正接定理とは何か？

札幌旭丘高校　中村文則

○はじめに

> 三角形 ABC において， $BC=a, CA=b$ とすると，
> $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

この性質は *Napier* の法則といい，別名，正接定理として知られている．
証明は，正弦定理による．

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

から加比の理より，

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

である．なお，この性質は正弦定理を

「定円内における弦とその円周角の比は等しい」

とみれば，必ずしも三角形で成立する必要はない．しかし，三角形 ABC で考えれば，

$$A+B+C=180°$$

であるから，

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\left(90°-\frac{C}{2}\right)}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}$$

よって， $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

なる関係が導かれる．この式は，２辺 (a,b) とその間の角 (C) が与えられたとき，正接定理により角度 $\frac{A-B}{2}$ が求められることを表している．

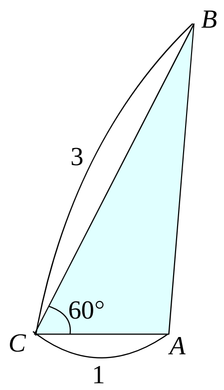
$\frac{A-B}{2}=\theta$ とすると， $A+B+C=180°$ から，

$$A=90°+\theta-\frac{C}{2},\ B=90°-\theta-\frac{C}{2}$$

となり，残りの角が得られ，三角形を解くことができるのである．

一般には，この定理は内角の半角の大きさを必要とすることもあり，三角比の表を併用しての利用と考えた方がいいだろう．

> Ex）三角形 ABC において， $a=3,\ b=1,\ C=60°$ のとき， A, B を求めよ．



解）右図において，

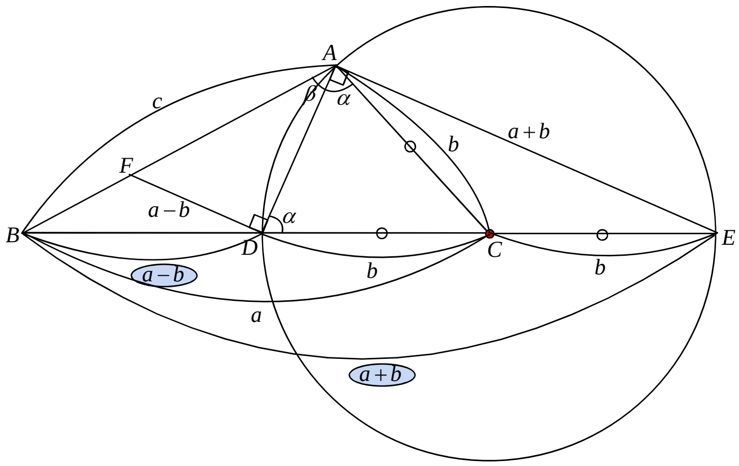
$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{3-1}{3+1}\cot\frac{60°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}≒0.866$$

正接の値を三角比の表で求めると， $\frac{A-B}{2}≒41°$

$A-B=82°,\ A+B=120°$ より， $A=101°,\ B=9°$

では，この定理は，三角形上においてはどんな図形的な意味をもっているのだろうか.

○三角形の辺の内分・外分点上に比をとる

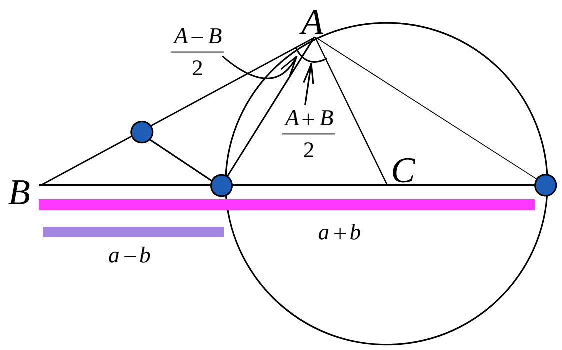


三角形ABCにおいて，$BC > CA$とする.
辺BC上に$CD = b$となる点Dをとり，辺BCのCの延長上に，$CE = b$となる点Eをとる。
点DはBCを$a-b:b$の比に内分する点であり、点EはBCを$a+b:b$の比に外分する点である。

