」を提唱する．点の集合が線となり線の集合が面積となるといった論法は集合論からみると乱暴なものであるけれど感覚的･直感的には組みし易い．この思想を受け継ぐと本稿の唯一，積分に拠った Sec1 の放物線の積分も次のように説明が可能となる．

右図の長方形OABC の辺OAをn等分したx軸上の点を

P_k $(k=0,1,2,3,\cdots\cdots,n)$

とする．P_k を通りx軸に垂直な直線と放物線のと交点をQ_k とし，Q_k を通り，y軸に垂直な直線と，$P_{k+1}Q_{k+1}$ との交点を R_{k+1} とする．

長方形OABC の面積Sは，

$S=OA\cdot AB$

長方形$P_kP_{k+1}R_{k+1}Q_k$ の面積S_k は，

$S_k=P_kP_{k+1}\cdot P_kQ_k$

放物線の性質より

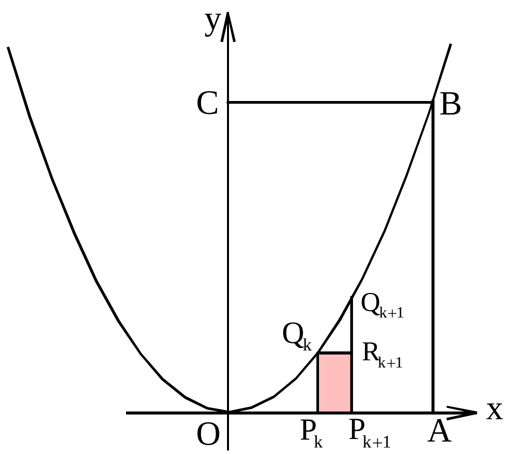
$P_kQ_k:AB=k^2:n^2$

また，

$P_kP_{k+1}:OA=1:n$

であるから，

$S:S_k=n^3:k^2$



S_k $(k=0,1,2,3,\cdots,n-1)$ の総和をTとすると，

$T=1^2+2^2+\cdots n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

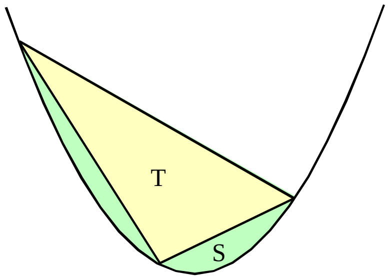
である．ここでnを無限に大きくすると，

$S:T=3:1$ となるから，

$T=\frac{1}{3}S$

である．この幅(横の長さ)が微小の長方形(線分)の総和T が放物線とOA，OB で囲まれる図形の面積である．
この考え方を発展させたものがカバリエリの原理である．

2つの立体をある平面に平行な任意の平面で切ったとき，その切り口の面積が常に等しければ，2つの立体の体積は等しい



積分の萌芽でもあるこの原理を元に本稿は積分に関わる放物線の種々の性質を導き出している．
その中で Sec6 の性質は，ヘレニズム幾何学の創始者であるアルキメデス(Archimedes:B.C.287-212)が示したものである．アルキメデスは，円や放物線などの二次曲線の面積や球，円柱の体積などの求積に優れた功績を残しており，彼の発想にも積分法の萌芽を窺い知ることができる．
アルキメデスは，放物線をひとつの弦で切ったとき，弦と放物線の弧で囲まれた図形の面積S を求めている．
弦からもっとも離れた点と弦の両端を結んでできる三角形の面積をT とすると，

$$S=\frac{4}{3}T$$

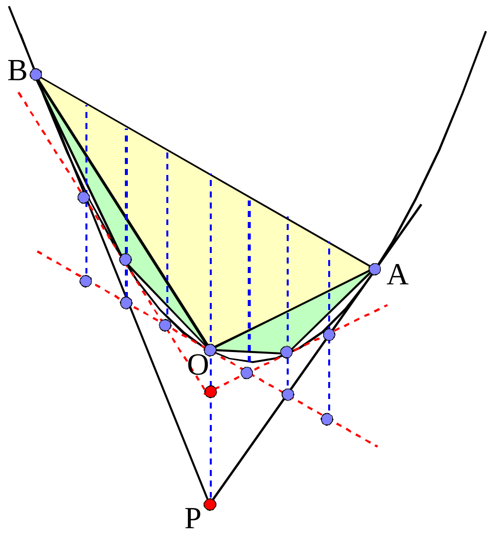
なる関係が成立することを証明し，三角形の面積から放物線の囲む面積を求めている．2接線の交点である極点と，極点を通り主軸に平行な直線と弦との交点を結ぶ線分の中点が、弦からもっとも離れた点であることより，2接点と極点を頂点とする三角形の面積は 2T である．よって，2接線と放物線で囲む面積U は，

$$U=2T-S=2T-\frac{4}{3}T=\frac{2}{3}T$$

これから，弦と放物線で囲まれる面積S と，2接線と放物線で囲まれる面積U の面積比は，

$$S:U=\frac{4}{3}T:\frac{2}{3}T=2:1$$

となり Sec6①が得られる．
アルキメデスの発想を簡単に紹介しよう．
彼は始めに，板の上に放物線を描き切り抜いて，天秤にかけて釣り合いを調べ，図形の面積比を実験的に求めている．続いて，幾何学的な証明を次のように与えた．
弦 AB の中点を通り主軸に平行な直線と放物線との交点をO とすると，点O は放物線からもっとも遠い点であるから点O における接線は弦 AB に平行である．



