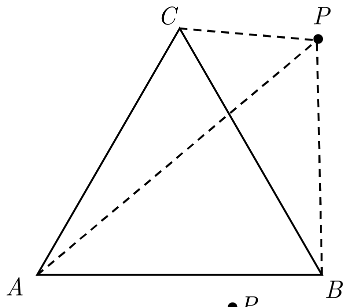
回転相似で浮かぶトレミーとフェルマー

札幌旭丘高校　中村文則

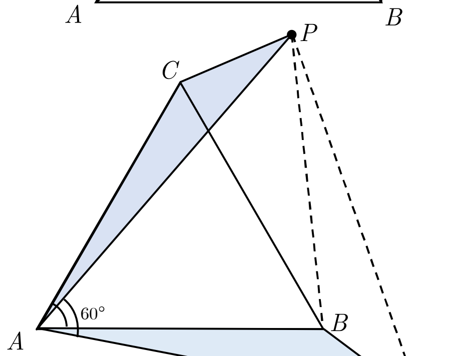
０．平面上の点と正三角形の頂点との距離



正三角形に関する次の性質はよく知られているものである。

> 正三角形ABCを含む平面上の任意の点Pに対して，
> $$AP \leqq BP+CP$$
> が成立する。

三角形ACPを頂点Aを中心として時計回りに$60°$回転させた三角形をABP'とする。



$\angle PAP' = \angle PAB + \angle BAP'$

$\quad = \angle PAB + \angle CAP = 60°$

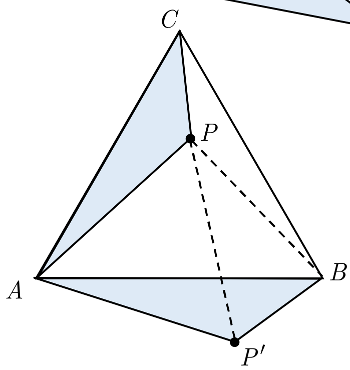
また，$AP = AP'$より三角形PAP'は正三角形である。

よって，

$$AP = PP' \leqq PB + BP' = PB + CP$$

以上より，$AP \leqq BP + CP$

点Pが正三角形ABCの内部または周上にあるときも，三角形APCを頂点Aを中心として時計回りに$60°$回転させると，同様の関係式が得られる。



なお，回転の中心である頂点を変えると，

$$BP \leqq CP + AP$$
$$CP \leqq AP + BP$$

が成立することも明らかである。

解法で用いられている性質は，

「三角形の二辺の長さの和は他の一辺の長さより大きい」

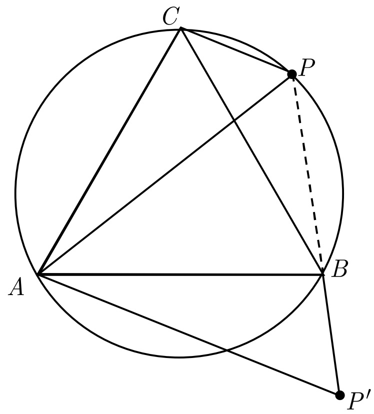
犬の愛好家として知られた菊池寛曰く，「そんなことは犬でも知っている」と述べた性質である。

すなわち，この不等式は三角形$PP'B$の存在条件をAP，BP，CPの長さを用いて表しており，

$$\left|BP - CP\right| \leqq AP \leqq BP + CP$$

が成立している。

等号成立の場合を調べよう。



三角形の存在条件から３点P,B,P'が一直線上にあるときより，

$$\angle ABP + \angle ABP' = 180°$$

ここで，$\angle ABP' = \angle ACP$であるから，

$$\angle ABP + \angle ACP = 180°$$

すなわち，$\angle ACP$と$\angle ABP$は補角の関係より，

点Pは，正三角形ABCの外接円の劣弧BC上にある。

なお，劣弧AB上に点Pがあるときは，

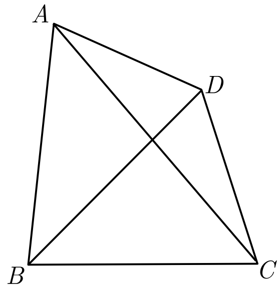
$$CP = AP + BP$$

が成立する。これから，

$$AP = -BP + CP < BP + CP$$

すなわち劣弧AB(劣弧CA)上の場合は等号は成立しない。

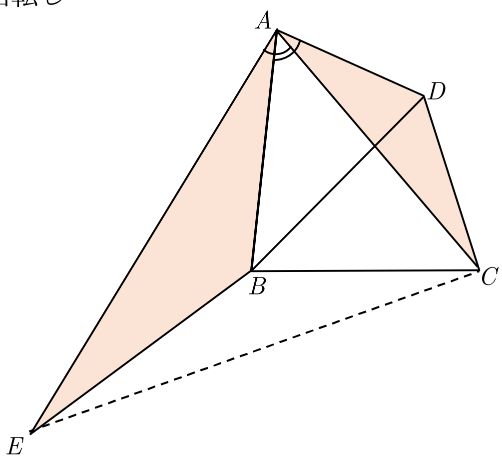
1．回転相似を用いたトレミーの定理の証明



ところでこの性質の解法における技巧的な手法は三角形の回転移動である。
この手法を用いて次の有名定理の証明をしてみよう。

> 四角形 $ABCD$ において，次の性質が成立する。
> $$AC\cdot BD \leqq AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

証明）
三角形 ACD を頂点 A を回転の中心として，辺 AD が辺 AB に重なるように回転し，その長さが等しくなるように拡縮する。
すなわち，ΔACD を $\angle BAD$ の大きさを回転角として回転し相似比 $\dfrac{AB}{AD}$ の三角形を作る。
この三角形を ΔAEB とする。



$\Delta ACD \backsim \Delta AEB$ であるから，

$$AD:DC=AB:BE \quad \text{より，} \quad BE=\frac{AB\cdot CD}{AD} \quad \cdots①$$

$$AD:AC=AB:AE \quad \text{より，} \quad \frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AD} \quad \cdots②$$

また，

$$\begin{aligned}\angle EAC &= \angle EAB+\angle BAC\\ &=\angle CAD+\angle BAC\\ &=\angle BAD\end{aligned}$$

