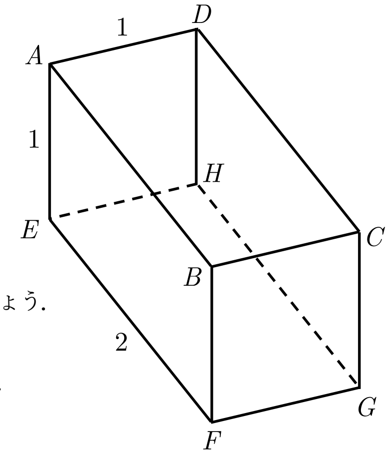
正射影ベクトルの小手技

中村文則

○月影参上，ひとてま不要でござる！

<先　生>　今日の授業は内積についてもう一度考えてみよう．
まずは復習です．次の問題を解いてごらん．制限時間は３分程度かな．



ex1）右の直方体 ABCD-EFGH において，次の内積を求めよ．

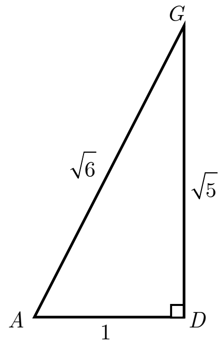
(1)　$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}$　　(3)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AF}$

(4)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}$　　(5)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$　　(6)　$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EC}$

<まなぶ> いくら基本問題だからといっても問題量多すぎません．それを３分で解け
なんて，ウルトラマンじゃないんだから，無理難題，いや無理基本問題でしょう．
先生，家庭でなんかあったの．僕たちに八つ当たりしてないだろうか．

<先　生> ぶつぶついってると時間がなくなるよ．みんなで協力するとなんとかなる．

<アリス> いそいでやります，まず(1)
BC は長方形 AEFB と垂直だから長方形上の線分 AF とも垂直です．
∴　$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　できました，バトンタッチです．



<かず子> (2)ですね．えっ，これ簡単に求められないよ．
直方体から三角形 ADG を切り抜き，三平方の定理を用いて３辺の長さを求めます．
三角形 ADG は直角三角形だから，$\cos\angle GAD=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$
これから，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AG}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\angle GAD=\sqrt{6}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}=1$
わー，時間がない，バントタッチ．

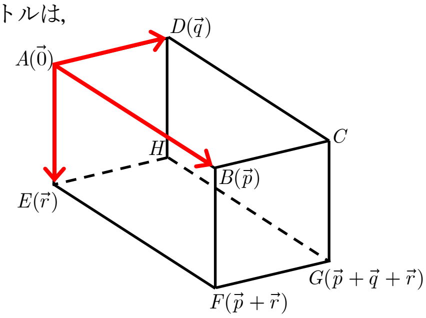
<よしお> (3) 今度も三角形 AGF は直角三角形だ．だから……．

<先　生> 終了でーす．

<まなぶ> なんとよしおで終ってしまった．先生，どう考えてもこの問題，内積は直ぐには分からないよ．
やっぱり基本ではない．やっぱり無理難題だ．

<かず子> 愚痴はいいから．それで，次に解くはずだったまなぶは(3)はできたの．

<まなぶ> みんなが解いているとき，僕は簡単にできないかと考えていたんだ．そうしたら思いついた．
先生は以前，基底とするベクトルの大きさと内積が分かれば，ベクトル問題は，
automatic calculation で求められる，そういっていただろ．この問題の基底ベクトルは，



$\overrightarrow{AB}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{q}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{r}$

こうすると，$\left|\vec{p}\right|=2$，$\left|\vec{q}\right|=1$，$\left|\vec{r}\right|=1$

そしてどの２つのベクトルも直交しているから内積は，

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=0$$

あとは直方体の頂点の位置ベクトルを計算すれば，automatic calculation．

例えば(3)は，$\overrightarrow{AG}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{p}+\vec{r}$

これから，

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{p}+\vec{r}\right)=\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{r}+\vec{q}\cdot\vec{p}+\vec{q}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\vec{p}+\vec{r}\cdot\vec{r}=\left|\vec{p}\right|^2+\left|\vec{r}\right|^2=5$$

面倒そうにみえるけど，異なるベクトルの内積は０だから，それを無視すれば簡単に計算できる．

<アリス> まなぶさん，凄い．ためしに一番難しそうな(6)でやってみます．

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\vec{q}-\left(\vec{p}+\vec{r}\right)$， $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\left(\vec{p}+\vec{q}\right)-\vec{r}$ です．

これから，同じベクトルの内積だけを計算して……，

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(-\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}\right)=-\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{q}\cdot\vec{q}+\vec{r}\cdot\vec{r}=-4+1+1=-2$$

本当に簡単にオートマチックに求められる．先生，こういうことだったんですね．

<先　生> うまい方法だ．まなぶはベクトルの自動算出の考え方をちゃんと理解していたんだね．

でも違う！

<まなぶ> へっ？

<かず子> えっ，じゃなくて，へって，何それ．まなぶ，よほど自信があったんだね．

<先　生> まなぶの方法は機械的にはできるけど，それなりに計算に時間がかかってしまうだろ．

<まなぶ> それならどうすればいいってこと．よしおはどう思う．

<よしお> ぼくにもちょっと分からない．先生，どう考えればいいのでしょう．

<先　生> 実はまだ学んでいない方法で求めるんだ．

<まなぶ> 先生，それはサギ，授業詐欺でしょう，送りつけ商法みたいなものだ．ひどい．

<先　生> 最初に，「内積についてもう一度考える」といったでしょ．みんながこれまで学んだ方法ではずいぶん時間がかかってしまうことを実感して欲しかった．だからこのような問題を出題したんだ．

