メイクる数学

〜数学を make-up!しよう

札幌旭丘高校　中村文則

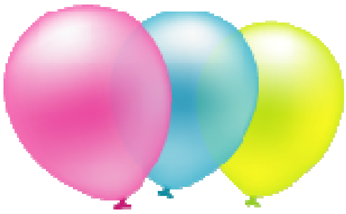
本時のメニュー

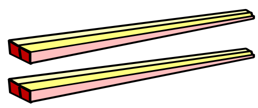
四面体に球を膨らませてみよう

レシピ

【材　料】　本時で使用する素材(食材)

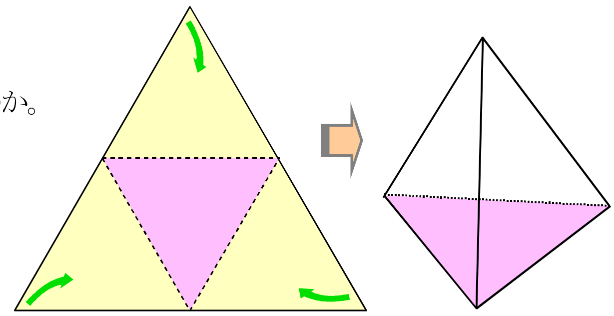
割り箸　（10 膳）　サランラップ
風船　　（2 つ）　油性マジック
輪ゴム　（適量）　ストロー　（少々）
画鋲　　（適量）　熱い吐息





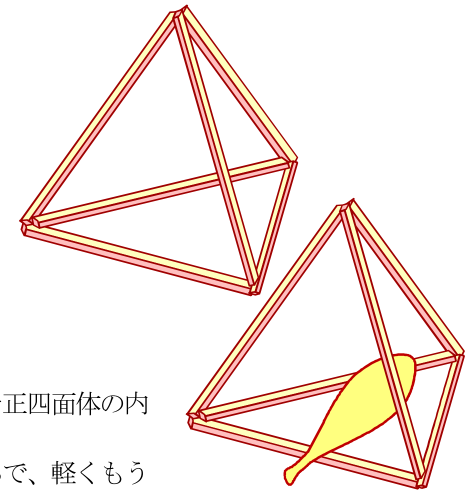
【下ごしらえの味付け】

正四面体の展開図を厚紙で作り、正四面体を折ってみよう。
どんな性質が見えてくるだろう。
正三角形だけで作られる立体は他にはどんな図形があるだろうか。
正四面体の表面積を求めてみよう。
正四面体の体積を求めてみよう。
正四面体の体積と表面積の比を求めてみよう。
正四面体の2面のなす角の余弦の値を求めてみよう。
正四面体の４頂点に外接する球の半径を求めてみよう。
正四面体の４面に内接する球の半径を求めてみよう。
正四面体の６辺に接する球の半径を求めてみよう。



【調　理】

正四面体の面と辺に接する球をメイクる！！！



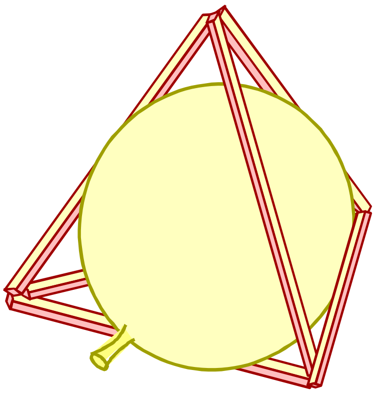
☆正四面体をメイクる

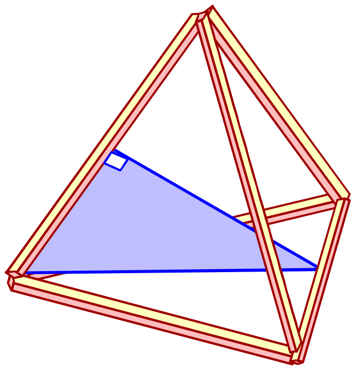
三膳の割り箸を割って、箸の両端を繋ぎ合わせ、正四面体を作成する。
両端は、木工ボンドやガムテープで固定する。