$\therefore \quad \angle EAC=\angle BAD \quad \cdots③$

②，③より，$\Delta EAC \backsim \Delta BAD$ であるから，

$$EC:CA=BD:DA$$

$$\therefore \quad CE=\frac{BD\cdot CA}{AD} \quad \cdots④$$

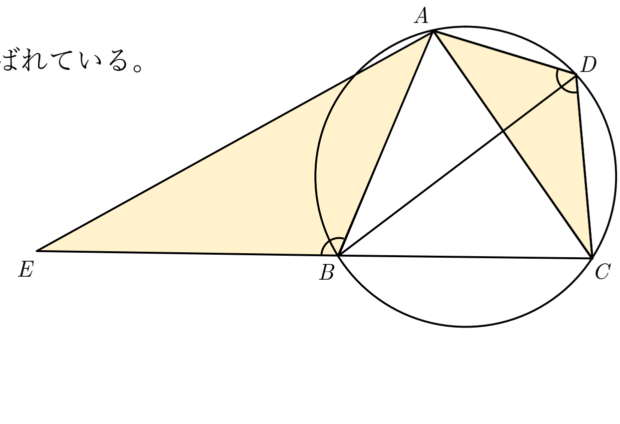
ここで，$CE \leqq BC+BE$ であることより，①，④を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{BD\cdot CA}{AD} &\leqq BC+\frac{AB\cdot CD}{AD}\\ &=\frac{AD\cdot BC+AB\cdot CD}{AD}\end{aligned}$$

以上より，

$$AC\cdot BD \leqq AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

Q.E.D.



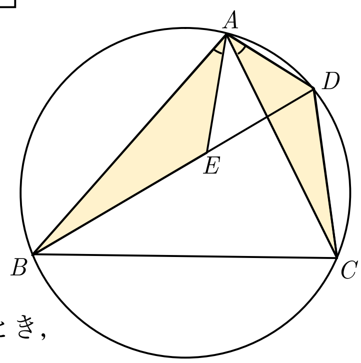
この不等式は，トレミー(プトレマイオス)の不等式と呼ばれている。
等号成立は，3点 E，B，C が一直線上にあるときより，

$$\angle ABC=180^\circ-\angle ABE=180^\circ-\angle ADC$$

すなわち，$\angle ABC$ と $\angle ADC$ は補角の関係である。
よって，等号は四角形 $ABCD$ が円に内接するときに成立する。
このとき，２組の対辺の積の和は対角線の積に等しく，この性質を「トレミーの定理」という。

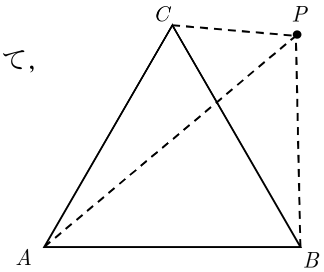
《トレミーの定理》
円に内接する四角形$ABCD$において，次の等式が成立する。

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$$



一般的なトレミーの定理の証明も回転相似によるものである。
$\angle BAC>\angle CAD$のときは，ΔCADを点Aを中心として，$\angle BAC$ の大きさだけ回転させた三角形を辺ABで重なるように相似な三角形に拡縮する。$\angle BAC<\angle CAD$のときは，ΔBACに回転相似変換をする。
四角形$ABCD$の内部に相似な三角形を作るに対して外部に作った方が証明の見通しがいい。

前述の正三角形に関する性質は，点Pが正三角形ABC の外部にあるとき，トレミーの不等式より導くことができる。



例えば，点Pが右図の位置にあるときは，四角形$ABPC$において，トレミーの不等式より，

$$AC\cdot BP+AB\cdot CP\geqq BC\cdot AP$$

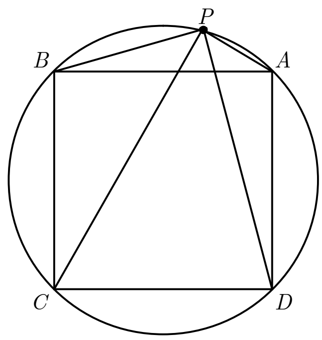
$AB=BC=CA$より，

$$BP+CP\geqq AP$$

等号は点Pが三角形ABCの外接円の劣弧BC上の点のとき成立する。

２．正多角形の外接円上の点と頂点との距離の関係

トレミーの定理を用いると，次の性質を導くことができる。



正方形$ABCD$の外接円の劣弧AB上の点Pに対して，次が成立する。

$$\left(\sqrt{2}+1\right)(PA+PB)=PC+PD$$

証明）

正方形の１辺の長さをaとする。
四角形$PBCA$において，トレミーの定理より

$$PA\cdot BC+PB\cdot AC=PC\cdot AB$$

であるから，

$$aPA+\sqrt{2}aPB=aPC$$

$$\therefore\quad PA+\sqrt{2}PB=PC\quad\cdots①$$

同様に四角形$PBDA$において，

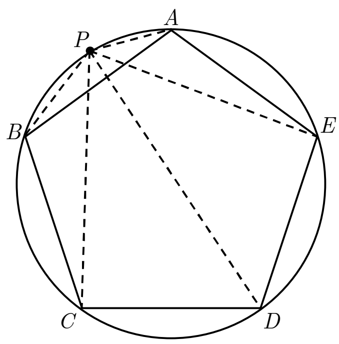
$$PA\cdot BD+PB\cdot AD=PD\cdot AB$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}PA+PB=PD\quad\cdots②$$

①，②を辺々加えると結論をえる。

Q.E.D.

> 正五角形 $ABCDE$ の外接円の劣弧 AB 上の点 P に対して，次が成立する。
>
> $$PA+PB+PD=PC+PE$$



証明）正五角形の１辺の長さを1，対角線の長さを a とする。

四角形 $APBC$， $APBE$， $APBD$ のそれぞれにトレミーの定理を用いる。

$PA+aPB=PC$ …①

$aPA+PB=PE$ …②

$aPA+aPB=PD$ …③

①+②−③より，

$$PA+PB=PC+PE-PD$$

$\therefore\quad PA+PB+PD=PC+PE$ Q.E.D.