<まなぶ> うーん，納得できない．

<アリス> まなぶさんのアイデアもすごいと思う．でもそれ以上にすぐに求める方法があるなら教えてください．

<先　生.> それではまず，内積はどういうものかもう一度確認しよう．

<よしお> $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角をθとして，次のように定義しました．

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

<先　生> ではこの図形的な意味はなんだろうか．

<まなぶ> そういう定義だから意味は必要なのかな．

<先　生> どんなことにも合理的な理由があるから定義できるものだ．内積はベクトルの積のことだけど，スカラー積のように計算できない理由はなんだろうか．

<かず子> 2 つのベクトルの向きが違っているからでしょうか．

<先　生>そうです．だから 2 つのベクトルの「方向」を同じにするとスカラー積と同様に計算できることになる．

<よしお> 先生はいま強調して「方向」といいましたが，「向き」ではないのですか．

<先　生> 「向き」と「方向」は少し異なる．例えば，家のベランダが「南向き」にあるというけど，「南方向」とは言わないだろ．

<まなぶ> 確かに．でも「右向き」といっても「右方向」といってもあまり違和感はないけど．

<先　生> 用語の使い方は最近は曖昧になっているからしょうがないのかな．数学でいうとベクトルは向きだけど，直線の傾きは方向，そう言えば分かるだろうか．

<よしお> そういうことですか．例えば，直線 $y=-\dfrac{2}{3}x$ の傾きは，

$$\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$$

このように考えると 2 つの向きがあるということですね．

<先　生> そうです．傾きを方向ベクトルの成分表示で表すと，

$(3,-2)$ と $(-3,2)$

これから 2 直線の平行条件は方向が同じということになる．

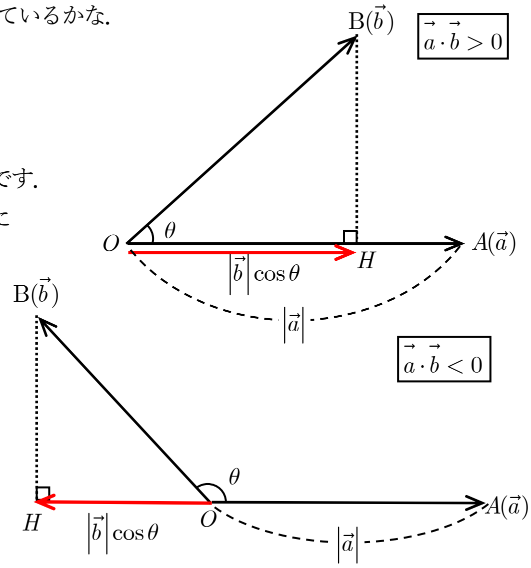
<アリス> 向きとその逆向きを合わせて方向ということなんですね．

右の向きと左右の方向，　南向きと南北方向

このように使い分けている．日本語は難しいわ．

<先　生> 話を戻そう．だから，ベクトルの積で「方向を同じにする」ということは，２つのベクトルの向きは，同じか，逆向きにしてやればよい．逆向きにした場合は内積は負になるけど，それはスカラー積でも同様だ．

そこでもう一度定義の式をみよう．$\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ は，図形的にどんなことをいっているかな．



<かず子> 図のように $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると，

$$\left|\vec{b}\right|\cos\theta=OB\cos\theta$$

だから点 B から直線 OA に下ろした垂線を BH とするとき，OH のことです．
そうか，これで OA と OH は一直線上にあるからスカラー積と同じように積を計算できるのですね．

<よしお> 先生が向きではなく方向にこだわった理由が分かりました．
$90°<\theta<180°$ のときは，点 H は O に関して点 A と反対側にあります．
x 軸上で A が正の座標なら H は負の座標になり，向きが逆向きになる，
このとき，$OB\cos\theta$ は $\cos\theta<0$ だから，内積は負の値になるのですね．

<先　生> このように，方向を同じにするために考えた OH を OB の OA への正射影という．くだいていうと，OH は OB の影みたいなものだ．

<まなぶ> なるほど．内積は，自分と相手の月影との積ってことか．

<アリス> お日様が作る影ではなく，月の影なんて，まなぶさんはロマンチストなんですね．

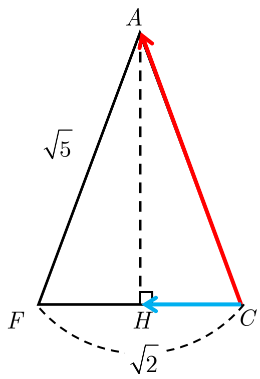
<かず子> まなぶにはお天道様はまぶしすぎるということよ．まあ，夜行性といってもいい．

<まなぶ> ドラキュラか！

<先　生> さて，そこで ex1 の問題だけど，内積を正射影との積と考えるといままでとは違った見方で計算できるはずだ．
まあ，ここはロマンチストまなぶの命名を尊重して正射影を月影ということで進めようか．
(1)は BC の AF への月影は 0 より内積は 0．
(2)は AG の AD への月影は AD になる．∴　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=1$

<かず子> あっというまですね．次を解いてみます．
(3)は，AG の AF への月影は AF．　∴　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AF}=AF^2=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$
確かにまなぶの考え方より簡単だと思う．でも，なんか月影って抵抗あるんですけど．

<まなぶ> かず子はロマンとは程遠い現実派だからな．
さて(4)は……，あれ，三角形 AFC は直角三角形ではないから月影を落とせないよ，先生．



<先　生.> 三角形の形状を調べて，CA の C F への月影を考えよう．

<まなぶ> $AF=AC$ だから二等辺三角形だ．ということは，CA の CF への月影は…，
あっ，FC への垂線 AH は，FC の中点を通る．ということは，

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}=CH\cdot CF=\frac{1}{2}CF^2=1$$

でも，(5)も同じ二等辺三角形 AFC だけど，AC の AF への月影は AF の中点ではない．

<先　生> ベクトルの定石の始点と終点の間に中継点をいれて考えてみよう．
例えば(4)では，$\overrightarrow{CA}$ を点 B で中継する．

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CF}=BF^2+0=1$$

このように求めることもできるんだ．

<アリス> オートマチックの計算方法も生きているのですね．そうすると，(5)は，$\overrightarrow{AC}$ を B で中継してみます．

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}=AB^2+0=4$$

<先　生> だいぶ，コツがつかめてきたね．それではラストの問題(6)だ．

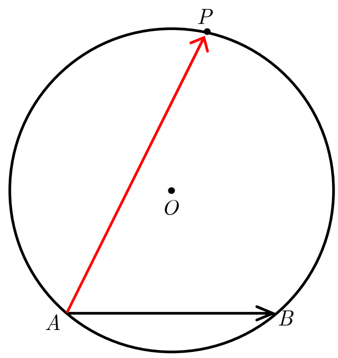
<よしお> $\overrightarrow{FD}$ を E で中継します．

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}\right)\cdot\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EC}=-EF^2+ED^2=-4+2=-2$$

<まなぶ> これならカップラーメンにお湯を注いで待っている時間でできてしまう．
月影，いい仕事してる．

<先　生> $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ だったね．でも，気が付いたと思うけど月影で内積を計算すると，これを意識する必要はない．正射影は 0 と考えればいいだけだ．
もう 1 題，問題を解いて確認してみよう．

ex2）図の円 O において，弦 AB の長さを 4 とする．
点 P は円周上を動くとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ を次の場合について求めよ．
(1) AP が円の中心 O を通る．
(2) 点 P は弦 AB の垂直二等分線上にある．
(3) 円 O の半径が 3 のときの内積の最大値．



<よしお> 円の半径は最初から与えられているのではなく，(3)だけなんですね．

<まなぶ> 月影をみればもとの実態は関係ないということか．

<かず子> (1)は AP が円の中心を通るから AP は直径です．タレスの定理より $\angle PBA=90°$
AP の AB への影は AB だから，

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=16$$

<アリス> (2)は AB の垂直二等分線上に点 P があるから，ΔPAB は二等辺三角形です．
だから，AB の中点を H とすると，AP の AB への月影は AH です．

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=AH\cdot AB=\frac{1}{2}AB^2=8$$

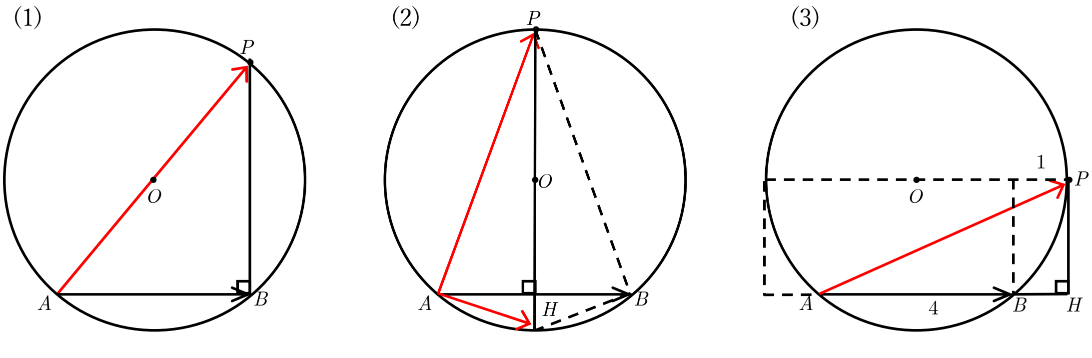
<まなぶ> (3)は内積が最大になるのは AP の AB への月影が一番長いときだから…
分かった．AB に平行な直径の右端点が P のときだ．AP の AB への月影を AH とすると，

$$AH=AB+BH=5$$
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=AH\cdot AB=5\cdot 4=20$$