弦 AB と放物線で囲まれた図形の面積をS，ΔOAB の面積をT とする．
S からT を取り除いた残りはOA, OB を弦として弧で囲まれる二つの部分に分かれる．それぞれの弦に対してまた同様の操作をして作られる2つの三角形の面積は等しく，面積は$\frac{1}{8}T$ である．この面積を取り去ると，S から取り去った面積の和は，

$$T+2\times\frac{1}{8}T=T+\frac{1}{4}T$$

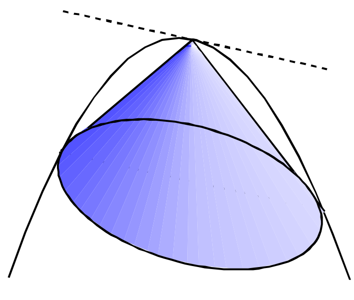
この操作を続けていけば，S の面積は次第に取り除かれ，やがてはすべて「取り尽され」なくなってしまう．これから

$$S=T+\frac{1}{4}T+\left(\frac{1}{4}\right)^2T+\left(\frac{1}{4}\right)^3T+\cdots\cdots$$

である．この無限等比数列の和は

$$S=\frac{T}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}T$$

で与えられるが，ヘレニズム時代にはまだ無限という概念は成熟していない．どんなに取り尽しても微小のすき間は残るということにギリシア数学は神経質であった．そこでアルキメデスは二重の背理法を用いることで面積S が$\frac{4}{3}T$ より大きくも小さくもないことを証明している．同様に，放物線の回転体の任意の部分の体積V と同じ底面と同じ軸をもつ円錐の体積D については，



$$V=\frac{3}{2}D$$

なる関係が成立することをアルキメデスは見出している.

ところで，放物線と直線が囲む図形の面積公式

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^2$$

は，ベータ関数 $B(m,n)$ (第１種オイラー関数)で与えられることが知られている.

$$\boxed{B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(x-1)^{n-1}dx=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n)!}}$$

証明) 部分積分により,

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx\\&=\left[\frac{x^m}{m}(1-x)^{n-1}\right]_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}dx\\&=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)\\&=\frac{(n-1)(n-2)}{m(m+1)}B(m+2,n-2)\\&=\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)}B(m+n-1,1)\\&=\frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx\\&=\frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)(m+n-1)}\left[x^{m+n-1}\right]_0^1=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\end{aligned}$$

ここで,

$$t=(\beta-\alpha)x+\alpha \qquad \cdots\cdots(*)$$

とおくと,

$$dt=(\beta-\alpha)dx$$

x	$0\cdots\cdots\cdots1$
t	$\alpha\cdots\cdots\cdots\beta$

$$\begin{aligned}B(m+1,n+1)&=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^m\cdot\left(\frac{-t+\beta}{\beta-\alpha}\right)^n\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}dx\\&=\frac{(-1)^n}{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}\int_{\alpha}^{\alpha}(t-\alpha)^m(t-\beta)^n dx\end{aligned}$$

$$\therefore\ \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(-1)^n(\beta-\alpha)^{m+n+1} \qquad \text{Q.E.D}$$

(*)による置換は

グラフの x 軸との２交点の幅を $(\beta-\alpha)$ 倍し，x 軸の正の方向へ α 平行移動することを表わしている.

ここで，$m=1$ とすると,

$n=1$ のとき $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$n=2$ のとき $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

よく知られた公式が出現する.