ここで、$CA = CD = CE = b$より、三角形ADEは、中心C、半径bの円に内接する。
よって、$\angle DAE$は、直径DEを弦とする円周角より、$\angle DAE = 90°$。
また、三角形ADCは二等辺三角形より、

$$\angle ADC = \angle DAC = \frac{180° - C}{2} = \frac{A+B}{2} = \alpha$$

$$\angle BAD = A - \alpha = A - \frac{A+B}{2} = \frac{A-B}{2} = \beta$$



点Dから辺ADに垂直に引いた直線と辺ABとの交点をFとすると、

$$\tan\alpha : \tan\beta = \frac{AE}{AD} : \frac{DF}{AD} = AE : DF$$

$\angle ADF = \angle DAE = 90°$より、$FD // AE$

$\therefore$ $AE : FD = BE : BD = a+b : a-b$

このように、線分BCの内分点・外分点上に、2 つの角$\frac{A+B}{2}, \frac{A-B}{2}$の比の値をとることが可能となる。

○三角形の内部に比をとる

三角形ABCにおいて、$BC > AC$とする.
辺BC上に$CD = b$となる点Dをとり，点Cから線分ADに下ろした垂線の足をH，直線CHが辺ABと交わる点をEとする.

三角形ADCは，$CA = CD$である二等辺三角形より，

$$\angle CAD = \angle CDA = \frac{180° - C}{2} = \frac{A+B}{2} = \alpha$$

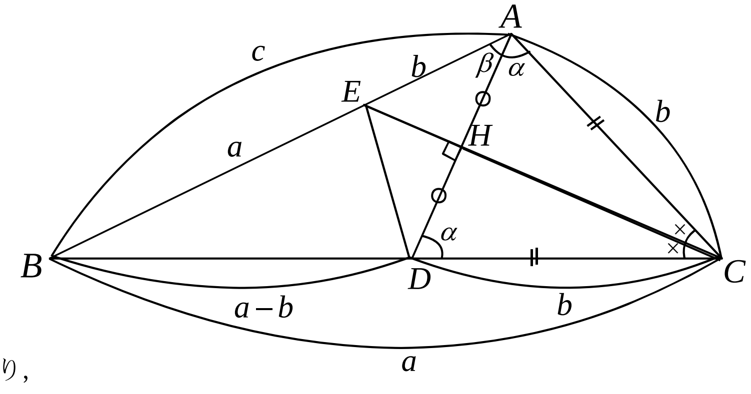
$$\angle BAD = A - \angle DAC = \frac{A-B}{2} = \beta$$

これから，

$$\tan\alpha : \tan\beta = \frac{HC}{AH} : \frac{HE}{AH} = CH : EH$$

である．ここで，$S = \Delta ABC$とすると，
$BC : DC = a : b$より，

$$\Delta ADC = \frac{b}{a}S,\ \Delta ABD = \frac{a-b}{a}S$$



また，線分CEは，$\angle ACD$の二等分線より，
$BE : EA = BC : CA = a : b$
よって，

$$\Delta AED = \frac{b}{a+b}\Delta ABD = \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a-b}{a}S$$

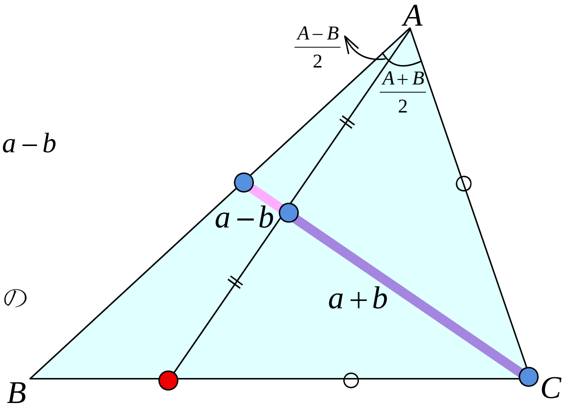
これから

$$CH:HE = \Delta ADC:\Delta AED = \frac{b}{a}S:\frac{b(a-b)}{a(a+b)}S = a+b:a-b$$