正三角形，正方形，正五角形の性質が得られたが，これらの正多角形を組合せて他の正多角形の性質を調べることができる。

① 正六角形

正六角形 $ABCDEF$ の外接円の劣弧 BC 上に点 P をとる。

点 P は正三角形 ACE の外接円の劣弧 AC 上の点とみると，

$$PA+PC=PE$$

点 P は正三角形 BDF の外接円の劣弧 BD 上の点とみると，

$$PB+PD=PF$$

２式を辺々加えると，

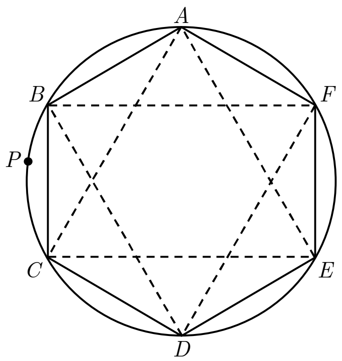
$$PA+PB+PC+PD=PE+PF$$

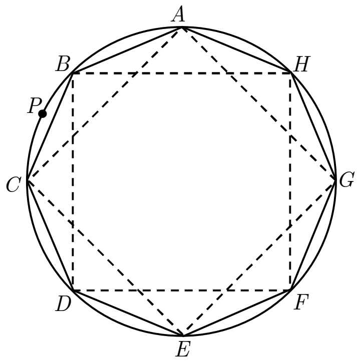
② 正八角形・正十角形

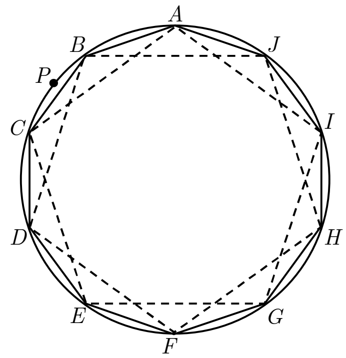
正八角形は正方形を２つ，正十角形は正五角形を２つ張り合わせたものとみれば，外接円の劣弧 AB 上の点 P に対し，前述の性質を用いるとそれぞれ次の等式が成立する。

$$\left(\sqrt{2}+1\right)(PA+PB+PC+PD)=PE+PF+PG+PH$$

$$PA+PB+PC+PD+PG+PH=PE+PF+PI+PJ$$



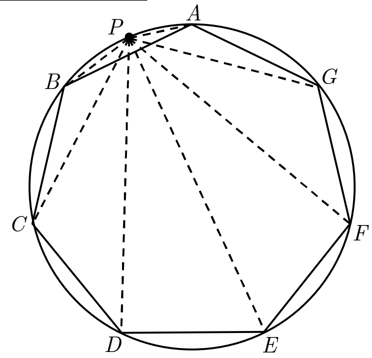




正 n 角形（$3\leqq n\leqq 10$）で $n=7$ を除いては，複数の正多角形を組合せて関係式を導くことができる。

正七角形についても調べてみよう。

正七角形 $ABCDEFG$ の外接円の劣弧 AB 上の点 P に対して，次が成立する。 $PA+PB+PD+PF=PC+PE+PG$



証明）正七角形の 1 辺の長さを 1，対角線 AC の長さを a とする。

四角形 $PBCD$, $PCDE$, $PDEF$, $PEFG$, $PFGA$, $BPGA$, $PBCA$ にトレミーの定理を順次用いる。

（左辺が PA , PB , PD , PF になるようにする）

$$PB+PD=aPC$$
$$aPD=PC+PE$$
$$PD+PF=aPE$$
$$aPF=PE+PG$$
$$PA+PF=aPG$$
$$aPA+PB=PG$$
$$PA+aPB=PC$$

辺々加えると，

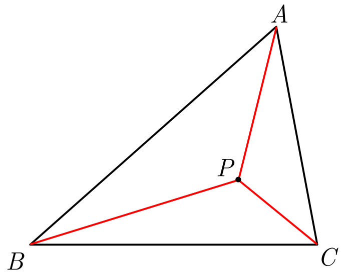
$$(a+2)(PA+PB+PD+PF)$$
$$=(a+2)(PC+PE+PG)$$

以上より，　$PA+PB+PD+PF=PC+PE+PG$　　　Q.E.D.

正多角形の頂点の個数が奇数個のとき，上述のように 4 点を考えてトレミーの定理を繰り返し使うことで同じように関係式を作ることができる。

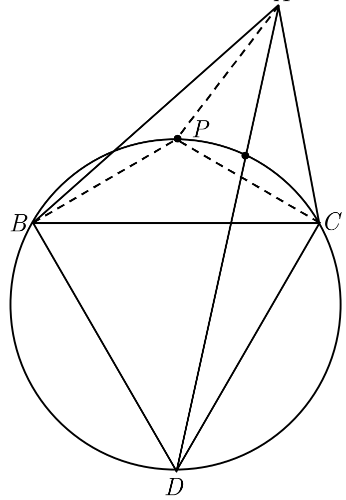
正 $(2n+1)$ 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n+1}$ $(n\geqq 1)$ の外接円の劣弧 A_1A_2 上の点 P に対して，次式が成立する。 $PA_1+PA_2+PA_4+PA_6+\cdots+PA_{2n}=PA_3+PA_5+PA_7+PA_{2n+1}$

3．三角形の３頂点からの和が最小となる点



正三角形に関する性質を用いて，次のことを考察してみよう。

最大内角が120° 未満の三角形 ABC の内部の点 P において， $AP+BP+CP$ が最小となる点 P の位置を求めよ。



辺 BC を一辺の長さとする正三角形を三角形 ABC の外部に図のように作る。四角形 $PBDC$ において，

$$PB+PC\geqq PD$$

よって，

$$PA+PB+PC\geqq PA+PD$$

ここで，点 P が正三角形 ABC の外接円の劣弧 BC 上の点であるとき，

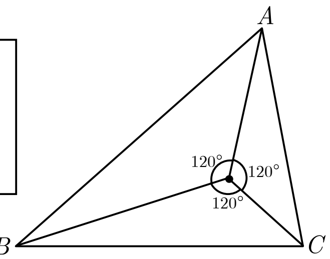
$$PA+PB+PC=PA+PD$$

である。さらに，

$$PA + PD \geqq AD$$
であることより，正三角形ABCの外接円と線分ADの交点が最小となる点である。

このように三角形の３つの頂点からの距離の和が最小である点をフェルマー点という(フェルマーがイタリアの物理学者トリチェリに出題したもので，トリチェリ問題といわれている)。

