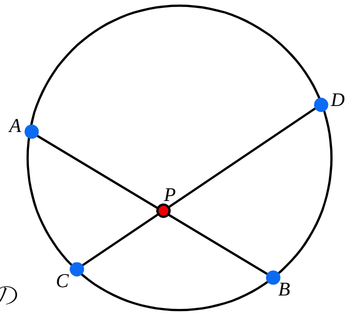
方べきのPowerを解き放つ

市立札幌旭丘高校　中村文則

0．はじめに

> 円周上にない点 P から引いた２直線が円によって切り取られる弦をそれぞれ AB, CD とするとき，
>
> $$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
>
> が成立する．



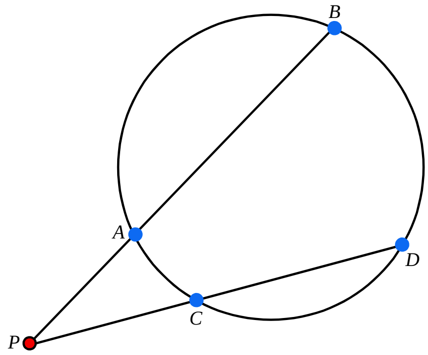
この性質を「方べきの定理」という．

点 P は円の内部，外部の２通りが考えられ，いずれの場合も定点 P と弦の両端までの長さの積は等しい．その証明は，点 P が円の内部の場合は円周角の性質，円の外部の場合は補角の性質を用い，

$\Delta PAC \backsim \Delta PDB$ より

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

となり簡単に導かれる．



したがって，この定理は単に相似比を示しただけのことであり，定理と呼べるほど大仰なものではない．加えて「方べき」がどんな意味を持つかということも定理として分りにくい．そのため，直線が円による切られるとみて「割線定理」と表現することもある．

方べきの定理は「Power-Theorem」を直訳したものであり，べき(冪)乗は同じ数を掛け合わせることである．べき乗という用語は，その後「累乗」という表現に変わり，いまの教科書では，降べき，昇べきのように文字整理の場合と，本定理で使われるぐらいである．

このように方べきは２乗のことを言うわけであるがこれが定理の性質とどのような関係があり，どう使われているのか調べてみよう．

１．方べきであること

「方べきの定理」は，点 P が円周上の点である場合は，$P = A = C$ より，$PA = 0, PC = 0$ であり，

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = 0$$

となり明らかに成立している．また点 P を通る直線が円と異なる２点で交わらずに接する場合については，２つの弦の長さは０に近づき，

$$A = B = S,\ C = D = T$$

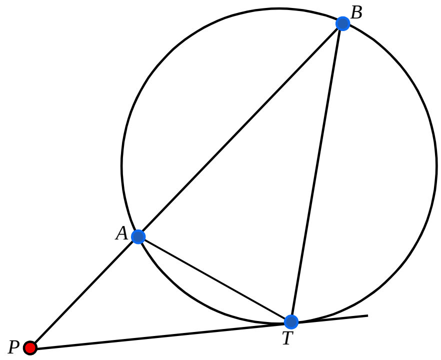
とみなすことができる．よって $PA(= PB = PS), PC(= PD = PT)$ は点 P (極)から円に引いた２つの接線であり，

$$PS = PT$$

であることから方べきの定理は成立する．

また，接線との関係ではさらに次の性質が成り立つ．

> 円の外部の点 P から円に引いた直線の弦を AB , 接線の接点を T とするとき，
>
> $$PA \cdot PB = PT^2$$
>
> が成立する．



証明)

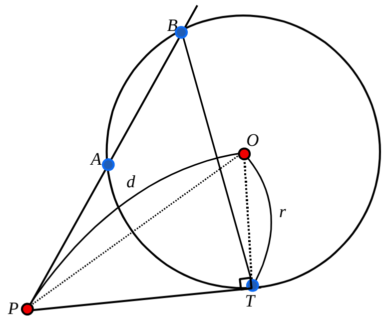
接弦定理より $\angle PTA = \angle PBT$ であるから，

$\Delta PTA \backsim \Delta PBT$

よって，

$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT}$$

$\therefore \quad PA \cdot PB = PT^2$ Q.E.D.



PT^2 の値を定円における点 P の方べきといい，この用語はスイスのスタイナー(Steiner,1796～1863)が数学雑誌(1826)で初めて用いたといわれる．

また，定円の中心を O とすると，

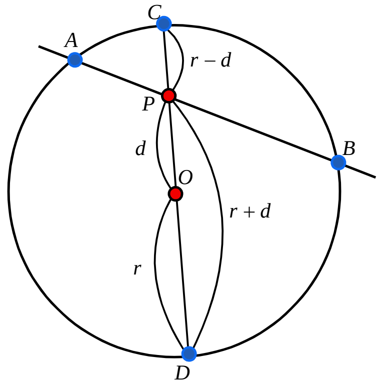
$$PT^2 = OP^2 - OT^2$$

であるから，定点 P と円の中心との距離を d，円の半径を r とすれば，

$$PA \cdot PB = d^2 - r^2$$

である．このことは定点が P が円の内部・外部にある場合も同様に成立する．

> 定点 P から円 O に引いた直線の弦を AB とすると，$PA \cdot PB$ は一定であり，$OP = d$，円 O の半径を r とするとき，
>
> $$PA \cdot PB = \left| d^2 - r^2 \right|$$
>
> である．



証明)

点 P が円周上の点である場合は明らかであるから円の外部と内部の点の場合について証明する．

点 P が円の内部にあるとき，$OP = d < r$

点 P が円の外部にあるとき，$OP = d > r$ より，

点 P を通る直径を CD ($PC \leqq PD$) とすると，

$$PD = PO + OD = d + r$$

$$PC = \left| OP - OC \right| = \left| d - r \right|$$

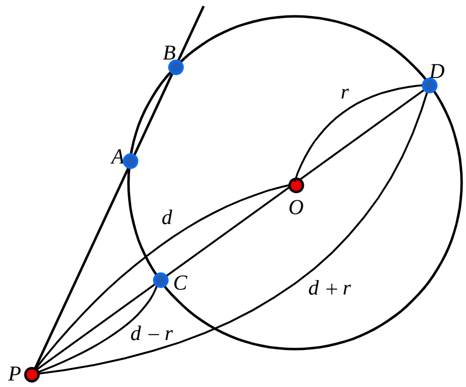
方べきの定理より，

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$= \left| d - r \right| (r + d)$$

$$= \left| d^2 - r^2 \right|$$

Q.E.D.