以上より，

$$\tan\alpha : \tan\beta = a+b : a-b$$

このように $\frac{A+B}{2}, \frac{A-B}{2}$ の正接の比は三角形 ABC の内角の二等分線上にとれることができる．



○三角形の辺上に比をとる

三角形 ABC の内部の比は，角 C の二等分線上にとることができる．また，正接定理は，半角によって表現されることより，三角形の内心と関わりがあることを読みとることができる．

$BC > CA$ である三角形の内接円の中心を I とし，直線 CI が辺 AB と交わる点を D とする．

また，三角形 ABC の内接円が辺 AB, AC, BC と接する点をそれぞれ E, F, G とする．

ここで，直線 CI は，$\angle ACB$ の二等分線であり，三角形 CFI は直角三角形より

$$\angle CIF = 90° - \frac{C}{2} = \frac{180° - C}{2} = \frac{A+B}{2} = \alpha$$

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BCD = B + \frac{C}{2}$$

三角形 IED は直角三角形より，

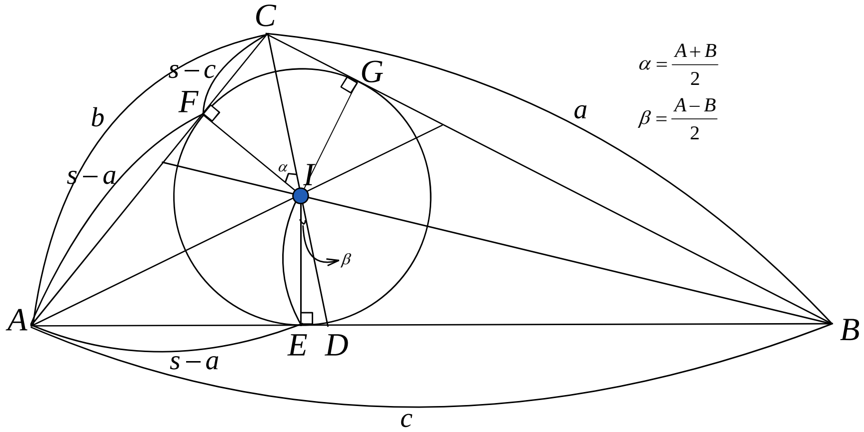
$$\angle DIE = 90° - \angle ADC = 90° - \left(B + \frac{C}{2}\right) = \frac{180° - C - 2B}{2} = \frac{A+B-2B}{2} = \frac{A-B}{2} = \beta$$

内接円の半径を r とすると，$IF = IE = r$ であるから，

$$\tan\alpha : \tan\beta = \frac{CF}{IF} : \frac{ED}{IE} = CF : ED$$

よって，CF と ED の比を求めればよい．

$$CF = \frac{CF+CG}{2}$$
$$= \frac{(CA-AF)+(CB-BG)}{2}$$
$$= \frac{CA+CB-(AF+BG)}{2}$$
$$= \frac{CA+CB-(AE+BE)}{2}$$
$$= \frac{b+a-c}{2}$$



ここで，$s = \frac{a+b+c}{2}$ とすると，

$$CF = \frac{a+b+c}{2} - c = s - c$$

同様に，$AE = s - a$ である．

次に，線分 CD は角 C の二等分線より，

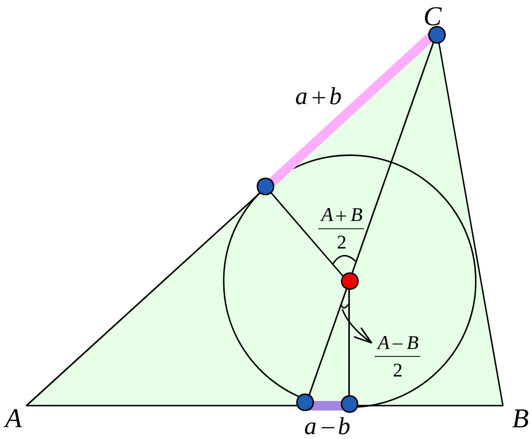
$$AD : DB = CA : CB = b : a$$

よって，$AD = \frac{b}{a+b}AB = \frac{bc}{a+b}$

$$
\begin{aligned}
DE &= AD - AE \\
&= \frac{bc}{a+b} - (s-a) \\
&= \frac{bc}{a+b} - \frac{-a+b+c}{2} \\
&= \frac{a^2-b^2+bc-ca}{2(a+b)} \\
&= \frac{(a-b)(a+b-c)}{2(a+b)}
\end{aligned}
$$