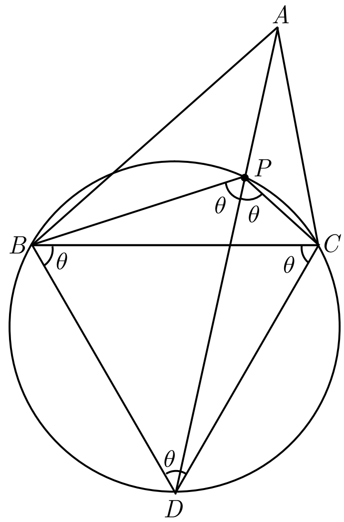
フェルマー点は次の性質を満たす。



最大内角が$120°$未満の三角形ABCのフェルマー点をPとするとき， $\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120°$ である。

証明)

正三角形BCDの外接円と線分ADとの交点をPとすると，この点がフェルマー点である。



$\theta = 60°$とする。

四角形$PBDC$は，円に内接することから，弧BD，弧CDの円周角を考えると，

$$\angle BPD = \angle BCD = \theta$$
$$\angle CPD = \angle CBD = \theta$$

これより，

$$\angle APC = \angle BPD + \angle CPD = 2\theta = 120°$$
$$\angle CPA = 180° - \angle CPD = 120°$$
$$\angle APB = 180° - \angle BPD = 120°$$

以上より，

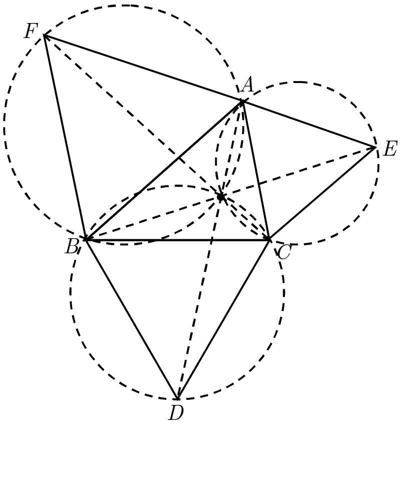
$$\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120° \qquad \text{Q.E.D.}$$

三角形の内部の最小となる点Pは，点Pから等しい大きさの力が３頂点に向かって働き，つりあっている点と考えることができる。この性質は，イタリアの数学者カヴァリエリ(1598-1647)が見つけたものである。

フェルマー点は，辺ABや辺CAについても正三角形を作ることで求められる。このことより，三角形ABCの各辺を１辺とする正三角形を右図のように外側に作ると，線分AD，BE，CFは１点で交わる。

その点がフェルマー点である。

これは，３つの正三角形の外接円は１点で交わるということでもある。



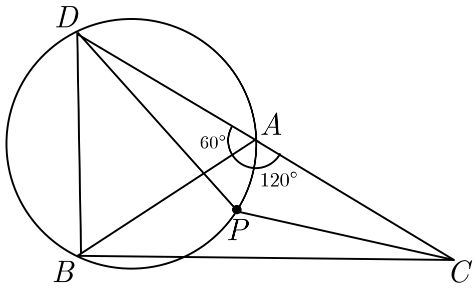
では，三角形の最大内角が$120°$以上のとき，頂点からの距離の和が最小となる点はどこにあるだろうか。

最大辺をBCとする。

このときBCの対角Aが最大角になる。

① $A=120°$ のとき

AB を 1 辺とする正三角形を ΔADB とすると，



点 D と正三角形 ADB の外接円の劣弧 AB 上の点 P に対して，

$$DP=PA+PB$$

が成立する。これから

$$PA+PB+PC=DP+PC$$

よって，$DP+PC$ が最小となる点 P を求めればよい。

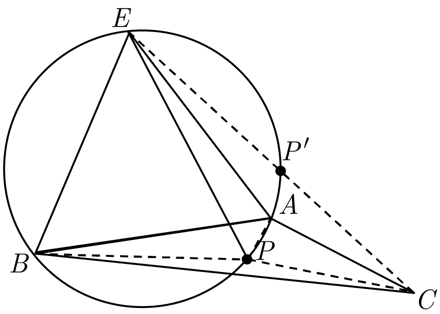
ここで，

$$\angle DAC=\angle DAB+\angle BAC=60°+120°=180°$$

よって，３点 D,A,C は一直線上にあるから，点 P は点 A に一致する。

② $A>120°$ のとき

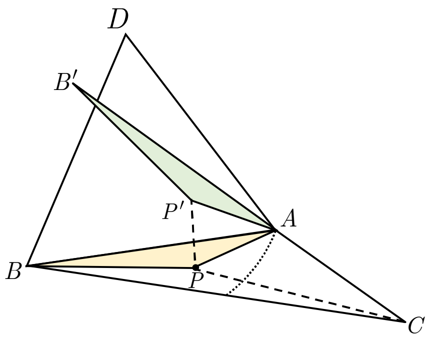
最大辺 BC を 1 辺とする正三角形の外接円は，$\angle BAC>120°$ であることより，対角の和は $180°$ より大きいので，外接円の内部に三角形 ABC は含まれる。



円弧 BC 上の点で，三角形 ABC の周または内部にある点は，点 B と点 C だけであるから最小辺（AB または CA）の端点に点 P があるときに距離の和は最小となる。

次に AB を 1 辺とする正三角形 ABD の外接円上にない三角形 ABC の内部の点を P とする。

三角形 ABP を辺 AB が直 CA 上になるように点 A を中心として回転移動した三角形を図のように三角形 $AP'B'$ とする。



ここで，$\angle B'AB<\angle EAB=60°$ であるから，

$\angle P'AP=\angle B'AB<60°$　よって，三角形 $AP'P$ は $AP=AP'$ である二等辺三角形であることより，$PP'<AP$。

これから，

$$PC+PA+PB>CP+PP'+P'B'>CB'$$

$$CB'=CA+AB'=CA+AB=CA+AD$$

以上より，$PC+PA+PB\geqq AC+AD$

辺 CA を 1 辺とする正三角形においても同様の結論を得る。

よって，この場合も点 A で最小となる。

このように，点 P は三角形 ABC の頂点 A,B,C にあればよい。この中で最も距離の和が小さくなるのは点 A にあるときである。

以上より，最大角が $120°$ 以上の場合は，最大角のある頂点で最小となる。

4. ナポレオン三角形とその性質

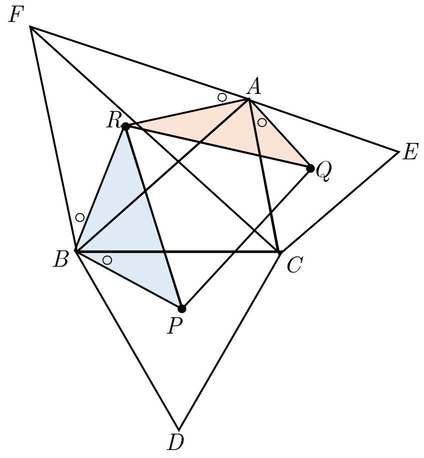
ΔABC の外側に作った 3 つの正三角形 $\Delta BCD,\Delta CEA,\Delta AFB$ には次の性質がある。