<先　生> 先ほどの ex1 と違い，もうみんなスイスイ月影に落とせるね．ついでに最小値の方も求めよう．

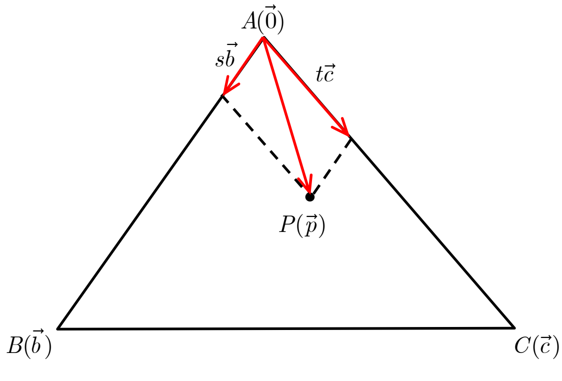
<よしお> 今度は，AB に平行な直径の左端点が P のときです． $AH=1$ だけど，ベクトルのなす角は鈍角だから，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-1\cdot 4=-4$$



<先　生> 内積が負の値になること，見落とさなかったね．
では，いよいよ月影を利用して応用問題に挑戦だ．

ex3）三角形 ABC において，
$AB=5$， $AC=6$， $BC=7$
である．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$， $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 　とする．
$$\overrightarrow{AP}=s\vec{b}+t\vec{c}$$
を満たす点 P が次で与えられるとき，s と t の値を求めよ．
(1) 外心 O　　(2) 垂心 H　　(3) 内心 I



<まなぶ> いきなり難易度上げすぎてない．外心の位置ベクトルを求めるのだって大変だった記憶があるんだけど．
それを３つもなんて．重心がなくてよかったけど．

<かず子> 重心は影を使わなくたって分かっているでしょ．重心Ｇの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

だから，三角形の五心で傍心以外は求められるということですね．

<先　生> まなぶは大変というけど，以前解いたときは月影が登場していなかったからだ．
月影を利用すると外心，垂心，内心の３つとも，同じ方法で簡単に求めることができる．
そこでまず最初にまなぶが ex1)で言っていたけど，基底ベクトルの大きさと内積を計算しておこう．
ベクトルはそれが分かると，automatic calculation だ．

<まなぶ> しょうがない．僕が言っていたことだから，計算しましょ．それにしても辺の長さが 5，6，7 とは．
いい加減で適当な数値だと思っているのは僕だけかな．

まず大きさは，　$\left|\vec{b}\right|=5$，$\left|\vec{c}\right|=6$．

次に内積．$BC=7$ より，$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=49$

ここで，$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=61-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

すなわち，$61-2\vec{b}\cdot\vec{c}=49$　　　$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=6$

問題はこれを用いてどう計算するかだ．

<先　生> その前にもう一つ準備が必要だ．
$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{b}$ と $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{c}$ を計算して，s と t で表そう．

<かず子> うーん，何をしようとしているのか分かりませんが，計算します．

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{b}=\left(s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=s\left|\vec{b}\right|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}=25s+6t$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{c}=\left(s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=s\vec{b}\cdot\vec{c}+t\left|\vec{c}\right|^2=6s+36t$$

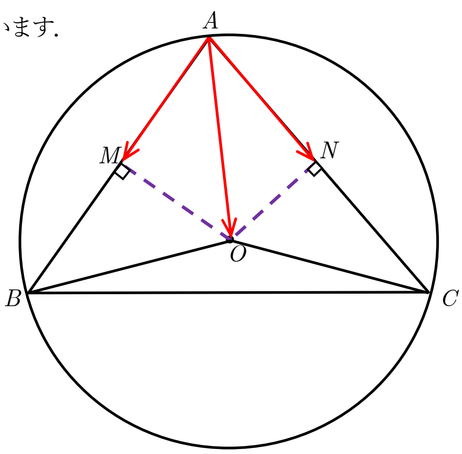
<先　生> これで準備完了．あとは，automatic calculation.

<かず子> 先生，まなぶに感化されていない．これから何が始まるのですか．

<よしお> たぶん，$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{b}$ と $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{c}$ を月影で計算するとどうなるか，ということだと思う．そうですよね．

<先　生> その通りです．どのように影を落とせばいいか考えてごらん．

<アリス> まず(1)の外心Ｏです．P=O とします．
AO の AB への月影を考えると……，あっ，これ，前の問題でやっています．



$OA=OB$ だから，三角形 AOB は二等辺三角形．
これから，Ｏから AB に下ろした垂線を OM にすると，
AO の AB への月影は AM です．ここで，M は AB の中点だから，

$$\overrightarrow{AO}\cdot\vec{b}=AM\cdot AB=\frac{1}{2}AB^2=\frac{25}{2}$$

<かず子> 同じように考えれば，Ｏから AB への月影を AN とすると，

$$\overrightarrow{AO}\cdot\vec{c}=AN\cdot AC=\frac{1}{2}AC^2=18$$

これから，$25s+6t=\frac{25}{2}$，$6s+36t=18$

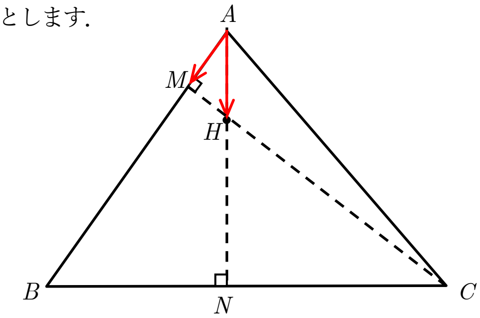
あとはこれを解くだけだわ．計算すると……，

$$s=\frac{19}{48},\ t=\frac{125}{288}\qquad\therefore\ \overrightarrow{AO}=\frac{19}{48}\vec{b}+\frac{125}{288}\vec{c}$$

本当に簡単に求められた．垂心や内心も月影の長さを求めれば automatic calculation ということね．
あっ，わたしもつられて言っちゃった．

<よしお> 面白いですね．では垂心の月影を考えてみます． $P=H$ とします．

垂心の性質から直線CHと辺ABは垂直に交わります．その交点をMとします．



$$\cos\angle CAB=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|}=\frac{6}{5\cdot 6}=\frac{1}{5}$$

これから，

$$AM=AC\cos\angle CAB=6\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$$

よって，

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=AM\cdot AB=\frac{6}{5}\cdot 5=6$$