☆正四面体の辺に接する球をメイクる

風船を一つ用意する。
作成した木枠の正四面体を右手、風船を左手に持ち、風船の膨らむ方を正四面体の内部に入れる。
ゆっくりと、風船に息を吹き込み、風船の表面が、辺に当たったところで、軽くもう

一息膨らませてから風船の口を縛る。
　風船と木枠がくっ付いている箇所を確認し、辺に接する球の半径を求めてみよう。



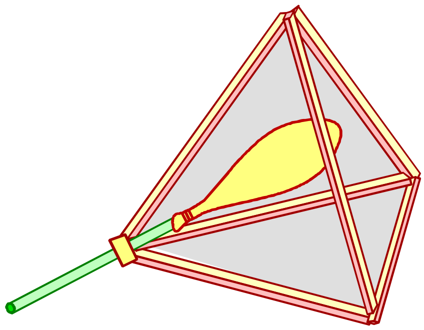


> 正四面体の辺に接する球の直径は、正四面体の向かい合う２辺の中点を結ぶ線分の長さである。

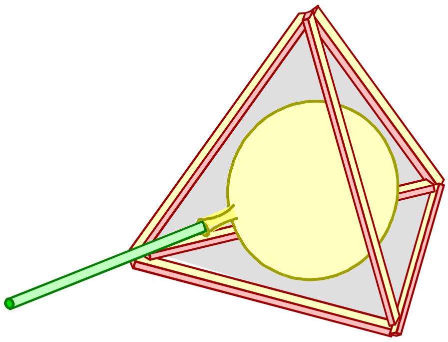
　正四面体の１辺の長さを a とすると、面である正三角形の中線の長さは、$d=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ である。
これから、辺に接する球の半径 r_S は、

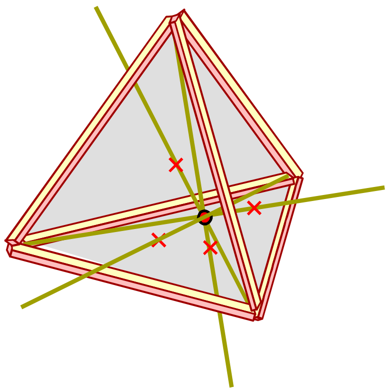
$$r_S=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

☆正四面体の面に接する球をメイクる



　用意したストローを風船の口に差込み、輪ゴムで口を閉め、空気が漏れないように固定する。
　風船のついたストローを木枠の正四面体の内部に入れ、頂点の一つで軽くセロテープで止める。
　正四面体にサランラップを巻きつけ、正四面体の面を作る。
　ストローから風船に空気を吹き込む。
　ストローを少し動かして、風船の位置を微調整しながら、風船がすべての面であるサランラップにくっつくまで膨らます。
　ストローの口をセロハンテープで止め、空気が漏れないようにする。
　風船とサランラップがくっ付いている６つの面の上の点をマジックで、×印をつける。
　風船から空気を抜いて、萎ませる。
　ここで、問題。各面の正三角形のどこに×印があるだろうか。
　正四面体を床に置き、真上から見下ろすと、×印は頂点の真下にくることが分かる。すなわち、頂点と向かいの面にある×を結ぶ線分は、面に垂直であることが予想できる。
　用意した串を１つの×印から、その面の向かいの頂点に突き刺してみよう。
　残りの３つの×についても同様に突き刺す。
　突き刺した４本の串は１点で交わっていることを確認しよう。





> 正四面体の面に接する球の中心は、正四面体の面である正三角形の重心と、向かい合っている頂点を結ぶ線分の交点である。

　内接球の中心と４面の正三角形に降ろした垂線の長さ r_I はみな等しく、これが内接球の半径である。これを求めてみよう。
　正三角形の面積は、

$$S=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

　内接球の中心と、正四面体の頂点を結ぶと、正三角形を底面として高さを r_I とする４つの合同な四面体が作られる。
　その体積は V' は、$V'=\frac{1}{3}Sr_I=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2r_I$
　一方、正四面体の体積は、$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$　であるから、$V=4V'$ より、

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=4\times\frac{\sqrt{3}}{12}a^2r_I \qquad これから、\qquad r_I=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