ここで，$\dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} - c = s-c$ であるから，

$$DE = \frac{a-b}{a+b}(s-c)$$



以上より

$$CF : DE = s-c : \frac{a-b}{a+b}(s-c) = a+b : a-b$$

○正接定理より得られる公式

正弦定理，余弦定理はその三角比の価を辺の長さで表すことで、直角三角形における三角比を拡張したものとみなせる．正弦定理では，その角の対辺と外接円の半径から，

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

であり，これから，

$$\boxed{\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c}$$

また，余弦定理では３辺の長さから，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

であり，

$$\boxed{\cos A : \cos B : \cos C = a(b^2+c^2-a^2) : b(c^2+a^2-b^2) : c(a^2+b^2-c^2)}$$

となる．

では、同様に正接の比も３辺の長さで表してみよう．

正弦定理・余弦定理を利用すると、

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{2R} \cdot \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} = \frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}$$

ここで，外接円の半径 R は，三角形の面積を S とすると，$S = \dfrac{abc}{4R}$ より，

$$\tan A = \frac{4S}{(b^2+c^2-a^2)}$$

また、S は，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとヘロンの公式より $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ である．よって，

$$\boxed{\tan A : \tan B : \tan C = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}}$$

である.
また，正接定理を利用すると、加比の理から，

$$\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

同様に，$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ ，$\dfrac{-a+b+c}{a+b+c}=\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

よって，

$$\frac{-a+b+c}{a+b+c}:\frac{a-b+c}{a+b+c}:\frac{a+b-c}{a+b+c}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}:\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}:\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$=\cot\frac{A}{2}:\cot\frac{B}{2}:\cot\frac{C}{2}$$

これから，

$$\boxed{\cot\frac{A}{2}:\cot\frac{B}{2}:\cot\frac{C}{2}=-a+b+c:a-b+c:a+b-c}$$

ここで，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とすると，

$$-a+b+c=a+b+c-2a=2s-2a$$

であるから，

$$\boxed{\cot\frac{A}{2}:\cot\frac{B}{2}:\cot\frac{C}{2}=s-a:s-b:s-c}$$

なお，三角形 ABC の内接円を考えると，この関係式での相似比の値を求めることができる.
三角形 ABC の内接円の中心を I ，半径を r とする.
辺 AB, AC と内接円の接点をそれぞれ D, E とする.
直線 AI は角 A の二等分線より，直角三角形 ADI において，

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{DI}{AD}=\frac{r}{s-a}$$

同様に，

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\ \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$

よって，

$$\boxed{\frac{s-a}{\cot\frac{A}{2}}=\frac{s-b}{\cot\frac{B}{2}}=\frac{s-c}{\cot\frac{C}{2}}=r}$$

正弦定理に類似した形で，内接円の半径を使って正接の関係式をまとめることができる．

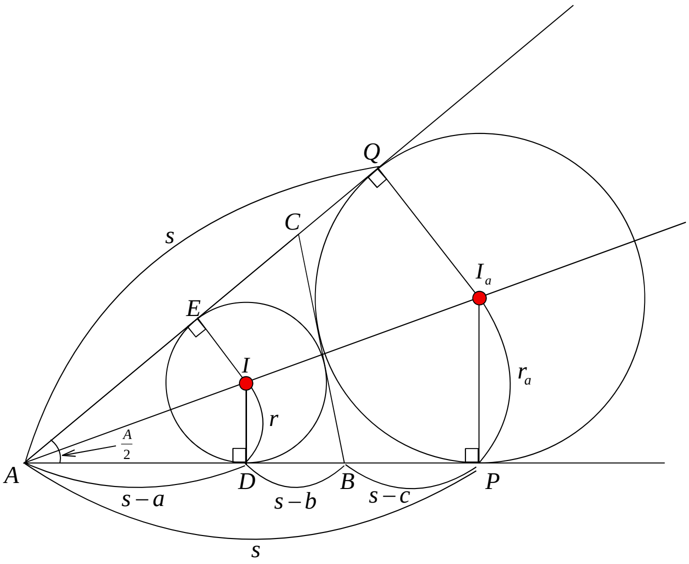
さらに，辺 BC の外側に傍接円を考え，その円の中心を I_a，半径を r_a とする．