同じように， $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{c}$ を計算すればいいですね．

<先　生> もちろん同じようにできるけど，月影を別の移し方で考えてみよう．

直線AHとBCの交点をNとすると，ANはBCと垂直だよね．

<まなぶ> そうか，ABのAHへの月影とACのAHへの月影はどちらもANで等しい．

そうすると，

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{c}=6$ 　すなわち，

$25s+6t=6s+36=6$ 　これを計算して，

$s=\frac{5}{24}$， $t=\frac{19}{144}$ 　 $\therefore\ \overrightarrow{AH}=\frac{5}{24}\vec{b}+\frac{19}{144}\vec{b}$

<かず子> 最後は内心．P=Iとします．

もう，やることは分かったわ．

AIの影を求めるにはどうすればいいかということね．

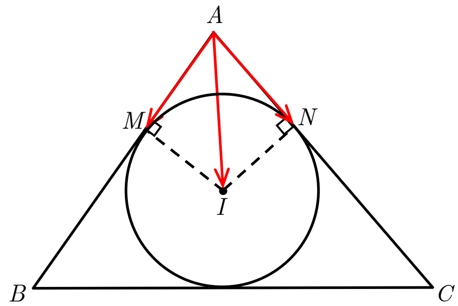
内心だからまず内接円を描いてみる．

あー，そうか，内接円と辺AB，ACの接点をそれぞれM，N

とすると，AMとANが影だわ．

点Aから円に引いた2つの接線の長さは等しいから，

$AM=AN$．あとはこれを求めるだけ．



<アリス> それ，以前やったことがあります．

$AM=AN=x$

とおいて，右図のように

AM→MB→BL

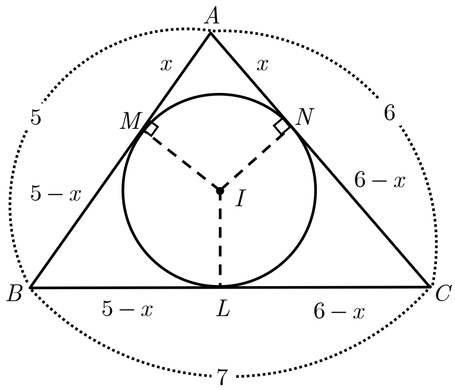
AN→NC→CL

の長さを調べればいい．

$BL+LC=BC=7$

$(5-x)+(6-x)=7$ 　より， $x=2$

$\therefore$ 　月影の長さは， $AM=AN=2$



<よしお> これから，

$\overrightarrow{AI}\cdot\vec{b}=AM\cdot AB=10$， $\overrightarrow{AI}\cdot\vec{c}=AN\cdot AC=12$

すなわち，

$25s+6t=10$， $6s+36t=12$ 　　これを解いて

$s=\frac{1}{3}$， $t=\frac{5}{18}$ 　 $\therefore\ \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{5}{18}\vec{c}$

内心の位置ベクトルも求めることができました．

<まなぶ> 本当に同じ方法で解けた．ところで先生，ちょっと考えたのだけど．もとのベクトルが動くと，月影だって動く．

だから月影はもとのベクトルの分身みたいなものだ．だったら月影もベクトルで表すことはできないのだろうか．

<かず子> 影の分際なのにでじっとしていられないのね．動くとうざいでしょ．

<先　生> かず子は，月影をまなぶの影だと思っていないかな．なんか闇の中を蠢いているような印象かもしれないけど，正射影はもっと純粋だ．

<まなぶ> 2 人で僕のこと，いいだけ弄ってない？

<先　生> でもまなぶのいっている影のベクトルってアイデアは重要だ．正射影の素晴らしさは，月影の長さだけでなく，ベクトルとして表現できることにあるんだ．

$\vec{b}$ を $\vec{a}$ に落としてできる月影のベクトルを，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルという．

さて，それを考える前にもう一度ベクトルについて確認しておこう．

ベクトルは大きさと向きできまる量だ．例えば $\vec{a}$ の大きさは $\left|\vec{a}\right|$ だけど，では向きはどう表せばいいだろうか．

<かず子> ベクトルの終点の矢印がなんとなく向きって感じだけどちゃんと考えたことはないかも．

<まなぶ> ベクトルと向き合ってなかったということだろ．僕は角度で向きを表すと思う．2 つのベクトルの場合はそのなす角を考えるのだから．

<よしお> 角度を向きとするなら，どこから測った角度にするか基準が必要ですね．水平方向とか，あるいは xy 座標平面であれば x 軸でしょうか．

<先　生> そういうことになるね．ではそれが $\vec{a}$ にどう表現されているかということだけど，次のように考えよう．

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} \text{ とすると，} \quad \vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\vec{e}$$

さて，$\vec{e}$ の大きさは何だろう．

<アリス> ベクトルをその大きさで割っているから 1 です．

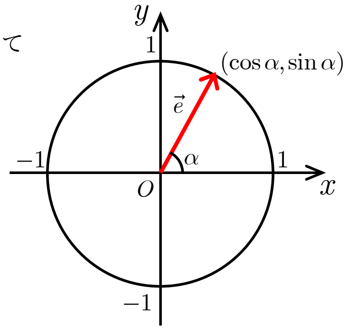
<よしお> $\vec{e}$は単位ベクトルということですね．

<先　生> そう．大きさは 1 だから，単位ベクトルは向きだけできまるものと考えてよい．

ベクトルを成分表示するならば，座標平面では単位ベクトルの終点は単位円上にある．そして

$$\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$$

このような x 軸の正の向きとなす角度 α が存在する．この角度 α によって向きが定まると考えればいい．



<まなぶ> 僕が考えた通りだ．でもそのことと月影を表すベクトルがどう関係するのかな．

<先　生> 正射影の大きさは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ をすると，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影は，$\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ だった．

だからあとはこれに向きを与えてやればいい．

<よしお> それで単位ベクトルなのですね．$\vec{b}$ の正射影は $\vec{a}$ と方向が同じだから $\vec{a}$ を単位ベクトルにして掛けることで，向きを与えるということですか．

<先　生> その通り．正射影ベクトルを $\vec{p}$ とすると，$\vec{p}$ は次のようになる．

$$\vec{p}=\left|\vec{b}\right|\cos\theta\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$$

<かず子> そうすると正射影ベクトルを求めるには 2 つのベクトルのなす角が分からないとだめということでしょうか．

<先　生> なす角の余弦が必要にはなるけど，これを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すことはできないだろうか．

<アリス> あっ，ベクトルの余弦定理ですね．$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$ だから，これを代入して，

$$\vec{p}=\left|\vec{b}\right|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ だけで正射影ベクトルは表せましたが，スカラー積とベクトルの積が混じっていて混乱してしまいそう．

<先　生> もう少し整理してみよう．

$$\vec{c}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$$

これで，$\vec{a}$ は単位ベクトル $\vec{c}$ になる．これから正射影ベクトル $\vec{p}$ は次のようになる．

$$\vec{p}=\left(\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\vec{b}\right)\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\left(\vec{e}\cdot\vec{b}\right)\vec{e}$$

でも実際の計算としては，単位ベクトルにしない方が求めやすい．

たとえば，$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(4,3)$ のとき，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル $\vec{p}$ は，

$$\left|\vec{a}\right|^2=5,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=10 \text{ より，}\quad \vec{p}=\frac{10}{5}\vec{a}=(2,4)$$