正四面体の頂点に接する球をイメクる！！！

正四面体をいろいろな角度からみて、図形をイメクってみよう。
……「イメクる」とは、image + make イメージ(image)し、作る(make)、すなわち想像し創造すること。

正四面体の１辺が床にあり、向かい合う辺が床に平行になるように木枠の正四面体をおく。
正四面体の１辺の長さをaとして、次の問題をイメクる。

Q　正四面体を真上から見て、正方形をイメクる。正方形の１辺の長さは?。

⇒　A　正方形の対角線が正四面体の１辺の長さaであるから、正方形の１辺の長さは$\frac{1}{\sqrt{2}}a$

Q　床にある辺に垂直方向からに真横に正四面体みて、二等辺三角形をイメクる。その高さは?

⇒　A　二等辺三角形の底辺の長さがa、残り２辺の長さが、$\frac{\sqrt{3}}{2}a$ より、$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}a$

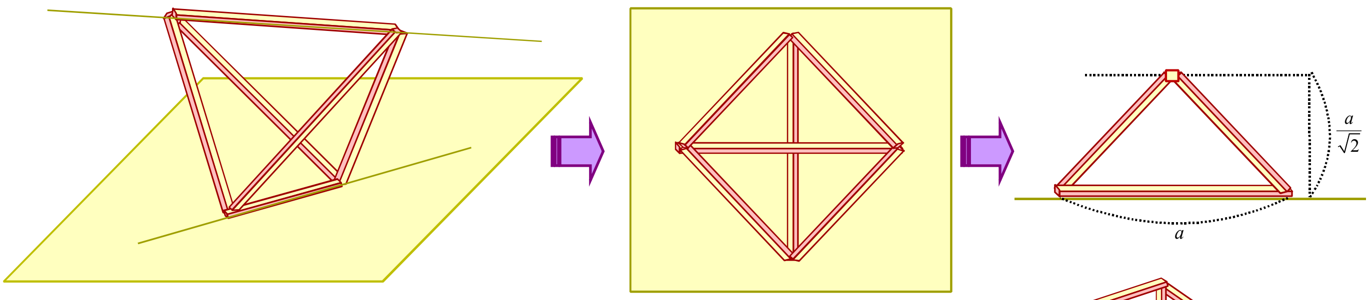
Q　どちらも$\frac{1}{\sqrt{2}}a$の長さであることより、正四面体はある図形の内部にあることをイメクろう。

⇒　A　正四面体は、１辺の長さが$\frac{1}{\sqrt{2}}a$の立方体の内部にあり内接する。

Q　正四面体の半径をイメクり、求めよう。

⇒　A　立方体と正四面体は同じ球に外接する。立方体に外接する球は、立方体の対角線がその直径であるため、正四面体の外接球の半径r_Oは、

$$r_O=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$$



立方体の中に正四面体をメイクる！！！

割り箸４膳を用意し、割り箸の長さが正方形の対角線として、正方形の１辺の長さである$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍の長さより少し長め(5mm 程度長め)に切る。

次に、木枠の正四面体を２辺が立方体の上面・底面の正方形の対角線になるように、立方体の上の方から降ろして置く(立方体を少し大きめに作っておかないと立方体の中に正四面体ははまらない)。

作った模型から、正四面体と立方体の体積の関係を調べてみよう。

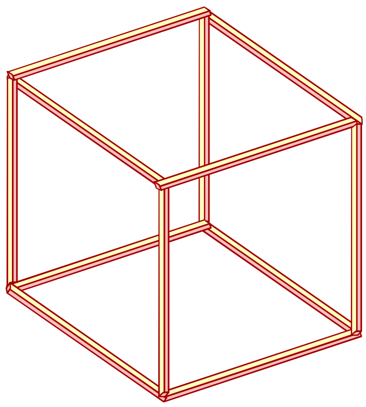
正四面体は、立方体で正四面体と頂点を共有していない４つの頂点から角を切り落として作ることができる。切り落とす角は底面が直角二等辺三角形の直円錐であり、４つとも同じ大きさである。