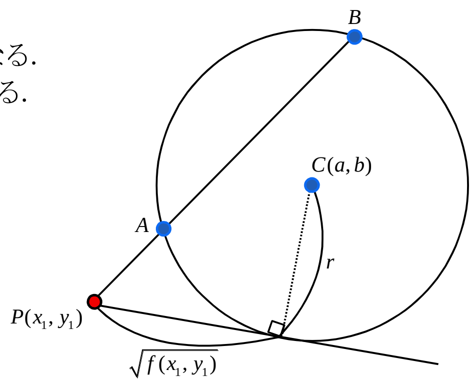
幾何的なこの性質はベクトルとして表現することにより，定点 P の所在はより明らかなものとなる．

点 P より引いた直線と円との２交点を A, B として，P を始点とする２つのベクトル $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ の内積を考える．

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k \quad (k \text{ は実数})$$

これより，点 P は $k > 0$ のとき円の外部，$k < 0$ のとき内部の点となる．

さらに，方べきの定理を解析幾何的に解釈すると，次のようになる．



定点を $P(x_1, y_1)$，定円を $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ とする．

$$f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$$

とおくと，

$f(x_1, y_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 点 P は円周上の点

$f(x_1, y_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ 点 P は円の外部の点

$f(x_1, y_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ 点 P は円の内部の点

このとき，$\left| f(x_1, y_1) \right|$ は，点 P を通る直線と円との２交点との

それぞれの距離の積である．また，点 P が円の外部の点であるときは点 P から円に引いた接線の接点との距離の平方(方べき)である．

このように方べきの定理は辺の比(相似比)を線分の長さ(辺)の積に読み替えることで，平面幾何の定理でありながら，極めて解析的な色合いの強い定理といえるのである．

○方べきの定理から得られる定理

(1) 三平方の定理

証明)

右図のように，半径 b の円 A の内部の点 B を直径 EF 上にとり，EF に垂直で点 B を通る弦を CD とする($BE \geqq BF$) ．

$AB=c, BC=a$ とすると，$CA=b$ であることより，

$$BE=b+c,\ BF=b-c$$

方べきの定理より，

$$BE\cdot BF=BC\cdot BD$$

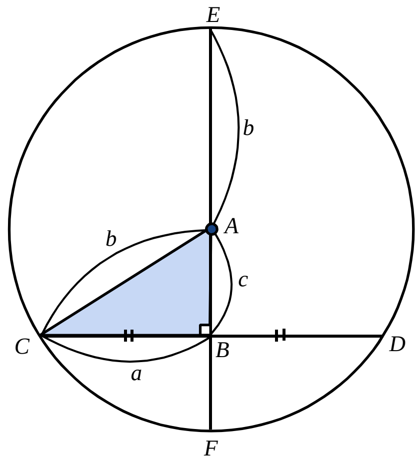
よって，$(b+c)(b-c)=a^2$

$$\therefore\quad b^2=c^2+a^2$$

以上より，CA を斜辺とする直角三角形 ABC において，

$$CA^2=AB^2+BC^2$$

Q.E.D.



Euclid 原論の第３巻の円の命題 35,36 はそれぞれ円の内部，外部の点 P を通る弦 AB について，方べきの定理の証明が記されている．$PA\cdot PB=\left|r^2-d^2\right|$ であるとき，積 $PA\cdot PB$ は，PA, PB を２辺とする長方形(矩形)の面積，d^2, r^2 は正方形の面積と捉え，定理を面積の和・差の性質として表現している．

その証明は三平方の定理を用いているが，現代風にアレンジすると次のようになる．

円 O の内部の点 P を通る弦 AB について証明する．

$PA=a, PB=b$ とおき，$a>b$ として考える．

また，$OA=r, OP=d$ とする．

円の中心 O から弦 AB に引いた垂線の足を H とすると，

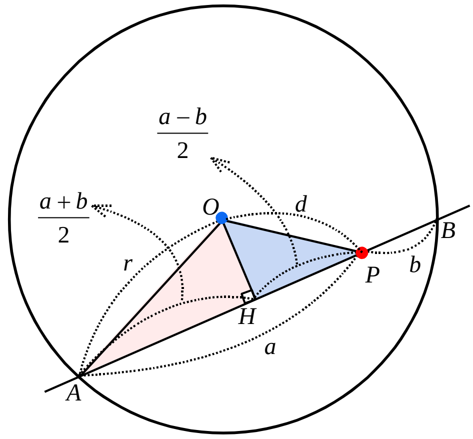
$$AH=\frac{AB}{2}=\frac{a+b}{2} \text{ より } \quad HP=AP-AH=\frac{a-b}{2}$$

ここで，三平方の定理より，

$$OH^2=OA^2-AH^2=OP^2-PH^2$$

よって，$r^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=d^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$$r^2-d^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$



Q.E.D.