ΔABC の外側に作った 3 つの正三角形 $\Delta BCD,\Delta CEA,\Delta AFB$ のそれぞれの重心を P,Q,R とすると，ΔPQR は正三角形である。

この性質をナポレオンの定理といい，正三角形 ΔPQR をナポレオン三角形という。

三角形の回転相似を用いて証明してみよう。

証明）正三角形 BDC とその重心 P において，



$\angle CBP=30^\circ \quad BP=\dfrac{1}{\sqrt{3}}BC$

同様に正三角形 AFB とその重心 R において，

$\angle FBR=30^\circ \quad BR=\dfrac{1}{\sqrt{3}}BF$

これから，

$$\begin{aligned}\angle RBP&=\angle RBC+\angle CBP\\&=\angle RBC+30^\circ\\&=\angle FBR+\angle RBC=\angle FBC\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}BP:BR&=\frac{1}{\sqrt{3}}BC:\frac{1}{\sqrt{3}}BF\\&=BC:BF\end{aligned}$$

$\therefore \quad \Delta BPR \backsim \Delta BCF$

すなわち ΔBCF は ΔBPR を頂点 B を中心として反時計回りに 30° 回転し，$\sqrt{3}$ 倍した三角形である。

よって， $CF=\sqrt{3}PR$

同様に， ΔAFC は ΔARQ を頂点 A を中心として時計回りに 30° 回転し，$\sqrt{3}$ 倍した三角形である。

よって， $CF=\sqrt{3}QR$

これから， $PR=QR$ が得られる。同様に，

ΔBPR の回転相似である ΔBDA に対して， $AD=\sqrt{3}PR$

ΔCQP の回転相似である ΔCAD に対して， $AD=\sqrt{3}QP$

もいえるから， $RP=PQ$ が得られる。

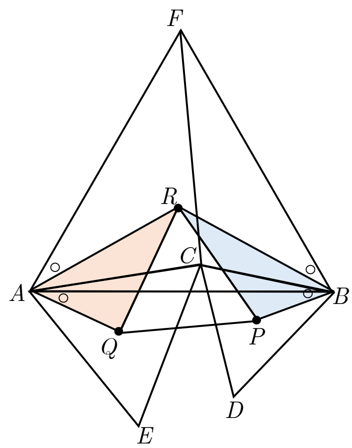
以上より， ΔPQR は正三角形である。　　　　Q.E.D.

ところで， ΔABC の各辺の内側に正三角形を作り，その重心を頂点とする三角形を作ると，こちらも正三角形になる。前述の外側の正三角形の重心を頂点とする正三角形をナポレオン外三角形といい，こちらをナポレオン内三角形という。

ナポレオン内三角形の証明は，上述の外側に作った場合と同じである。

なお，この 2 つのナポレオン正三角形の面積の差はもとの三角形の面積に等しい(三角比の加法定理，余弦定理を用いて証明)。

また，直線 DP , EQ , FR は一点で交わる。この点をナポレオン点という(チェバの定理の逆を用いて証明)。



5. 四角形の 4 頂点からの距離の和が最小となる点

四角形において 4 つの頂点からの距離の和が最小となる点はどこにあるか調べてみよう。

> 四角形 $ABCD$ の内部の点 P に対して，
>
> $PA+PB+PC+PD$
>
> は点 P が四角形の対角線の交点のとき最小となる。

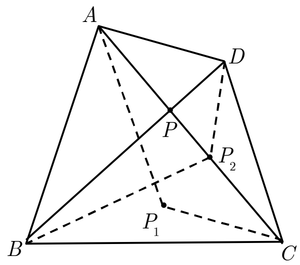
四角形$ABCD$の内部の点をP_1とする。

$$AP_1+P_1C \geqq AC$$

このことより2点A, Cからの距離の和が最小となるのは，点P_1が対角線AC上の点P_2のときである。

$$BP_2+P_2D \geqq BD$$

同様に2点B, Dからの距離の和が最小となるのは，点P_2が対角線BD上の点P（対角線の交点）のときである。



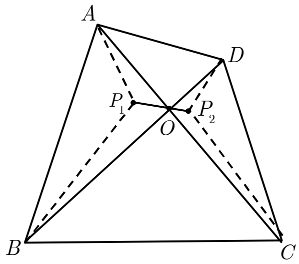
三角形に比べて単純な結論である。しかし，四角形の内部に複数点をとることで，距離の和をさらに短くすることができる。

例えば，対角線の交点Oを通る直線上に，2点P_1, P_2を右図のようにとると，

$$OA+OB+OC+OD \geqq (P_1A+P_1B)+(P_2C+P_2D)$$

であり，さらに距離の和が最短となるP_1, P_2がみつかる。

それはいままでのことからP_1，P_2から延びる3本の線分がお互いに$120°$の角度をなすことが予想できるだろう。



具体的に正方形の場合で考えてみよう。

> 1辺の長さが1である正方形$ABCD$の内部の2点をP, Qとする。
>
> $$PA+PB+PQ+QC+QD$$
>
> が最小となるのはどこにあるときか。

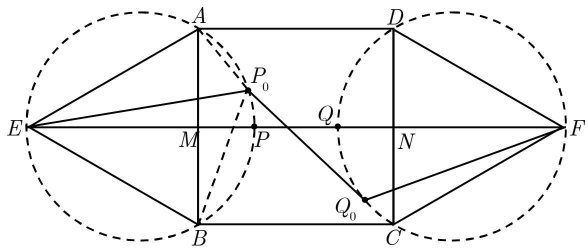
辺ABを1辺とする正三角形AEBを正方形の外側に作る。

正三角形の外接円の劣弧AB上の点P_0に対して

$$P_0A+P_0B=EP_0$$

同様に，辺CDを1辺とする正三角形CFDの外接円の劣弧CD上の点Q_0に対して，

$$Q_0C+Q_0D=FQ_0$$



これから，

$$\begin{aligned} P_0A+P_0B+P_0Q_0+Q_0C+Q_0D &= EP_0+P_0Q_0+Q_0F \\ &\geqq EF \end{aligned}$$