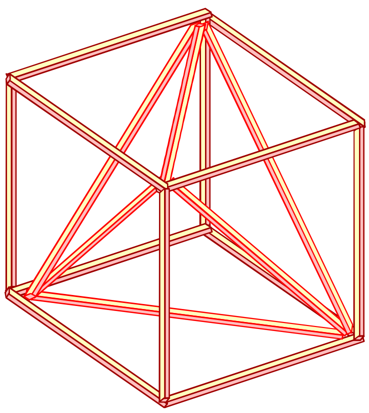
その底面の面積Sは、

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{1}{4}a^2$$

高さは$h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ より、体積V'は、$V'=\frac{1}{3}hS=\frac{\sqrt{2}}{24}a^2$

これから、正四面体の体積Vは、$V=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3-4V'=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$





次に、立方体に正四面体をはめ込んだ状態で、正四面体の内部に風船を入れて膨らませて、正四面体の辺に接するようにすると、右図のように、

立方体、正四面体、正四面体の辺に接する球

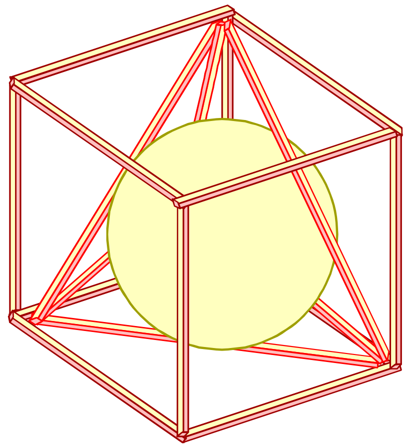
の位置関係を表すオブジェが作られる。

このオブジェから、

正四面体の辺に接する球は、立方体の内接する球

であることを確認しよう。

また、立方体の１辺の長さは、正四面体の一辺の長さを a とすると、立方体の１辺の長さは $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ であることより、四面体の辺に接する球の半径は $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$ である。



立方体の中に２つの正四面体をメイクる！！！

画鋲と輪ゴムを適量、用意する。

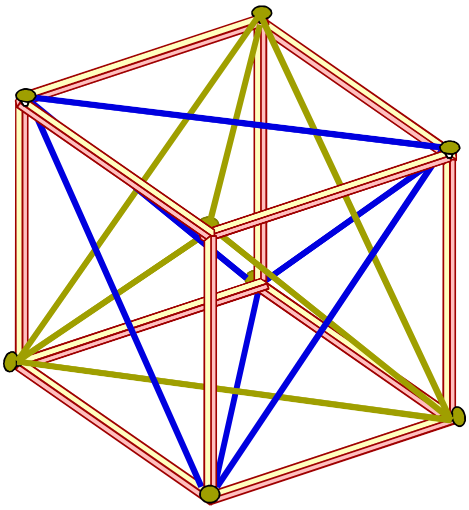
（できれば、６本×２の色違いの輪ゴムを用意する）

１つの画鋲の針の先に３本の輪ゴムをいれて、立方体の頂点のひとつに刺す。

同様に輪ゴムが正四面体の辺になるように３本の画鋲に輪ゴムを入れてから立方体の頂点に刺して、立方体に内接する正四面体を作る。

画鋲の刺していない残り４つの頂点についても、輪ゴムが辺となる正四面体をもう一組作る。

２つの正四面体が立方体に内接していることを確認してから、次のことをイメクってみよう。



① ２つの四面体の内部が交わっている部分の図形をイメクる。
② 交わっている部分の体積を立方体の体積からイメクる。
③ ２つの正四面体を合わせた図形をイメクる。
④ ２つの正四面体を合わせた図形の体積を立方体の体積からイメクる。

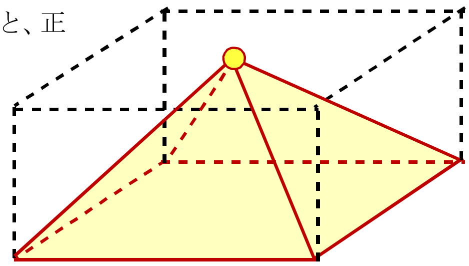
① 色の違う輪ゴムが交差する点は何点あるか調べ、その点を結んだ図形を考えると、正八面体ができる。