このようになる．一つ問題を解いてみよう．

ex4) 直線 $\ell : 2x+3y=4$ に原点 O から下ろした垂線を OH とするとき，点 H の座標を求めよ．

<まなぶ> 直線 ℓ に垂直で原点を通る直線 $3x-2y=0$ と直線 ℓ の交点を求めればいいだけだ．

<かず子> それをあんたが主張した正射影ベクトルで求めるということでしょ．

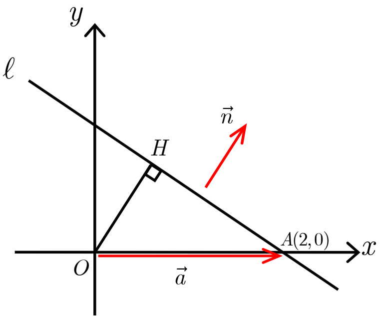
<アリス> $\overrightarrow{OH}$ が正射影ベクトルですね．でも，どのベクトルのどのベクトルへの正射影かしら．

<よしお> 直線 ℓ の法線ベクトル $\vec{n}=(2,3)$ への正射影を考えればいい．あとはどのベクトルのということだけど……．

<まなぶ> テキトーに作ればいいんじゃない．

例えば直線 ℓ と x 軸との交点は $A(2,0)$ だから，$\vec{a}=(2,0)$ とする．

そうすると，$\vec{a}$ の $\vec{n}$ への月影ベクトルになるだろ．



<かず子> ほんと，テキトーね．そうすると，$\left|\vec{n}\right|^2=13$，$\vec{a}\cdot\vec{n}=4$

これから，　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{4}{13}(2,3)$

$\therefore\quad H\left(\dfrac{8}{13},\dfrac{12}{13}\right)$

できました．

<先　生> この問題はまなぶが言ったように 2 直線の交点から簡単に求められるけど，正射影ベクトルで解いたのはその利用方法を理解して欲しいからです．では今度は次の問題で考えてみよう．

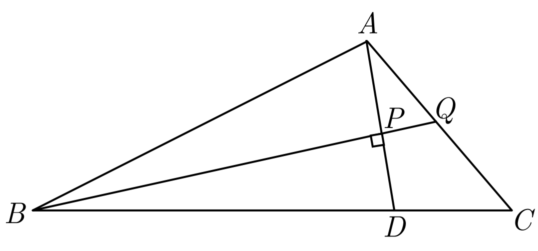
ex5) 三角形 ABC において，

$AB=3$，$BC=4$，$CA=2$

である．辺 BC を 3 : 1 に内分する点を D とする．点 B から線分 AD に引いた垂線と AD との交点を P，AC との交点を Q とする．ただし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする．

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $AQ:QC$ を求めよ．



<よしお> (1)は $\overrightarrow{BP}$ と $\overrightarrow{AD}$ は垂直だから内積は 0．(2)は直線 BP のベクトル方程式から AC との交点を求める問題です．

<かず子> それを正射影ベクトルで解くということですね．この場合，$\overrightarrow{AB}$ の $\overrightarrow{AD}$ への正射影ベクトルは $\overrightarrow{AP}$ です．

<アリス> まず $\overrightarrow{AD}$ を求めます．点 D は BC を 3 : 1 に内分する点より，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$$

次に $\overrightarrow{AD}$ の大きさです．

<まなぶ> アリス，基底ベクトルの大きさと内積を求めることを忘れているよ．

$\left|\vec{b}\right|=3$，$\left|\vec{c}\right|=2$

$BC=4$ より，$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=16$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=13-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

これから，$13-2\vec{b}\cdot\vec{c}=16$　$\therefore$　$\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{3}{2}$

なんかこの時間，僕は基底ベクトルの計算ばかりしている．それにしても3辺の長さが2，3，4って．

やっぱり，先生は適当に値を考えてるでしょ．

<アリス> まなぶさん，ナイスアシスト．これで $\overrightarrow{AD}$ の大きさを計算できます．

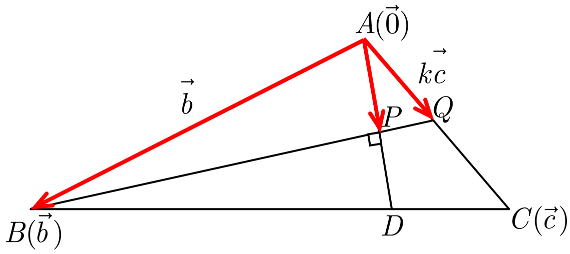
$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{16}\left|\vec{b}+3\vec{c}\right|=\frac{1}{16}\left(\left|\vec{b}\right|^2+6\vec{b}\cdot\vec{c}+9\left|\vec{c}\right|^2\right)=\frac{9}{4}$$

次に内積です．

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{b}\right|^2+3\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\frac{9}{8}$$

これから，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\vec{b}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|^2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\therefore$　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{8}\vec{b}+\dfrac{3}{8}\vec{c}$



なんか，いままでとはまるで違う感覚で解けちゃいました．

<先　生> $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ より，点Pは線分ADの中点であることも分かる．次は(2)だ．

<まなぶ> 一番簡単な方法はメネラウスの定理だと思う．それを月影を用いて求めるには…，$\overrightarrow{AQ}$ の $\overrightarrow{AD}$ への月影ベクトルが $\overrightarrow{AP}$ であることを使えばいいのか．

$\overrightarrow{AQ}=k\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AD}=k\vec{c}\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)=\frac{k}{4}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}+3\left|\vec{c}\right|^2\right)=\frac{21k}{8}$$

で，このあとはどうしよう．

<よしお> 前の問題でもあったけど，

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$

これを利用すればいい．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{9}{8}$ だったから，

$\dfrac{21}{8}k=\dfrac{9}{8}$ より，$k=\dfrac{3}{7}$

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$　　$\therefore$　$AQ:QC=3:4$

こちらもふつうの方法とは違う感覚で解けました．

<まなぶ> なるほどね．月影を合わせるっていうのがコツなのか．

<先　生> 月影を合わせることは正射影の極意ともいえる．では最後の問題だ．

ex6）空間の4点を $A(2,1,3)$，$B(1,1,-1)$，$C(2,-1,1)$，$P(3,2,1)$ とする．

3点A，B，Cを通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 平面 α に垂直なベクトルを1つ求めよ．

(2) 点Pから平面 α に下ろした垂線PHの長さを求めよ．

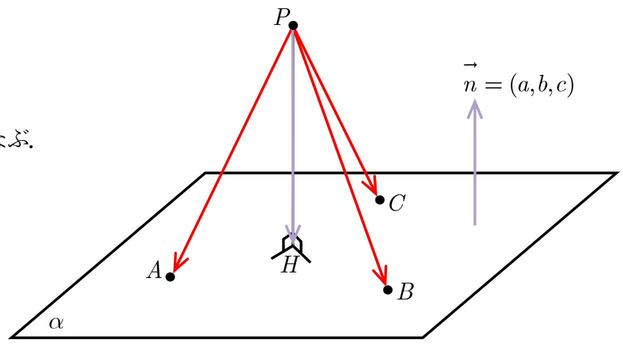
<まなぶ> まだ問題あるの．今回は多すぎない？

<先　生> せっかく正射影ベクトルである月影を考えた．いままで，月影を用いて平面図形の問題を解いてきたけど，月影は空間でこそ，その真価を最大限に発揮できる．

<かず子> だいたい，もともとはまなぶが言い出したことなんだからね．

<よしお> まず(1)ですね．普通に考えれば，平面 α を $ax+by+cz+d=0$ とおいて，3 点を代入し，平面の方程式を求めます．このとき，法線ベクトル $\vec{n}=(a,b,c)$ が，平面に垂直なベクトルです．(2)は点と平面の距離の公式です．