よって，方べきの定理から三平方の定理を導き出せることは原論により保障されている訳である．また，この証明には次の性質も見え隠れしている．

(2) 相加平均・相乗平均の関係

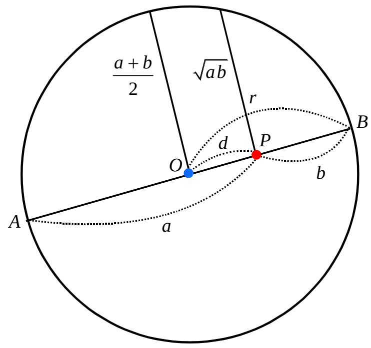
円 O の直径 AB 上の点 P に対して，$PA=a, PB=b$ とする．

また，$OA=OB=r, OP=d$ とすると，方べきの定理より，

$$PA\cdot PB=ab=r^2-d^2\leqq r^2$$

$a>0, b>0$ より，$r\geqq\sqrt{ab}$

ここで，$r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ であるから，



$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

なお，等号成立は，$d=0$ すなわち，$a=b$ のときである．

これから，PA, PB に対し，円の半径を相加平均とみたとき，方べき $PA \cdot PB$ は相乗平均のべき乗の値を示していることになる．

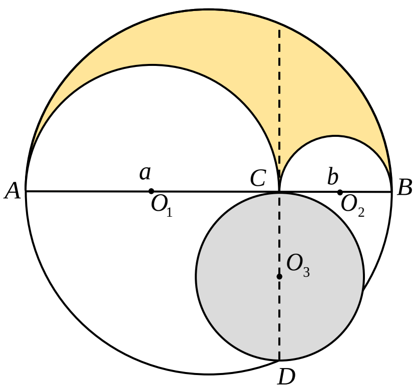
また，点 P を通り直径 AB に垂直な弦の長さを $2h$ とすると，
方べきの定理より，

$$PA \cdot PB = h^2 \text{ より，} \quad h=\sqrt{ab}$$

すなわち，弦の半分の長さが相乗平均を表している．

このことを用いると，次の面白い性質を示すことができる．

> AB を直径とする半円 O の A, B の内分点 C に対し，AC, BC を直径とする半円をそれぞれ O_1, O_2 とする．次に AB に垂直で点 C を通る直線と円 O との交点の 1 つを D として，CD を直径とする円を O_3 とする．このとき，半円 O の面積から半円 O_1, O_2 の面積を除いた部分の面積は，円 O_3 の面積に等しい．



証明) $AC=a,\ BC=b$ とすると $AB=a+b$ である．

これから，半円 O, O_1, O_2 の面積をそれぞれ S, S_1, S_2 とすると，

$$S=\frac{(a+b)^2\pi}{8},\quad S_1=\frac{a^2}{8}\pi,\quad S_2=\frac{b^2}{8}\pi$$

である．したがって，

$$S-S_1-S_2=\frac{ab}{4}\pi$$

また，$CD=\sqrt{ab}$ より，円 O_3 の面積 S_3 は，

$$S_3=\left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right)^2\pi=\frac{ab}{4}\pi$$

$\therefore \quad S-S_1-S_2=S_3$ 　　Q.E.D.

これは，$S=S_1+S_2+S_3$ とみると，AB を直径とする半円の面積は，その内部にある 2 つの半円と CD を直径とする円の面積の和に等しいことを表す．

しかし，$S_3=S-S_1-S_2$ とみると，$S-S_1-S_2$ は AB を直径とする半円の内部にある斜線部分の面積であり，それが円の面積に等しいことを表す．

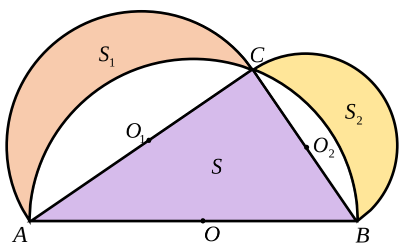
この特徴的な形状の図形をアルキメデスはアルベロス(ギリシア語で靴屋のナイフ)と名付けた．

アルベロス図形の面積は CD を直径とする円の面積に等しくその性質の美しさに驚かされる．このようなアルベロス図形に関する円環問題には多くの研究成果があり，日本では江戸時代に神社仏閣に奉納された絵馬に文献として残っており和算学の発展に寄与している．

ヒポクラテス(紀元前 5 世紀頃)は古代ギリシアの数学者であり，ピュタゴラス学派の数学を発展させ，ギリシア数学の創始者と言われた(医学の祖であるヒポクラテスとは別人である)．

彼は円積問題(与えられた円と同じ面積をもつ正方形の作図可能性)に取り組み，そのひとつの解法を見出している．

> AB を斜辺とする直角三角形 ABC がある．AB, CA, BC を直径とする円をそれぞれ O, O_1, O_2 とする．円 O と円 O_1，円 O と円 O_2 の弧で囲まれる図形の面積をそれぞれ S_1, S_2 とし，直角三角形 ABC の面積を S とすると，
>
> $S=S_1+S_2$
>
> が成立する．



証明）$BC=a, CA=b$ とすると三平方の定理より，

$$AB^2=BC^2+CA^2=a^2+b^2$$

ここで，３つの円 O, O_1, O_2 の面積は，それぞれの円の直径 AB, AC, BC の二乗に比例する．

円 O, O_1, O_2 の半円の面積をそれぞれ T, T_1, T_2 とすると，

$$T:T_1:T_2=(a^2+b^2):a^2:b^2 \quad \cdots(*)$$

これより，$T=T_1+T_2$

この両辺から，弦 AC と弧 AC，弦 BC と弧 BC で囲まれる図形の面積を減ずると，

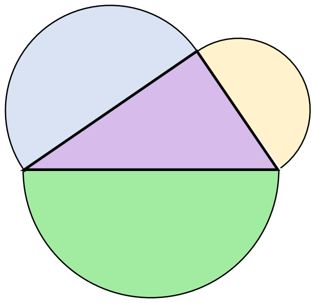
$$S=S_1+S_2$$

Q.E.D.