② 正八面体は立方体に内接している。正八面体を２つの合同な正四角すいに分けると、

その体積は、立方体の体積 V の

$$\frac{1}{2}V\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}V$$

である。



③ 右図の立体であり、「八角星」といわれている。

この図形は、正八面体の８つの正三角形の面に正四面体をくっ付けた形になっている。

④ 正四面体の体積は、立方体の体積 V に対して、４つのカドの円錐を切り取ったものであるから、

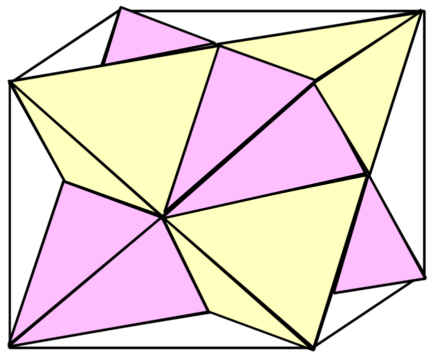
$$\left(1-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)V=\frac{1}{3}V$$

八角星の体積は、正四面体の２つの体積から、交わっている正八面体の体積を除いたものより、

$$\frac{1}{3}V\times 2-\frac{1}{6}V=\frac{1}{2}V$$

これから、立方体、八角星、正四面体、正八面体の体積比は、

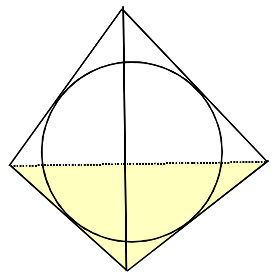
$$V:\frac{1}{2}V:\frac{1}{3}V:\frac{1}{6}V=6:3:2:1$$



また、八角星で、正八面体のくっ付いている８つの正四面体の１辺の長さは、もとの正四面体の１辺の長さの $\dfrac{1}{2}$ であるから、８つの正四面体の体積は、$8\times\dfrac{1}{3}V\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{3}V$ であり、もとの正四面体の体積に等しい。したがって八角星の体積は、正四面体の体積と正八面体の体積の和である。

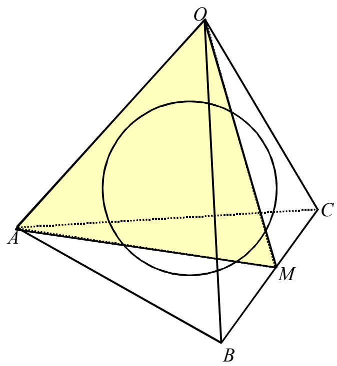
あとがき

図形の認識は、把握できる次元より一般的には低次元である。例えば、平面上の生物が「線分」を認識できるかというと無理である。人間が線分を認識できるのは、線分に「厚み」や「幅」を持たせて視覚補正をしているわけで、この厚みは3次元の要素である。平面上の生物には線分に対して垂直にみると線分を見えないわけで、他の位置のからみた線分の2次元上の変化から線分の形を予測することになる。同様に、立体図形は3次元の図形だから、その認識は人間にとっては極めて難しいわけである。