<かず子> あるいは， $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると，$\vec{n}$ は $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直より内積は 0 であることを利用して求めます．後半の(2)はちょっと大変だけど．



<アリス> でも，そう解かないということですよね．

<先　生> まず，$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ を求めよう．

<かず子> 位置ベクトルの始点を P にするということですね．働け，まなぶ．

<まなぶ> しょうがないな．別に面倒ではないけど．

$$\overrightarrow{PA}=(-1,-1,2)\,,\quad \overrightarrow{PB}=(-2,-1,-2)\,,\quad \overrightarrow{PC}=(-1,-3,0)$$

これでいいかな．

<先　生> 平面 α に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,b,c)$ とする．

そしていよいよ，月影参上だ．

<アリス> 先生，ずいぶんハイテンションです．いままでの流れでいえば， $\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}$ を考えます．

$\overrightarrow{PA}$ の $\vec{n}$ への月影は…あっ， PH です．

<かず子> そうか，同じように考えると， $\overrightarrow{PB}$， $\overrightarrow{PC}$ の $\vec{n}$ への影も PH です．

これが影を集めるということなんですね．だから，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}$$

これを計算すればいい．

<アリス> 簡単です．

$$-a-b+2c=-2a-b-2c=-a-3b \qquad \cdots(*)$$

左辺と中辺から， $a=-4c$ 　　左辺と右辺から， $b=-c$

これから， $\vec{n}=(-4c,-c,c)$ 　垂直なベクトルは 1 つ求めればいいから， $c=-1$ とします．

$$\vec{n}=(4,1,-1)$$

(1)はできました．

<かず子> (2)は正射影ベクトル $\overrightarrow{PH}$ を求めてその大きさを考えればいい．元になるベクトルは，先ほどのまなぶのテキトー法でいうなら，例えば $\overrightarrow{PA}$ で， $\vec{n}$ への正射影ベクトルが $\overrightarrow{PH}$ ということです．

$$\left|\vec{n}\right|^2=18\,,\quad \overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}=(-1,-1,2)\cdot(4,1,-1)=-7$$

これから， $\overrightarrow{PH}=\dfrac{-7}{18}\vec{n}=-\dfrac{7}{18}(4,1,-1)$

$$\therefore \quad \left|\overrightarrow{PH}\right|=\frac{7}{18}\sqrt{18}=\frac{7\sqrt{2}}{6}$$

やっぱり，いままで学んだものと異なる感覚の解法です．

<まなぶ> みんな，ちょっと月影ベクトルを酷使し過ぎているのでは．アリスが計算した内積の値である(*)は，月影を考えれば $PH\cdot\left|\vec{n}\right|$ のことだろ．だから(*)の右辺の式に $a=4$， $b=1$ を代入すれば　$-a-3b=-7$

これから，大きさは 7．あとは， $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{18}$ で割れば垂線の長さは求められるだろ．

<先　生> こういう黒い影のようなものから情報を引き出すことにまなぶは長けているな．

<まなぶ> 月影は，闇の中で相手の影に潜み始末する，まるで忍者のようで陰の実力者である僕に確かに似ているかも．

<かず子> 結局そういうオチになる．だから正射影を月影なんかにしたくないのよ．

あとがき

ベクトルの加減は外延量の演算子ですが，内包量であるベクトルの積の演算子は，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ (dot)と外積$\vec{a}\times\vec{b}$ (cross)があります．長さと長さをかけると面積になるように，内包量である掛け算は新しい量を生むわけですからその演算子がどういう働きをするかは明確に説明し定義すべきではないでしょうか．教科書では「$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角をθ とするとき，$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す」，このように記載されています．なぜそのように積を考えてそれがスカラーになるのかという説明はないのです(ちなみに数学 C に移された新教育課程のベクトル分野には外積もコラムとして記述されています．点と平面の距離の公式は某教科書ではなぜか削除されてしまいましたが)．そのため，内積の図形的な意味に欠かせない正射影(ベクトル)を触れることはなく，その結果，内積を用いて計算するには「ひとてま」が必要になってしまうのです．

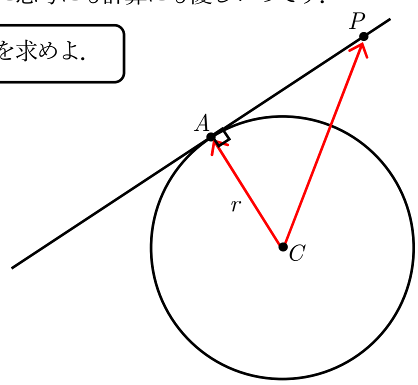
内積でもっともよく用いられるのは「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとき(なす角は$90°$ より)，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ である」，という性質です．

$$\vec{a}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

この逆は必ずしも成り立ちません．それは，$\vec{a}$ や$\vec{b}$ が$\vec{0}$ のとき，内積は 0 だけど垂直ではないからです．問題集の解説には注意事項として書かれます．でも教科書の定義ではそもそも$\vec{0}$ でない 2 つのベクトルで内積を定義しているわけですから，逆も成り立つとしてもいいのでしょう．

さて，「ひとてま」のことですが，例えば，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が垂直であるとき，内積が 0 であることを用いるには始点を移動させる手間がかかることがあります．本文の ex4 や ex5 の一般的な解答を考えてみれば分かるでしょう．でも正射影ベクトルは始点を動かすことなく処理ができるため「ひとてま」の必要はなく，格段に思考にも計算にも優しいのです．

点 C を中心とする半径r の円がある．円周上の点 A における接線の方程式を求めよ．



正射影ベクトルで考えてみましょう，接線上の動点を P とすると，

$\overrightarrow{CP}$ の $\overrightarrow{CA}$ への正射影は CA より，

$$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=CA^2=r^2 \quad \cdots\cdots(*)$$

$C(a,b)$，$A(x_1,y_1)$ とすると，

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

このように簡単に求められます．

これを垂直条件で考えれば，

点 P が点 A に一致しないときは，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{CA}$ より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

点 P が点 A に一致するときは，$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

これから直接計算してx，y の関係式を求めてもいいですが，(*)にするには，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}$$

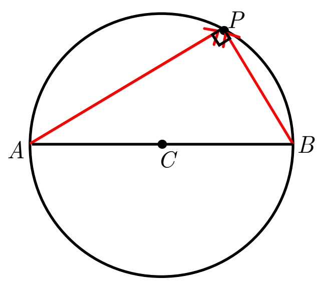
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \text{ より } \quad \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=\left|\overrightarrow{CA}\right|^2=r^2$$

ひと手間もふた手間もかかってしまうのです．

同じように，球面の接平面についても正射影では手間なくバイパスできて公式を導くことができます．

では，次の問題はどうでしょうか．

2 点 A，B を結ぶ線分 AB を直径の両端とする円の方程式を求めよ．



直径を弦とする円周角は$90°$ ですから，

点 P が点 A または点 B に一致しないとき，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$ より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$．

点 P が点 A または点 B に一致するとき，$\overrightarrow{AP}$ または$\overrightarrow{BP}$ は$\vec{0}$ より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