ピュタゴラスの定理は，

「直角を挟む２辺の平方の和は斜辺の平方に等しい」

ことを表す．ここで，辺の平方は，その辺を１辺とする正方形の面積を表している．すなわち三平方の定理は２つの正方形の面積の和が１つの正方形の面積に等しいということである．ヒポクラテスは，(*)により辺の上にどのような相似図形を考えても同様の性質が成立することを示した．



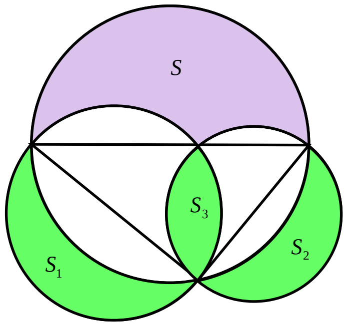
円弧で囲まれた三日月の図形の面積(円周率 π で表されると予想される)は直角三角形の面積(長方形の面積の半分)に等しいことは円積問題のひとつの解法と考えられる．この性質を表す図形は「ヒポクラテスの三日月」と呼ばれている(月のクレーターにはヒポクラテスと命名されているものがあるがこちらは医学の祖のヒポクラテスの名である)．

ヒポクラテスの三日月は，アルベロス図形に加工することができる．

３つの半円の円弧で囲まれる部分を図のように S, S_1, S_2, S_3 とすると，

$$S=S_1+S_2+S_3$$

が成立する．



証明）

大円の面積を T，残りの２つの円の面積をそれぞれ T_1, T_2 とすると，

$$T=T_1+T_2 \quad \cdots(*)$$

である．３つの円の円弧で囲まれる図形の面積を図のように，

$$S, S_1, S_2, S_3, A, B$$

とすると，

$$T=S+S_3+A+B$$
$$T_1=S_1+S_3+A$$
$$T_2=S_2+S_3+B$$

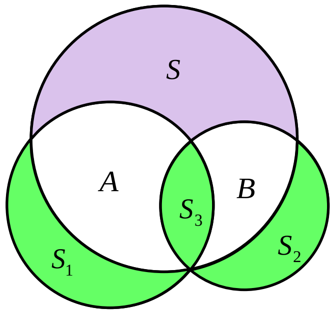
であるから，(*)に代入すると，

$$S+S_3+A+B=(S_1+S_3+A)+(S_2+S_3+B)$$

以上より，

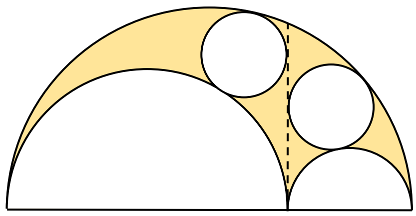
$$S=S_1+S_2+S_3$$

Q.E.D.



アルベロス図形問題の性質をもう少し触れてみよう．

図の２つの半円の弧と大円の直径に垂直な直線に内接する２つの円の半径は等しい（アルキメデスの双子円）



証明）

図のように点を定め，

$AC=a$，$BC=b$（$a \geqq b$）

とする．

直径ABである半円の中心Oに対して，$OA=OB=\dfrac{a+b}{2}$

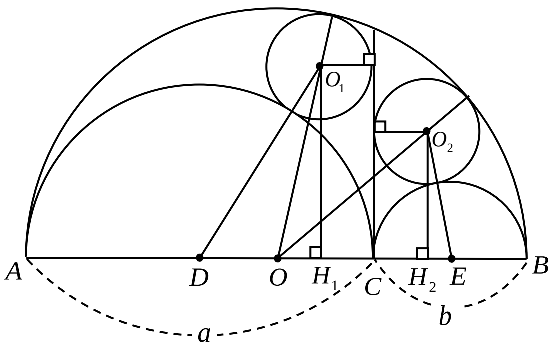
直径ACである半円の中心Dに対して，$DA=DC=\dfrac{a}{2}$

直径BCである半円の中心Eに対して，$EC=EB=\dfrac{b}{2}$

これから，

$$OD=OA-AD=\frac{a+b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b}{2}$$

$$OC=OB-BC=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}$$



円O_1,O_2の中心から弦ABに下ろした垂線とABとの交点をそれぞれH_1,H_2とする．

円O_1の半径をr_1とすると，

$$O_1D=\frac{a}{2}+r_1,\quad DH_1=CD-CH_1=\frac{a}{2}-r_1$$

$$OH_1=|CO-CH_1|=\left|\frac{a-b}{2}-r_1\right|$$

直角三角形O_1DH_1において三平方の定理より，

$$O_1H_1{}^2=O_1D^2-DH_1{}^2=\left(\frac{a}{2}+r_1\right)^2-\left(\frac{a}{2}-r_1\right)^2=2ar_1\quad\cdots①$$

直角三角形O_1OH_1において三平方の定理より，

$$O_1H_1{}^2=O_1O^2-OH_1{}^2=\left(\frac{a+b}{2}-r_1\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}-r_1\right)^2=(a-2r_1)b\quad\cdots②$$

①，②の右辺を比較して，

$$2ar_1=(a-2r_1)b$$

これより，$r_1=\dfrac{ab}{2(a+b)}$

同様に，円O_2の半径をr_2とすると，

$$O_2H_2{}^2=O_2O^2-OH_2{}^2=\left(\frac{a+b}{2}-r_2\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}+r_2\right)^2=a(b-2r_2)$$

$$O_2H_2{}^2=O_2E^2-EH_2{}^2=\left(\frac{b}{2}+r_2\right)^2-\left(\frac{b}{2}-r_2\right)^2=2br_2$$

$a(b-2r_2)=2br_2$より，$r_2=\dfrac{ab}{2(a+b)}$

以上より，$r_1=r_2$ Q.E.D.

