漸化式の項の Share　～　項を振り分けて平衡方程式を見つけよう

Fuminori Nakamura

$a_{n+1} = pa_n + q$

どうバランスをとればいいだろう
定数 q の値を，項 a_{n+1} と a_n に Share して

$$a_{n+1} - \alpha = \bigcirc(a_n - \alpha)$$

とできればいいかもしれない。
漸化式の両辺から α を引くと

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= (pa_n + q) - \alpha \\ &= pa_n + (q - \alpha) \end{aligned}$$

これから，　$1 : (-\alpha) = p : (q - \alpha)$
式を変形すると　$\alpha = p\alpha + q$

なあんだ，漸化式を次のように置き換えれば share できる

$a_{n+1} = \alpha, \quad a_n = \alpha$ → $\alpha = p\alpha + q$

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

どうバランスをとればいいだろう
項 a_{n+1} を項 a_{n+2} と a_n に Share して

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \bigcirc(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

とできればいいかもしれない。

$a_{n+2} = -pa_{n+1} - qa_n$ として，両辺から αa_{n+1} を引くと

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} &= (-pa_{n+1} - qa_n) - \alpha a_{n+1} \\ &= (-p - \alpha)a_{n+1} - qa_n \end{aligned}$$

これから，　$1 : (-\alpha) = (-p - \alpha) : (-q)$
式を変形すると　$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$

なあんだ，漸化式を次のように置き換えれば share できる

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ ← $a_{n+2} = \alpha^2, \ a_{n+1} = \alpha, \ a_n = 1$

Share

$$a_{n+1} = ra_n$$

$a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$

どうバランスをとればいいだろう
右辺の分子の q を両辺に Share して

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{\bigcirc(a_n - \alpha)}{ra_n + s}$$

とできればいいかもしれない。
漸化式の両辺から α を引くと

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \alpha = \frac{(pa_n + q) - \alpha(ra_n + s)}{ra_n + s} \\ &= \frac{(p - r\alpha)a_n + (q - s\alpha)}{ra_n + s} \end{aligned}$$

これから，　$1 : (-\alpha) = (p - r\alpha) : (q - s\alpha)$

式を変形すると　$\alpha(r\alpha + s) = p\alpha + q \quad \therefore \ \alpha = \dfrac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$

なあんだ，漸化式を次のように置き換えれば share できる

$a_{n+1} = \alpha, \ a_n = \alpha$ → $\alpha = \dfrac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

どうバランスをとればいいだろう
2 式をまとめて share して，

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \bigcirc(a_n - \alpha b_n)$$

とできればいいかもしれない。
第 2 式を α 倍して，第 1 式から引くと，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_{n+1} &= (pa_n + qb_n) - \alpha(ra_n + sb_n) \\ &= (p - r\alpha)a_n + (q - s\alpha)b_n \end{aligned}$$

これから，　$1 : (-\alpha) = (p - r\alpha) : (q - s\alpha)$
式を変形すると，

$$\alpha(r\alpha + s) = p\alpha + q \qquad \therefore \ \alpha = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$$

なあんだ，漸化式を次のように置き換え
第 1 式と第 2 式を辺々割れば，share できる

$a_{n+1} = a_n = \alpha, \ b_{n+1} = b_n = 1$