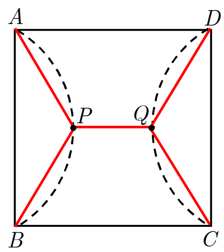
よって，線分EFと2つの外接円との交点をP, Qとすればよい。

このときのEFの長さを求めてみよう。

線分AB，CDの中点をそれぞれM, Nとすると，

$$EM=FN=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad MN=AD=1$$

$$PA+PB+PQ+QC+QD \geqq EF=EM+MN+NF=\sqrt{3}+1 \fallingdotseq 2.732\cdots$$



正方形の対角線の交点をPとすると，

$$PA+PB+PC+PD \geqq AC+BD=2\sqrt{2}=2.828\cdots$$

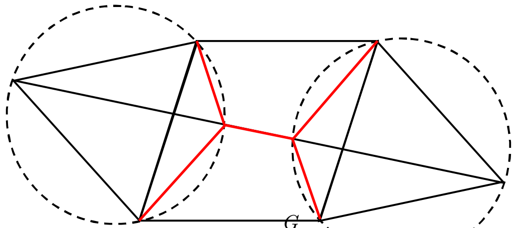
EFの長さはこれより短いことが分かる。

なお，この最短経路においては，

$$\angle APB=\angle APQ=\angle BPQ=\angle CQP=\angle DQP=\angle CDQ=120°$$

である。やはり点P, Qから延びる線分は互いに$120°$の角度を保っている。

ひし形においても同様に右図のように向かい合う平行な 2 辺の外側に正三角形を描くことで，最短経路を求めることができる。



しかし，一般に四角形では，向かい合う 2 組の 2 辺にそれぞれに経路の作図ができるから，最短の長さはそのどちらかということになる。

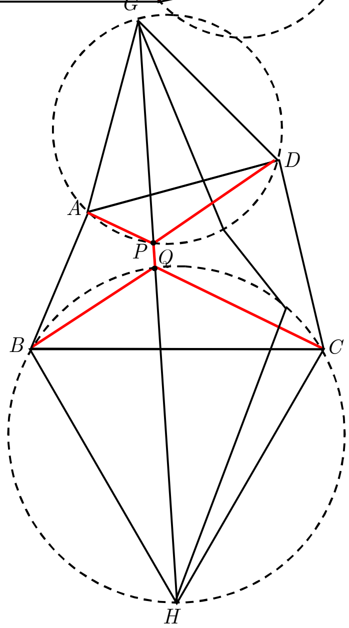
これを調べるために，次の性質が知られている。

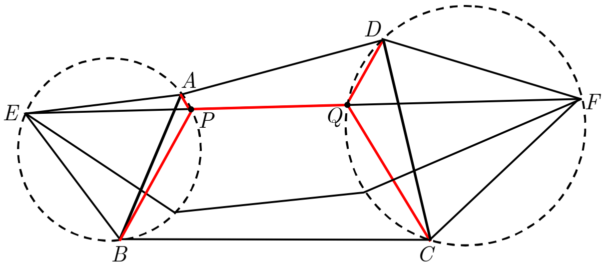
$AB^2 + CD^2 > AD^2 + BC^2$ のとき　$EF > GH$

$AB^2 + CD^2 < AD^2 + BC^2$ のとき　$EF < GH$

すなわち，四角形の 4 辺の長さが与えられたとき，対辺同士の平方の和を求めることで，最短経路を求めることができる。

なお，$EF = GH$ のときは $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ であり，これは，$AC \perp BD$ と同値であることは容易に証明できる(ベクトルによる)。