これから，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ とすると，円の方程式は，

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

ひと手間かかっていますが意外と簡単に求められます．

これを，正射影で考えてみましょう．$\overrightarrow{AB}$ の $\overrightarrow{AP}$ への正射影は AP より，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=AP^2$$

計算しようとするとちょっと大変です．

$$AP^2=\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$$

このようにみると，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}\quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\right)=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

ずいぶん手間がかかっていますが，これは正射影の落とし方がよくないからです．

この場合は，$\overrightarrow{PB}$ の $\overrightarrow{PA}$ への正射影は 0 とみると，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$$

これで，ひと手間はなくなります．

正射影を用いるときは，どこからどこへ影を落とすということが重要なのです．

本文の内容について触れましょう．

(ex3)は，外心，垂心，内心の位置ベクトルを正射影を落とすことで同じように求められることを説明しています．

傍心はどうかというと，これも求めることは可能です．$\overrightarrow{AP}$ を落とした正射影は次の性質より得られます．

> 三角形において，1 つの頂点と，その対辺で接する傍接円との接線の長さは，三角形の周の長さの $\dfrac{1}{2}$ である．

右図の頂点 A の対辺に接する傍接円 I_A で示しましょう．

$AB=c$， $BC=a$， $CA=b$ とします．

頂点(極)A から円に引いた 2 つの接線 AK， AM の長さは等しいことを利用します．

$AK=AM=s$ とします．

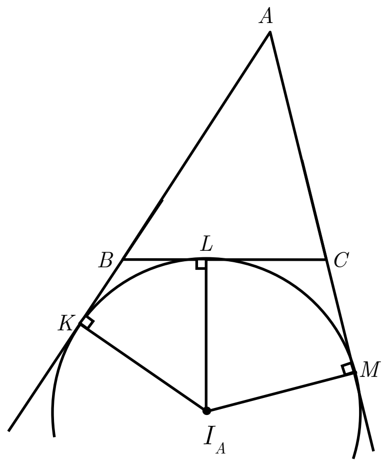
$$s=AK=AB+BK=c+BL$$

$$s=AM=AC+CM=b+LC$$

2 式を辺々加えると，

$$2s=b+c+(BL+LC)=b+c+a$$

$$\therefore\quad AK=AM=\frac{a+b+c}{2}$$



同じように，頂点 B，C の対辺と接する傍接円をそれぞれ I_B， I_C とすると，

頂点と対辺で接する傍接円との接線の長さはすべて s になります．

このことを用いて傍心の位置ベクトルを求めましょう．

三角形 ABC において，頂点 A の対辺で接する傍接円の中心を I_A とします．

$\overrightarrow{AI_A}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とすると，ex 3 で準備したように，

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{b}\right|=5,\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\vec{c}\right|=6,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=6$$

これから，

$$\overrightarrow{AI_A}\cdot\overrightarrow{AB}=25s+6t$$

$$\overrightarrow{AI_A}\cdot\overrightarrow{AC}=6s+36t$$

辺 AB，AC の延長線と傍接円 I_A との接点をそれぞれ M，N とすると，

$$AM=AN=\frac{AB+BC+CA}{2}=9$$

$\overrightarrow{AI_A}$ の $\overrightarrow{AB}$．$\overrightarrow{AC}$ への正射影はそれぞれ AM，AN より，

$$\overrightarrow{AI_A}\cdot\overrightarrow{AB}=AM\cdot AB=45$$

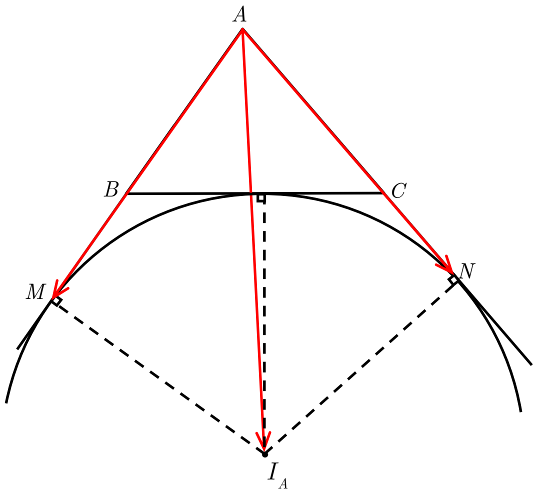
$$\overrightarrow{AI_A}\cdot\overrightarrow{AC}=AN\cdot AC=54$$

よって，

$$25s+6t=45,\quad 6s+36t=54$$

これを解いて，　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{5}{4}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AI_A}=\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{5}{4}\vec{c}$$



次に頂点 B，C の対辺で接する傍接円の傍心をそれぞれ I_B，I_C とします．

$AF=BF-BA=9-5=4\quad\therefore\quad AK=AF=4$　より，

$$\overrightarrow{AI_B}\cdot\overrightarrow{AB}=-AF\cdot AB=-20$$

$$\overrightarrow{AI_B}\cdot\overrightarrow{AC}=AK\cdot AC=24$$

これより，$25s+6t=-20$，$6s+36t=24$

これを解いて　$s=-1$，$t=\dfrac{5}{6}$　$\therefore$　$\overrightarrow{AI_B}=-\vec{b}+\dfrac{5}{6}\vec{c}$

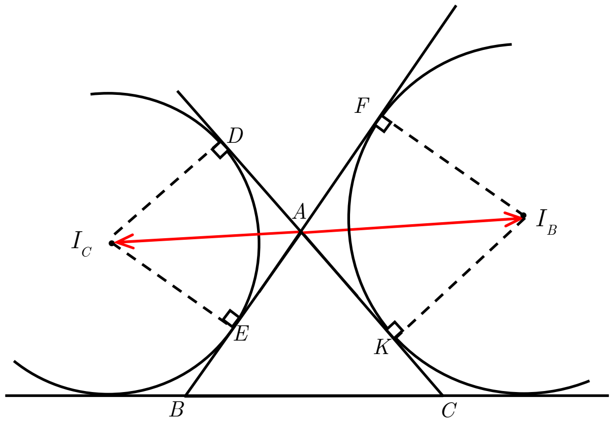
$AD=CD-AC=9-6=3\quad\therefore\quad AE=AD=3$　より，

$$\overrightarrow{AI_C}\cdot\overrightarrow{AB}=AE\cdot AB=15$$

$$\overrightarrow{AI_C}\cdot\overrightarrow{AC}=-AD\cdot AC=-18$$

これより，$25s+6t=15$，$6s+36t=-18$

よつて，$s=\dfrac{3}{4}$，$t=-\dfrac{5}{8}$　$\therefore$　$\overrightarrow{AI_C}=\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{5}{8}\vec{c}$

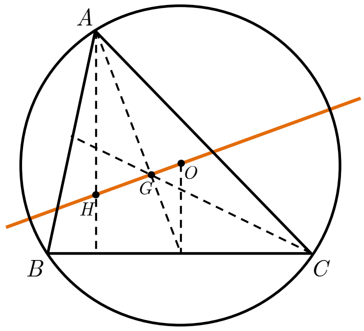


このように位置ベクトルが明らかな重心を除いて，四心の位置ベクトルは正射影を用いて解法を統一することができます．これは五心の種々の性質は正射影で求められるということでもあります．オイラー線の性質を証明してみましょう．