ところで，$r_1=\dfrac{ab}{2(a+b)}$ より，$4r_1=\dfrac{2ab}{a+b}$ であるが，この値は２数a，bの調和平均である．

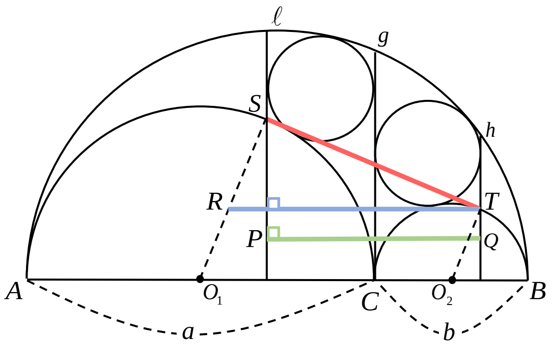
相加平均は円Oの半径，相乗平均は直径ABに垂直で点Cを通る弦の半分の長さである．

したがってアルベロスの図には，３種類の平均の長さが隠れている．これらの平均の大小関係を図の中に示してみよう．

右図において２つ半円O_1,O_2の直径の長さをそれぞれa，bとする．半径が等しい２つの小円の接線で，ABに垂直な直線ℓ,g,hを図のように引く．

小円の半径は$\dfrac{ab}{2(a+b)}$であるから，２つの接線ℓとhの間の距離PQは，

$$PQ=4\times\frac{ab}{2(a+b)}=\frac{2ab}{a+b}\quad(\text{調和平均})$$



2 円O_1,O_2の共通接線の接点をそれぞれS,Tとする(S,Tは直線ℓ,hと 2 円O_1,O_2との交点).

Tから接線ℓに引いた垂線とO_1Sとの交点をRとすると,

$$RT = O_1O_2 = \frac{a+b}{2} \quad \text{(相加平均)}$$

また，直角三角形SRTにおいて三平方の定理より，

$$ST^2 = RT^2 - SR^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

これから，

$$ST = \sqrt{ab} \quad \text{(相乗平均)}$$

図より，

$$RT \geqq ST \geqq PQ$$

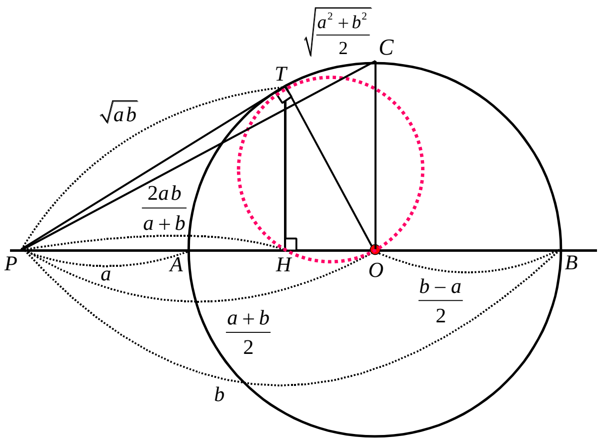
すなわち，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b}$$ (等号は 2 円O_1,O_2の半径が等しいときより， $a=b$)

相加平均，相乗平均，調和平均の大小関係が示されたことになる.

3 つの平均の関係は，同様に，方べきの定理を用いて図の中に表すことができる.
点Pを円Oの外部にとる.
点Pから円に引いた接線の接点をTとし，点Pを通る円の直径をABとする.

$PA=a,\ PB=b\ (a<b)$とおくと,



円の半径rは， $r = \dfrac{b-a}{2}$であるから，

$$PO = PA + AO = \frac{a+b}{2}$$

方べきの定理より，

$$PA \cdot PB = PT^2 \quad \therefore \quad PT = \sqrt{ab}.$$

これより， $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

また，接点Tから直径ABに下ろした垂線の足をHとする.
線分OTを直径とする円は，点Hを通り，PTは円の接線である.
よって，方べきの定理より，

$$PH \cdot PO = PT^2$$

これから， $PH = \dfrac{PT^2}{PO} = \dfrac{2ab}{a+b}$

すなわち， PHはa,bの調和平均を表す.
次に直径ABに垂直で円の中心Oを通る直線が円と交わる点の 1 つをCとすると， OCは半径であるから，

$$OC = \frac{b-a}{2}. \quad \text{これより，}$$

$$PC^2 = PO^2 + OC^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

よって， $PC = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

このPCの値をaとbの二乗平均という.
二乗平均の値は図より，

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$$

すなわち，相加平均より大きい.

以上より，次の不等式が成立する．

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

(二乗平均)>(相加平均)>(相乗平均)>(調和平均)

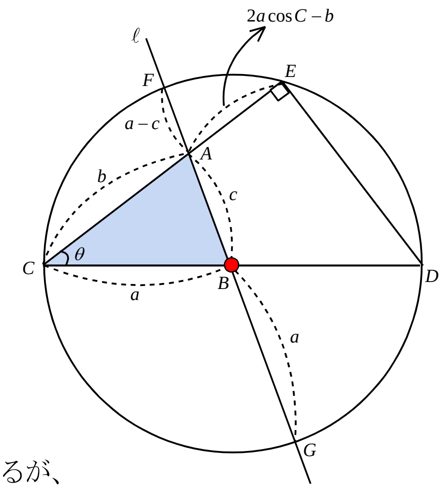
ところで等号成立についてであるが，この図からは点Pを無限遠点に置かなければいけないことになるが，このことは，後述の調和点列を考えることで解決する．