6. 正五角形の 5 頂点からの距離の和が最小となる点

右図のように正五角形の内部に 3 点 P_1, P_2, P_3 をとり，頂点と連結して最小となる経路を考える。

まず，BC, DE を 1 辺とする正三角形を外部の描き，残りの頂点をそれぞれ F, G とする。

$\Delta BCF, \Delta DEG$ の外接円の劣弧 BC, DE 上の点をそれぞれ P_1, P_2 とすると，

$P_1B + P_1C = P_1F$

$P_3D + P_3E = P_3G$

である。

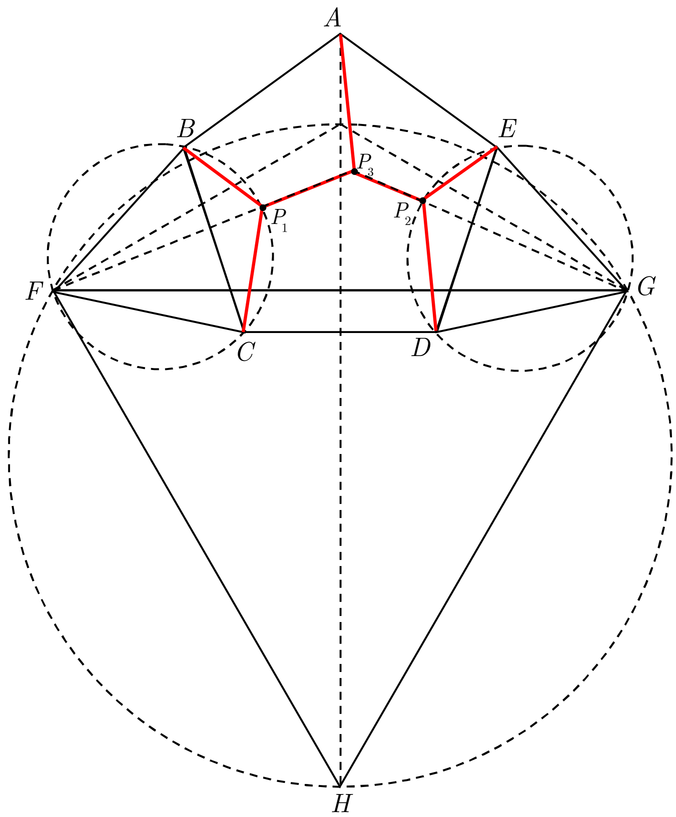
直線 FP_1 と GP_2 の交点を P_3 とすると，

$P_1B + P_1C + P_1P_3 + P_3P_2 + P_2E + P_2F + P_3A$
$= P_1F + P_1P_3 + P_3P_2 + P_2G + P_3A$
$= P_3F + P_3G + P_3A$

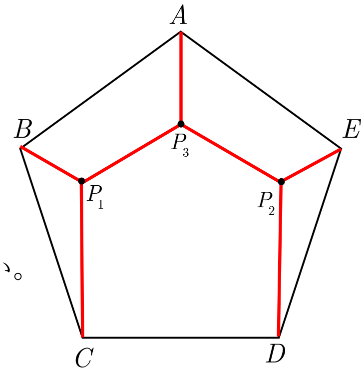
これから三角形 AFG の内部の点 P_3 と三角形の 3 つの頂点の距離の和の最小値を求めればよい。辺 FG を 1 辺とする正三角形の残りの頂点を H とする。正三角形 FGH の外接円の劣弧 FG 上に点 P_3 をとると，

$P_3F + P_3G = P_3H$　より，

$P_3A + (P_3F + P_3G) = P_3A + P_3H \geqq AH$



よって，線分 AH と劣弧 FG の交点を P_3 とすればよい。
これから右図が求める最短経路である。
正五角形の内部の点 P_1, P_2, P_3 からそれぞれ延びる 3 つの線分は $120°$ の角度をなす。
なお， $n≧6$ である正 n 角形では，最短とのなるのは正 n 角形の辺から 1 辺を除いた単純連結線となる。ただし，一般の n 角形はそう単純ではない。



7. フェルマーからシュタイナーへ

正 n 角形の頂点からの距離の和の最短経路は, 多角形とはみなさないで異なる n 点からの距離の和とみることもできる。3 点からの距離の和が最小である点は，3 地点にインターネット回線網を配置するときのケーブルの長さを最小にする中継点であり，極めて実用的な問題である。その点がフェルマー点であるが，4 点になると 2 つのフェルマー点が必要であり複雑になる。

スイスの数学者 J.シュタイナー(1796～1863)は，平面上の与えられた点に新たに点を加えて連結し，線分の長さの総和が最小となるネットワーク作ることを研究した。この問題は「最短シュタイナー問題」(最短ネットワーク問題)として知られている。

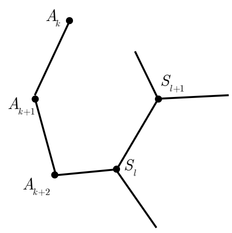
最初に与えられた点を必須点，新たに設けられた点をシュタイナー点という。このとき得られる連結された線分は木に例えられスタイナー木といわれ，最短ネットワークとなる木を最小シュタイナー木という。シュタイナー点は三角形の場合は最大 1 点，四角形では 2 点，五角形では 3 点である。n 個の点の最短ネットワークでは，シュタイナー点は最大 $n-2$ 個であり，これは次のように示される。

証明)

シュタイナー点の個数を s 個とする。このとき，必須点と合わせて点の個数は $n+s$ 個であるから，最短ネットワークを構成する線分は $n+s-1$ 本である。
また，1 個のシュタイナー点には 3 本の線分が集まる。重複する線分の本数を考えると次式が成立する。

$$n+s-1 \geqq \frac{n+3s}{2}$$

これを解くと， $s \leqq n-2$ が得られる。

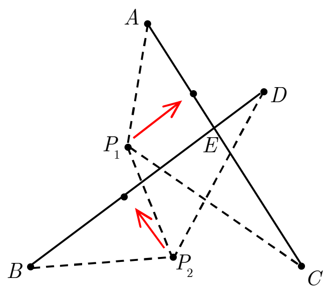


Q.E.D.

さて，4 点の場合であるが，凸四角形では本文のようにシュタイナー点，最短シュタイナー木が求められることもあるが三角形がそうであったようにシュタイナー点が存在しない場合もある。また 4 点を結んだ図形が凹四角形になれば四角形の外部にシュタイナー点はできてしまう。

4 点を四角形の 2 組の対角線になるように結ぶこともできるが，この場合は最短の長さにはならない。

右図のように 4 点が交わるように線分を結ぶ。その線分を AC, BD としその交点を E とする。



このとき P_1, P_2 を用意し，

$$P_1A+P_1C+P_1P_2+P_2B+P_2D$$

の最小値を調べる。

ここで，線分 AC 上に P_1，線分 BD 上に P_2 をとると， AP_1+P_1C， BP_2+P_2D の長さは最小になり，さらに 2 点 P_1,P_2 を 2 線分の交点 E にもってくると $P_1P_2=0$ となる。

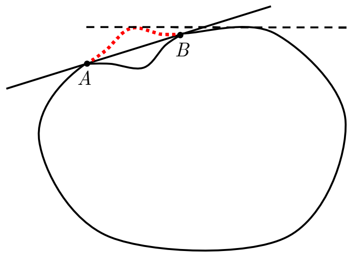
しかし，これ以上に短くなるような 2 点がとれることはすでに述べている。

また，4 点は空間内の点とも考えられるだろう。このときは，四面体の中での頂点からの距離の最小和の問題となる。このように，最短シュタイナー問題は初等幾何では扱い切れない困難問題なのである。

ただ，実験で最短経路を観測することは可能である。
プラスチック板を用意し，その上に垂直に 3 本のストローの棒を立てる。
これを石鹸水に浸し，静かに持ち上げるとシャボン膜ができ，板を真上から見下ろすと三角形の 2 頂点を結ぶ角度が $120°$ になるように張られる。同じように，ストローを適当に何本かプラスチック板に垂直に立てて，石鹸水に浸し持ち上げると膜が張られるが，その状態が最短経路を表す。また，立体図形をストローで作り同じように実験すると空間内におけるシュタイナー点と最小スタイナー木が得られるのである。

ところで一定の空気量で膨らませたシャボン玉は表面張力が最小となる形状をとる。表面張力は表面積に比例するのでその形状は一定の体積で表面積が最小である立体図形になる。同様に平面図形では一定の面積で周の長さが最小である閉曲線であり，言い換えれば，一定の長さで作られる面積が最大の図形になるということである。