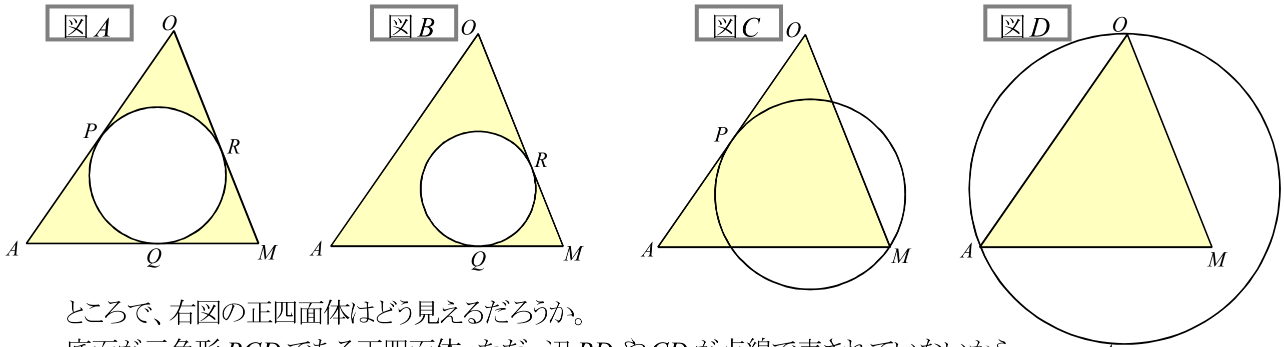


例えば、正四面体とその内部に内接する球を生徒は、右図のような図を描く。この図はどちらかというと、正四面体の面というよりは辺に接している球である。ただ、すべての辺に接しているかというと、よくみるとそれもおかしいことが分かる。結局、立体図形を平面に書くこと自体が無理な作業なのであり、右図は、四角形に内接する円としか本来は認識できないものなのである。

では、四面体$OABC$を、頂点Oと、その対面である正三角形ABCの中線AMを含む平面で正四面体とその内接球を切るとき、その切り口の図はどうなるだろう。

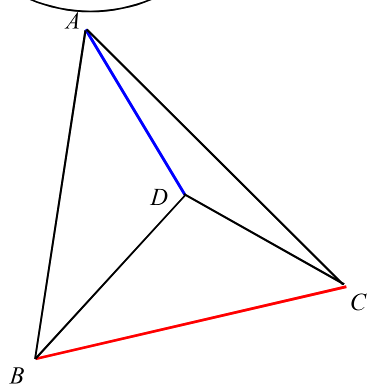


これも図Aのように書く生徒は随分多い。球の大円が接している部分はもともとの球のどの部分か指摘すると間違いに気づく。図でOAは辺であり、AMとOMは面上の線分(面である正三角形の中線)を表しているから、辺上の点である点Pと球は接しない。したがって、面に内接しているのは、もう少し半径が小さくてQ, Rで接している図Bである。辺に接する場合は、図Cで、点PとMが辺上の点であるから、PMを直径とする大円が描かれる。頂点に接し正四面体に外接する球は、図Dのように、頂点O, Aを通る大円が描かれる。このように、これらの球と正四面体の位置関係は、けっして図形を空間認識しているわけではなく、図形の切断面を考えたときに「接している箇所はどこか」という極めて平面的な思考で図の状態を想像しているだけである。それほどにヒトの空間の認識力は脆いのである。



ところで、右図の正四面体はどう見えるだろうか。

底面が三角形BCDである正四面体。ただ、辺BDやCDが点線で表されていないから、底面から見上げたような図形だろうか。あるいは、頂点Dを真上に見て、底面ABCを見下ろしたような図にもみえる。



しかし、この図は、辺BCが下にあり、ねじれの位置にある辺ADがその上方にある正四面体とみることもできる。このような見方はなかなかできない。それは、ヒトの視覚は、底面を下に置くことで図形を安定した位置に落ち着けようとしてしまうからである。自然、ヒトは、正四面体を平面図形の一つとして、描画のパターンを個々に作ってしまう。だが、図形の性質を調べるには、1 辺を支えとして立っている不安定なこの形の方が分かりやすいこともある。ヒトは、正四面体を空間内の立体としてマルチアングルでみることができなくなっているのである。

今回のテーマは正四面体にいろいろな条件で接する球面との位置関係をメイクることである。ただ、正四面体に外接する球面については挫折した。メイクることができないわけではないが、「5 分の教材は 5 分で作ろう」というコンセプトに反し、結構な準備が必要になってしまう。

そこで、新たに「メイクる」に対して「イメクる」ことを考えた。「イメクる」とは「image を makeup」するということ。メイクった立体図形を補助興具として、外接球をイメージしてみようと試みた。結果として、「メイクる」ことと「イメクる」ことは相乗的に作用し、理解を深めたのではないかと思う。こちら側も「メイクる」ことで、立体図形に固定化したイメージを植えつけようとしていたようでありデジタル思考を選択してしまっていたようである。空間内に居住するヒトは空間を把握できない不自由な存在ではあるけど、想像の世界では次元を自由に膨らませることはできる。心象風景の中で思考し遊ぶことはヒトだからこそ可能なことである。