⑶ 余弦定理

定円の直径に方べきの定理を用いることで円の中に三角比の余弦定理をみることができる．

中心Bである円において、図のようにCDを直径とする直角三角形CDEをおく．中心B通る直線ℓが、辺CEと交わる点をA、劣弧、優弧との交点をそれぞれF,Gとする．

三角形ABC内の鋭角Cに対して余弦定理を証明してみよう．



$BC=a\,,CA=b\,,AB=c$ とする．

直角三角形CDEにおいて、$CE=CD\cos C=2a\cos C$ ．

よって、 $AE=CE-CA=2a\cos C-b$

また、 $AF=FB-AB=a-c$ 、 $AG=AB+BG=c+a$

方べきの定理より

$$AC\cdot AE=AF\cdot AG$$

であるから、

$$b(2a\cos C-b)=(a-c)(a+c)$$

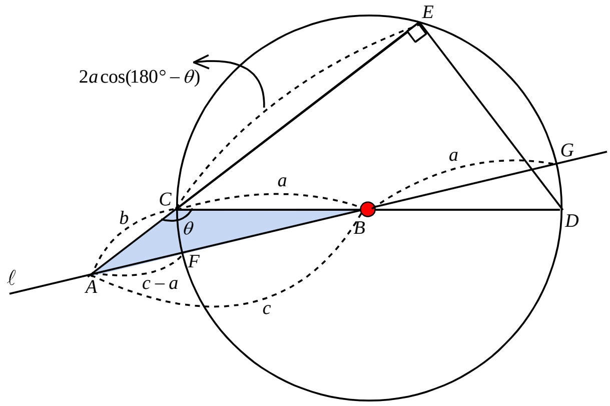
$$2ab\cos C-b^2=a^2-c^2$$

以上より、 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

方べきの定理による本証明は、Sidney H.Kung 氏によるものであるが、この方法は鈍角の余弦定理の証明にも用いることができる．

円の中心Bを通る直線ℓと辺ECの頂点Cの延長との交点をAとすると、ΔABCにおいて$\angle ACB=\theta$は鈍角である．

右図より、



$$AE=AC+CE=b+2a\cos(180^\circ-\theta)=b-2a\cos\theta$$

$$AF=AB-BF=c-a$$

$$AG=AB+BG=c+a$$

よって方べきの定理より、

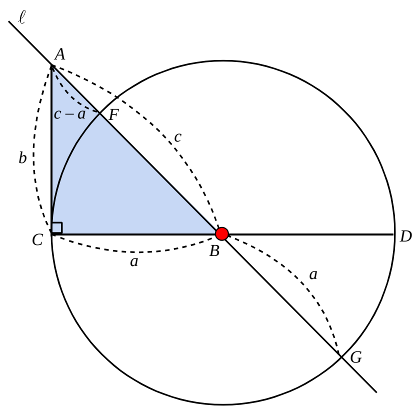
$$AC\cdot AE=AF\cdot AG$$

$$\therefore\quad b(b-2a\cos\theta)=(c-a)(c+a)$$

$$b^2-2ab\cos\theta=c^2-a^2$$

$$\therefore\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

また、直径CDの円周角Eを点Cに近づけると$\angle ACB$は直角に近づくことより、極限をとることで直角に対する余弦定理、すなわち三平方の定理が示される．



$\angle C$が直角である直角三角形ABCにおいて、

$$AF=AB-FB=c-a$$

$$AG=AB+BG=c+a$$

であるから、方べきの定理より、

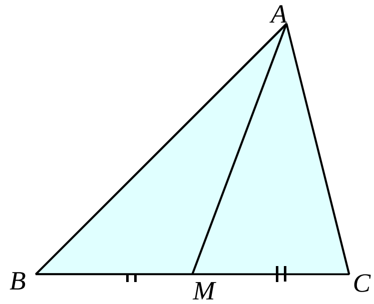
$$AF\cdot AG=AC^2$$

$$(c-a)(c+a)=b^2$$

$$\therefore\quad c^2=a^2+b^2$$

(4) 中線定理

中線定理は多くの証明法が知られているがここでは方べきの定理を繰り返し用い，辺の長さを導くことで示してみよう．



> 三角形ABCの辺BCの中点をMとすると，
> $$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$
> である．

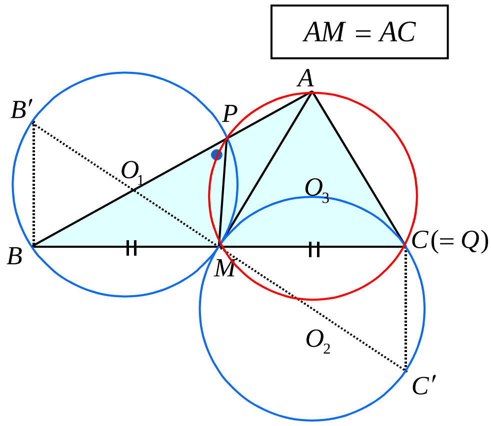
証明）$AB=AC$のときは三平方の定理より明らかであるから

$AB<AC$の場合を証明すればよい．

点Mを通り直線AMに垂直な直線をℓとする．

直線BCに垂直で点B，点Cを通る直線と，直線ℓとの交点をそれぞれB', C'とすると，

$BM=CM$，$\angle BMB'=\angle CMC'$（対頂角）より，$\Delta BMB'\equiv\Delta CMC'$であるから，３点$B, M, B'$および，$C, M, C'$はそれぞれ半径が等しい２つの円$O_1, O_2$の同一円周上の点であり，$AM$は$M$を接点とする２円の共通接線である．



円O_1と辺ABとの点B以外の交点をPとする．また，円O_2と辺ACまたはその延長との交点でC以外の点をQとする．

$AM<AC$　のとき，点QはACの内分点

$AM=AC$　のとき，点Qは点Cに一致（ACは円O_2の接線）

$AM>AC$　のとき，点QはACの外分点である．

円O_1において方べきの定理より，

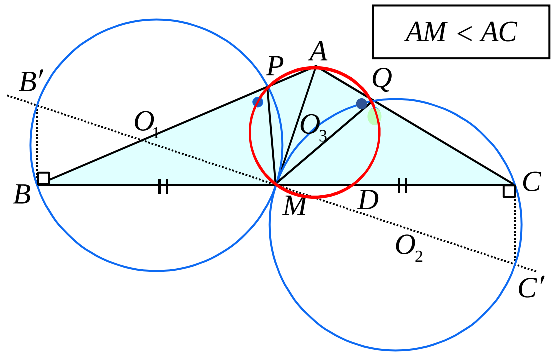
$$AM^2=AP\cdot AB=(AB-PB)\cdot AB=AB^2-BP\cdot BA$$