直線 AB, AC と傍接円との接点をそれぞれ P, Q とすると，$AP = AQ$ であるから，

$$AP = \frac{AP+AQ}{2} = \frac{(AB+BP)+(AC+CQ)}{2} = \frac{AB+AC+(BP+CQ)}{2} = \frac{c+b+a}{2} = s$$

よって，直角三角形 API_a において，

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{PI_a}{AP} = \frac{r_a}{s}$$



同様に，辺 CA, AB の外側に作られる傍接円の半径をそれぞれ r_b, r_c とすると，

$$\tan\frac{B}{2} = \frac{r_b}{s},\ \tan\frac{C}{2} = \frac{r_c}{s}$$

$$\boxed{\frac{r_a}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{r_c}{\tan\frac{C}{2}} = s}$$

また，三角形 ABC の面積を S とすると，

$AD : AP = DI : PI_a$ より，

$s-a : s = r : r_a$

よって，$r_a(s-a) = rs$

$S = rs$ より，

$S = r_a(s-a)$

同様に考えて，

$S = r_b(s-b),\ S = r_c(s-c)$

以上より，

$$S^4 = rs\cdot r_a(s-a)\cdot r_b(s-b)\cdot r_c(s-c) = s(s-a)(s-b)(s-c)rr_ar_br_c$$

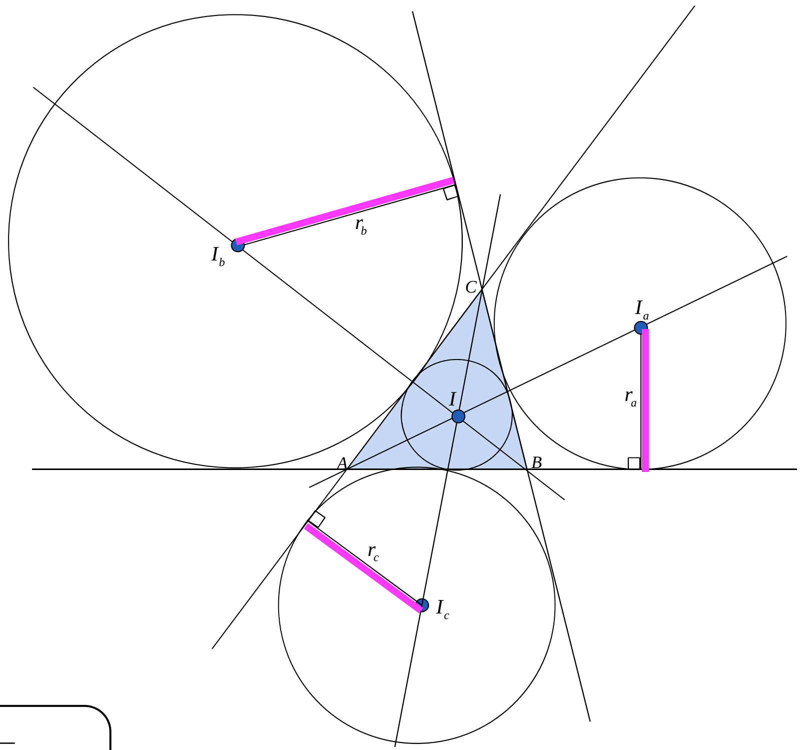
ヘロンの公式より，

$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ であるから，

$S^4 = rr_ar_br_cS^2$

よって，

$S = \sqrt{rr_ar_br_c}$ （マイユーの公式）



これから，

$S = \sqrt{rr_ar_br_c} = rs$

よって，$s = \sqrt{\dfrac{r_ar_br_c}{r}}$

以上より，

$$\boxed{\frac{r_a}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{r_c}{\tan\frac{C}{2}} = \sqrt{\frac{r_ar_br_c}{r}}}$$