<参考文献>

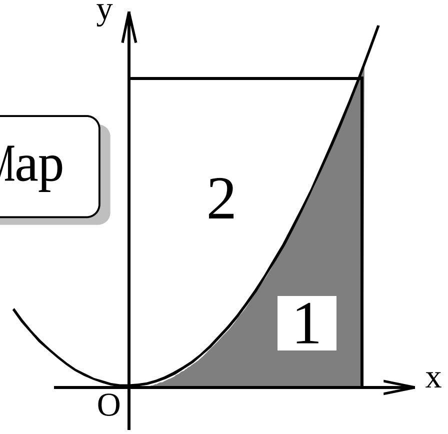
解析概論 <高木貞治 著　岩波書店>

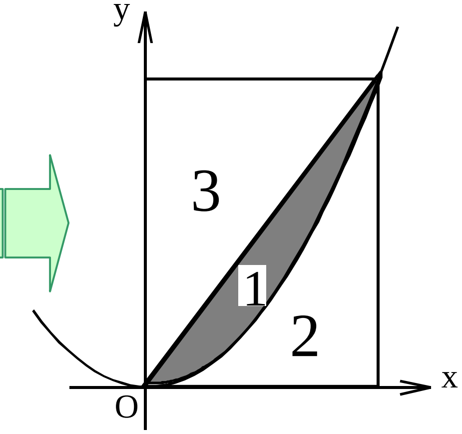
数学を築いた天才たち　<スチュアート･ホリングデール著　講談社>

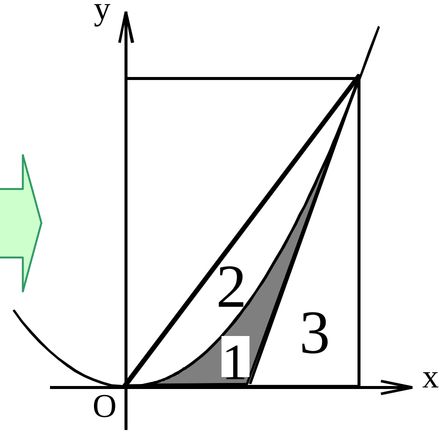
数学史 (幾何と空間)　<小杉 肇 著 槙書店>

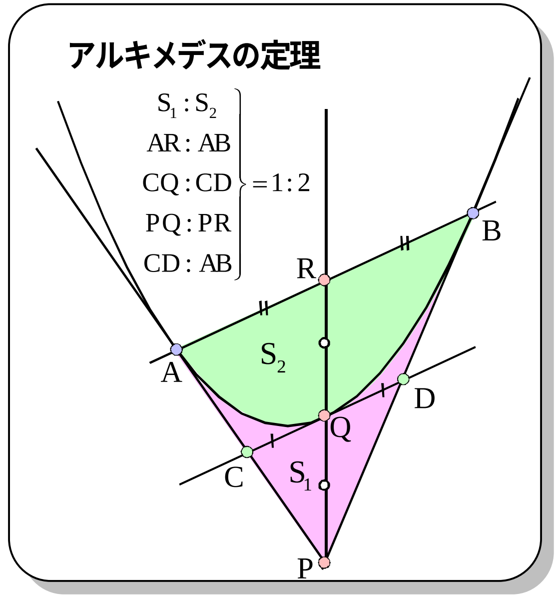
放物線の囲む面積Chart Map

Map

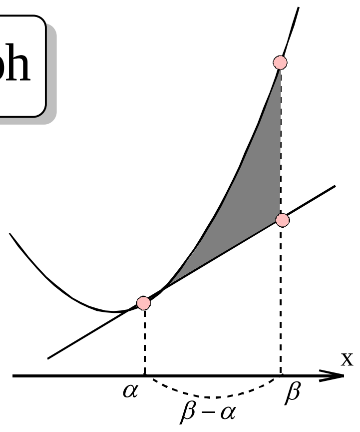


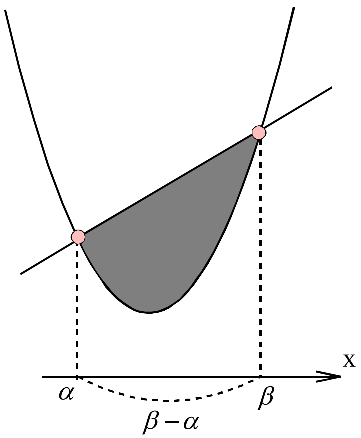


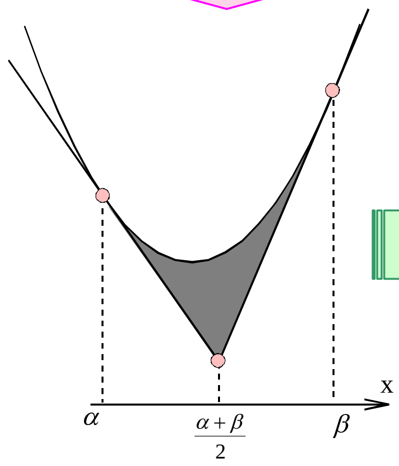


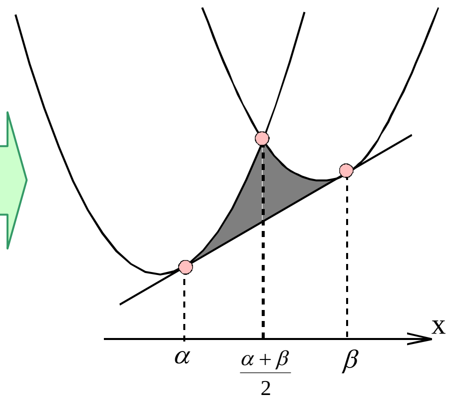


Graph









Area

$$S=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$S=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$S=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$