オイラー線（Euler-Line）

三角形 ABC の外心 O，重心 G，垂心 H は共線であり，次を満たす．

$$OG:GH=1:2$$



証明）

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とし，

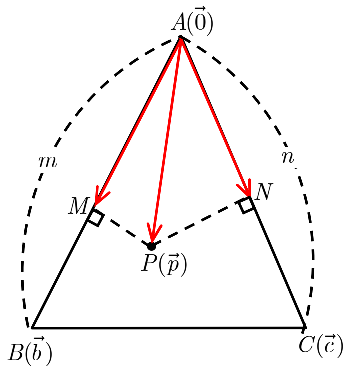
$\left|\vec{b}\right|=m$，$\left|\vec{c}\right|=n$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=r$ とする．

ここで，$\left|\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|$ のとき，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行であるから，$\left|r\right|\neq mn$

$$\therefore\quad r^2-m^2n^2\neq 0$$

$\overrightarrow{AP}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおくと，

$$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=s\left|\vec{b}\right|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=m^2s+rt\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=s\vec{b}\cdot\vec{c}+t\left|\vec{c}\right|^2=rs+n^2t\end{cases}\quad\cdots(*)$$



これを用いて，外心・垂心の位置ベクトルを求める．

《外心 O》

P=O とする

点 O から辺 AB に下ろした垂線を OM とすると，点 M は辺 AB の中点である．

同様に，点 O から辺 AC に下ろした垂線を ON とすると，点 N は辺 AC の中点である．

よって，$\overrightarrow{AO}$ の $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ への正射影はそれぞれ，$\dfrac{1}{2}AB$，$\dfrac{1}{2}AC$ である.

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}m^2$$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AC^2=\frac{1}{2}n^2$$

(*)より，

$$m^2s+rt=\frac{1}{2}m^2,\quad rs+n^2t=\frac{1}{2}n^2$$

これより，

$$s=\frac{n^2(m^2-r)}{2(m^2n^2-r^2)},\quad t=\frac{m^2(n^2-r)}{2(m^2n^2-r^2)}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AO}=\frac{n^2(m^2-r)}{2(m^2n^2-r^2)}\vec{b}+\frac{m^2(n^2-r)}{2(m^2n^2-r^2)}\vec{c}$$

《垂心 H》

P=H とする.

頂点 C から直線 AB に下ろした垂線を CM とする.

$\angle BAC=\theta$ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|}=\dfrac{r}{mn}$

よって，$AM=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta=n\cdot\dfrac{r}{mn}=\dfrac{r}{m}$　（$r<0$ のときは，点 M は BA の延長上にある）

これより，

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=AM\cdot AB=\frac{r}{m}\cdot m=r$$

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=r$$

(*)より，

$$m^2s+rt=r,\quad rs+n^2t=r$$

これを解いて

$$s=\frac{r(n^2-r)}{m^2n^2-r^2},\quad t=\frac{r(m^2-r)}{m^2n^2-r^2}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AH}=\frac{r(n^2-r)}{m^2n^2-r^2}\vec{b}+\frac{r(m^2-r)}{m^2n^2-r^2}\vec{c}$$

線分 OH を 1 : 2 に内分する点を Q とする.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AH}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{n^2(m^2-r)}{2(m^2n^2-r^2)}\vec{b}+\frac{m^2(n^2-r)}{2(m^2n^2-r^2)}\vec{c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{r(n^2-r)}{m^2n^2-r^2}\vec{b}+\frac{r(m^2-r)}{m^2n^2-r^2}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{n^2(m^2-r)+r(n^2-r)}{m^2n^2-r^2}\right)\vec{b}+\frac{1}{3}\left(\frac{m^2(n^2-r)+r(m^2-r)}{m^2n^2-r^2}\right)\vec{c}\\&=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

ここで，重心 G の位置ベクトルは，$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

よって，点 Q は三角形 ABC の重心 G に一致する.

以上より，重心 G は OH を 1 : 2 に内分する点である.　　　　　　(終)

重心，外心，垂心以外の内心と傍心には次の性質がありますが，これも正射影ベクトルにより証明することができます.

> 三角形 ABC の傍心を I_A，I_B，I_C とする.
> 三角形 $I_AI_BI_C$ の垂心は，三角形 ABC の内心に一致する.

(ex6)は，平面の法線ベクトルおよび点から平面に下ろした垂線を表すベクトルを正射影ベクトルを用いて求めています．本文では，始点をPに移し替えて法線ベクトルを求めていますが，平面にOから垂線OHを下ろしても法線ベクトルは得られます．法線ベクトルを$\vec{n}=(a,b,c)$とすると，$\overrightarrow{OA}=(2,1,3)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(2,-1,1)$

$\vec{n}$への正射影はOHです．本文での言葉のように正射影を集めると，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OC}\cdot\vec{n} \qquad \cdots\cdots①$$

すなわち，

$$2a+b+3c=a+b-c=2a-b+c$$

これより，

$$a=-4c\ ,\quad b=-c$$

$c=-1$ とし，$\vec{n}=(4,1,-1)$が得られます．

このように，始点をPにしてもOにしても同じ関係式が得られます．

もちろん始点をAにしてもいいわけで，その場合は正射影は0になります．すなわち，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0 \quad \cdots②$$

これは平面上の2つのベクトル$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$は，平面の法線ベクトル$\vec{n}$と垂直であり内積は0になることを表します．

また，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$とすると，②より，

$$\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\vec{n}=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\vec{n}=0$$

これより，　$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OC}\cdot\vec{n}$　となり①が得られます．

内積を正射影で捉えると，寄り道によるひと手間を掛けずに導くことができるのです．

また，平面の方程式を$ax+by+cz+d=0$として，3点A，B，Cを代入すると，

$$2a+b+3c+d=0\ ,\quad a+b-c+d=0\ ,\quad 3a+2b+c+d=0$$

これから，

$$2a+b+3c=a+b-c=2a-b+c=-d$$

これもまた先ほど正射影で得た式と同じですが，処理操作は内積と代入でそれぞれ違っています．内積の方が代入に比べて扱いやすいのではないでしょうか．また，代入で得られる定数項dの意味についても，正射影では，A，B，Cの位置ベクトルから$\vec{n}$への正射影であり，原点Oから平面に下ろした垂線AHになることが理解できます．

また，点Aの位置ベクトルの$\vec{n}$への正射影としてみると，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=OH\left|\vec{n}\right|$$

法線ベクトルが$\vec{n}=(a,b,c)=(4,1,-1)$と定まれば，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=2a+b+3c=6 \quad \text{また，}\left|\vec{n}\right|=3\sqrt{2}\ \text{より，}$$

$$OH=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

原点と平面の距離が求められます．

本文では点Pと平面の距離を求めたあと始点をPにして，正射影から距離が得られることが，まなぶのオチになるように構成しました．ただ，$\overrightarrow{PH}$が必要であるなら，まず始点を原点Oとして$\vec{n}=(4,1,-1)$を求めます．そして，

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=(2,1,3)-(3,2,1)=(-1,-1,2)$$

これから，$\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}=-4-1-2=-7$

よって，$\overrightarrow{PA}$の$\vec{n}$への正射影ベクトルは，

$$\overrightarrow{PH}=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}=\frac{-7}{18}(4,1,-1)$$

かず子の解いた方法よりこの方が「ひと手間」省けるのです．