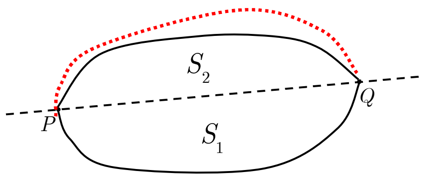
これは，古くは「ディドの問題」として知られる等周問題であるが，シュタイナーは面白い解答を与えている。



周の長さが一定である閉曲線がある。

閉曲線で凹んだ部分があれば，右図のように接線 AB を引き，凹んだ部分を対称移動した図形を作る。このようにしても閉曲線の全長は変わらないが面積は増加する。これを続けていくと図形は凸な閉曲線になる(操作 1)。

周を同じ長さに 2 分割する 2 点 P,Q を求め，図のように線分 PQ で閉曲線を 2 つに分ける。できあがる 2 つの図形の面積をそれぞれ S_1,S_2 とすると， $S_1>S_2$， $S_1=S_2$， $S_1<S_2$ のいずれかが成立する。



$S_1>S_2$ としよう。面積 S_1 の図形を線分 PQ に沿って折り曲げる。ここで面積 S_1 の図形が面積 S_2 の図形を含むとき，線分 PQ に関して線対称である S_1 の面積で作られる図形は最初の図形と周の長さは変わらないが面積は大きくなる(操作 2)。

S_1 の面積の図形が S_2 の面積の図形を含まない場合は別の 2 点で操作 2 をする。

操作 2 で得られた図形が凹んだ曲線になれば操作 1 で修正する。

これを繰り替えしていくと，最初の図形は次第に円に近づいていくことが分かるだろう。

シュタイナーの考案したこの方法は証明としては荒っぽいものであり厳密性には欠ける。しかし，思考力を育てるということでは，教育的には優れたものである。

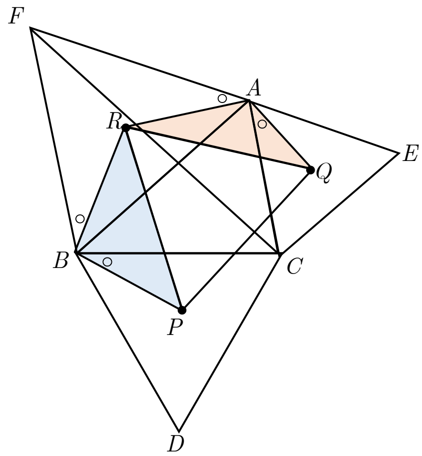
同じことを空間図形で繰り返せばそれは球に近づくが，これは牛皮を掌におきコロコロ回して丸い和菓子を作る所作であり，自然の中の遺伝子に組み込まれたものである。

最小作用原理を唱えたフランスの数学者モーペルテュイは「自然はラクをする」といった。

自然は人の思考を遥かに超えて当たり前の現象として結果を導いている。

補足（ナポレオン三角形とナポレオン点）

〇ナポレオン(外)三角形の面積



三角形ABCにおいて，$AB=c\,,BC=a\,,CA=b$とする。

$\angle BAC=\theta$とする。

$AR=\dfrac{c}{\sqrt{3}}\,,AQ=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\,,$

$\angle RAQ=\angle BAC+60^\circ=\theta+60^\circ$ より，

$$
\begin{aligned}
\cos\angle RAQ&=\cos(\theta+60^\circ)\\
&=\cos\theta\cos 60^\circ-\sin\theta\sin 60^\circ\\
&=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2S}{bc}
\end{aligned}
$$

三角形ARQに余弦定理を用いると，

$$
\begin{aligned}
RQ^2&=AR^2+AQ^2-2AR\cdot AQ\cos\theta\\
&=\frac{c^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2bc}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4bc}-\frac{\sqrt{3}S}{bc}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{3}S
\end{aligned}
$$

よってナポレオンの外三角形の面積S_Oは，

$$S_O=\frac{1}{2}QR\cdot QP\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}QR^2=\frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{24}+\frac{S}{2}$$

同じようにしてナポレオン内三角形の面積S_Iを求めると，

$$S_I=\frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{24}-\frac{S}{2}$$

これから，

$$S=S_O-S_I$$

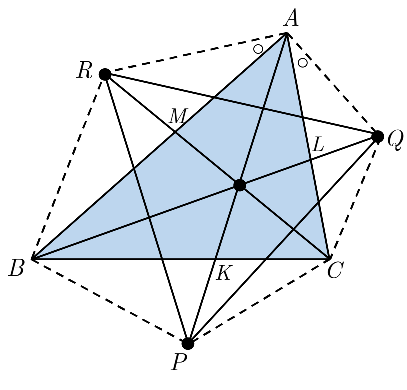
〇ナポレオン点（共点）

線分$BC\,,CA,AB$を１辺とするΔABCの外側の正三角形の重心をそれぞれ$P\,,Q,R$とする。

また，$AP,BQ\,,CR$と，辺$BC\,,CA,AB$との交点をそれぞれ$K\,,L\,,M$とする。

$\theta=\angle RAC=\angle RAB+\angle BAC=30^\circ+\angle BAC=\angle BAC+\angle CAQ=\angle BAQ$

また，$AR=\dfrac{1}{\sqrt{3}}AB\quad AQ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}AC$ より，



$$\Delta ARC=\frac{1}{2}AR\cdot AC\sin\theta=\frac{1}{6}AB\cdot AC\sin\theta$$

$$\Delta AQB=\frac{1}{2}AQ\cdot AB\sin\theta=\frac{1}{6}AB\cdot AC\sin\theta\,,$$

$$\therefore\quad \Delta ARC=\Delta AQB$$

同様に考えると，

$$\Delta BPA=\Delta BRC\,,\quad \Delta CPA=\Delta CQB$$

これより，

$$
\begin{aligned}
\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CL}{LA}&=\frac{\Delta ARC}{\Delta BRC}\cdot\frac{\Delta BPA}{\Delta CPA}\cdot\frac{\Delta CQB}{\Delta AQB}\\
&=\frac{\Delta AQB}{\Delta BRC}\cdot\frac{\Delta BRC}{\Delta CPA}\cdot\frac{\Delta CPA}{\Delta AQB}\\
&=1
\end{aligned}
$$

よって，ΔABCにおいてチェバの定理の逆により，３線分$AK\,,BL\,,CM$は一点で交わる。