ここで，円O_1，O_2の半径は等しいから，

$AM<AC$のとき，　$\angle BPM=180°-\angle CQM$

$AM>AC$のとき，　$\angle BPM=\angle CQM$

よって，４点A, P, M, Qは同一円O_3の円周上の点である．



円O_3とBCとのM以外の交点をDとし，

$BM=CM=m$，　$MD=d$　とおく．

円O_3において，方べきの定理より，

$$BP\cdot BA=BM\cdot BD=m(m+d)$$

$$\therefore\quad AM^2=AB^2-m^2-md\quad\cdots①$$

$AM≦AC$のとき，

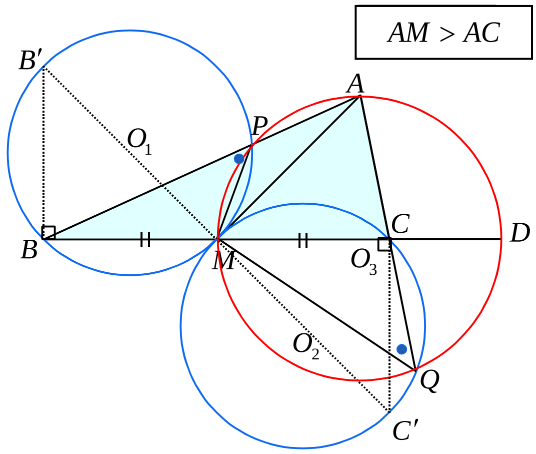
円O_2において方べきの定理より，

$$AM^2=AQ\cdot AC=(AC-QC)\cdot AC=AC^2-CQ\cdot CA$$

円O_3において方べきの定理より，

$$CQ\cdot CA=CD\cdot CM=(m-d)m$$

$$\therefore\quad AM^2=AC^2-m^2+md\quad\cdots②$$



$AM>AC$のとき，

円O_2において方べきの定理より，

$$AM^2=AC\cdot AQ=AC\cdot(AC+CQ)=AC^2+CQ\cdot CA$$

円O_3において方べきの定理より，

$$CQ\cdot CA=CM\cdot CD=m(d-m)$$

$$\therefore\quad AM^2=AC^2-m^2+md$$

これは②に一致する．

①と②を辺々加えて，

$$2AM^2=AB^2+AC^2-2m^2=AB^2+AC^2-2BM^2$$

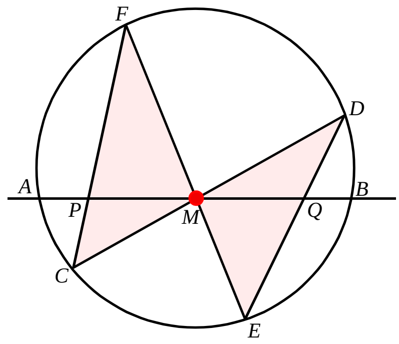
$$\therefore\quad AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

Q.E.D.

(5) 胡蝶定理

胡の国は，紀元前５世紀頃，現在のイランの地に栄えた国であり西胡とも呼ばれていた．胡は胡弓の幽玄な音色のようにミステリアスな国として知られ，胡麻，胡瓜など「胡」のつく様々なものがシルクロードを通って中国に伝わる．この国に生息する蝶もまた神秘的な生き物であり，前世，現世，来世を飛び交うことができる幻の蝶といわれた． 平面幾何でも胡蝶の名を冠する定理があり，閑雅で美しい．

> 弦ABの中点をMとし，Mを通る２つの弦CD, EFを，その端点のC, Eが弧ABの同じ側にあるように引く．弦CF, EDと弦ABとの交点をそれぞれP, Qするとき， $AP = BQ$である．



証明)

点Pから直線CD, EFに下ろした垂線の足をそれぞれH_1, H_2，

点Qから直線CD, EFに下ろした垂線の足をそれぞれH_3, H_4とする．

弧CEの円周角より， $\angle CFE = \angle CDE$.

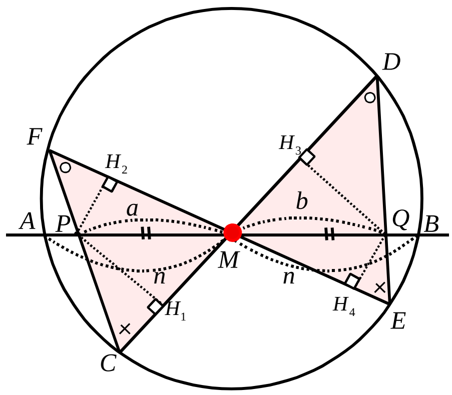
よって， $\Delta FPH_2 \backsim \Delta DQH_3$であるから，

$$\frac{FP}{DQ} = \frac{PH_2}{QH_3} \quad \cdots ①$$

同様に，弧FDの円周角より， $\angle FCD = \angle FED$.

よって， $\Delta PCH_1 \backsim \Delta QEH_4$であるから，

$$\frac{PC}{QE} = \frac{PH_1}{QH_4} \quad \cdots ②$$



①，②を辺々掛けて，

$$\frac{FP \cdot PC}{DQ \cdot QE} = \frac{PH_2 \cdot PH_1}{QH_3 \cdot QH_4} = \frac{PH_1}{QH_3} \cdot \frac{PH_2}{QH_4} \quad \cdots ③$$

ここで， $\Delta MPH_1 \backsim \Delta MQH_3$より， $\dfrac{PH_1}{QH_3} = \dfrac{MP}{MQ}$，

$\Delta MPH_2 \backsim \Delta MQH_4$より， $\dfrac{PH_2}{QH_4} = \dfrac{MP}{MQ}$

③より，

$$\frac{FP \cdot PC}{DQ \cdot QE} = \frac{PH_1}{QH_3} \cdot \frac{PH_2}{QH_4} = \frac{MP^2}{MQ^2} \quad \cdots ④$$

また，方べきの定理より，

$$FP \cdot PC = AP \cdot PB, \quad DQ \cdot QE = BQ \cdot QA$$

辺々割って，

$$\frac{FP \cdot PC}{DQ \cdot QE} = \frac{AP \cdot PB}{BQ \cdot QA} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤より， $\dfrac{MP^2}{MQ^2} = \dfrac{AP \cdot PB}{AQ \cdot QB}$

$$\therefore \quad \frac{PA \cdot PB}{PM^2} = \frac{QA \cdot QB}{QM^2} \quad \cdots\cdots (*)$$

$PM = a,\ QM = b$， $AM = BM = n$とおくと，(*)より

$$\frac{(n-a)(n+a)}{a^2} = \frac{(n-b)(n+b)}{b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{n^2}{a^2} - 1 = \frac{n^2}{b^2} - 1$$

$n \neq 0$であるから， $a = b$.

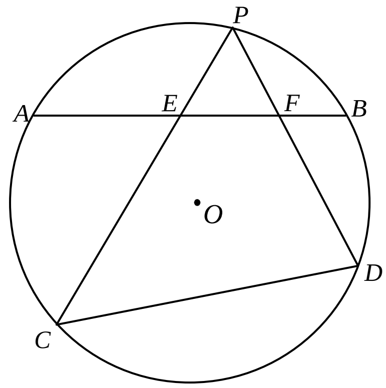
$AP = n - a,\ BQ = n - b$より， $AP = BQ$　　　　　　　　Q.E.D.

(拙著「胡蝶の羽ばたきを追う」では，胡蝶定理の一般化を方べきの定理を用いて考察)

(6) 春木の補助定理

春木博氏は, 大阪大学およびカナダの Warterloo 大学の教授であり, 初等幾何で著名な数学者である. 氏の補助定理により，多くの数学者が新しい性質を発見している．ここでは春木の補助定理により，胡蝶定理の拡張を試みてみよう.

> 円O上に2つの弦AB,CDがある. 弧AB上の任意の点Pに対して，PC，PDと弦ABとの交点をそれぞれE,Fとするとき，$\dfrac{AE \cdot FB}{EF}$の値は一定である.



証明）三角形PEDの外接円O'と弦ABのBの延長線との交点をGとする.

円Oにおいて方べきの定理より,

$$AF \cdot FB = PF \cdot FD \quad \cdots ①$$

円O'において方べきの定理より,

$$EF \cdot FG = PF \cdot FD \quad \cdots ②$$

①, ②より,

$$AF \cdot FB = EF \cdot FG$$

よって　$(AE + EF) \cdot FB = EF(FB + BG)$

これから，$AE \cdot FB = EF \cdot BG$

$$\therefore \quad \frac{AE \cdot FB}{EF} = BG$$

BGの長さが一定であることを示す.

円Oにおいて円周角の性質より,

$$\angle CAD = \angle CPD = \angle EPD$$

円O'において円周角の性質より,

$$\angle EPD = \angle EGD = \angle BGD$$

$$\therefore \quad \angle CAD = \angle BGD \quad \cdots ③$$

また，四角形$ACDB$は円に内接するから,

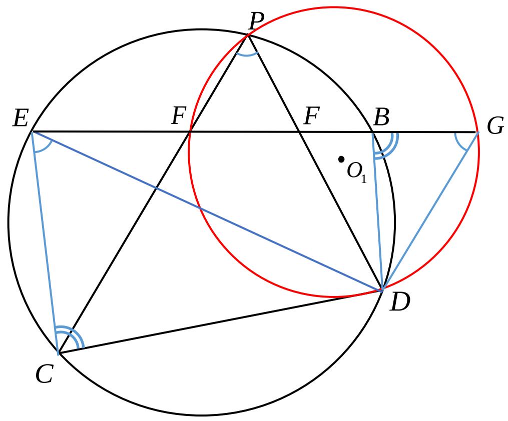
$$\angle ACD = \angle GBD \quad \cdots ④$$

③, ④より２角が等しいから,

$$\Delta ACD \backsim \Delta GBD$$

である．よって,

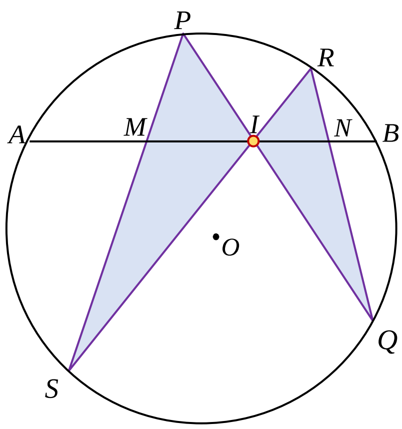
$$\frac{AC}{CD} = \frac{GB}{BD} \quad \text{より，} \quad GB = \frac{AC \cdot BD}{CD}$$



点Gは，A,B,C,Dの円周上の位置により決まるから，GBの値は一定である.　　　Q.E.D.

(7) 一般化された胡蝶定理

> 円Oの弦AB上の点Iを通る２つの弦PQ, RSがある.
> 弦PS, RQと弦ABとの交点をそれぞれM, Nとするとき,
> 次が成立する.
>
> (i) $\dfrac{AM \cdot IB}{IM} = \dfrac{BN \cdot IA}{IN}$
>
> (ii) $\dfrac{1}{IA} + \dfrac{1}{IN} = \dfrac{1}{IB} + \dfrac{1}{IM}$



証明

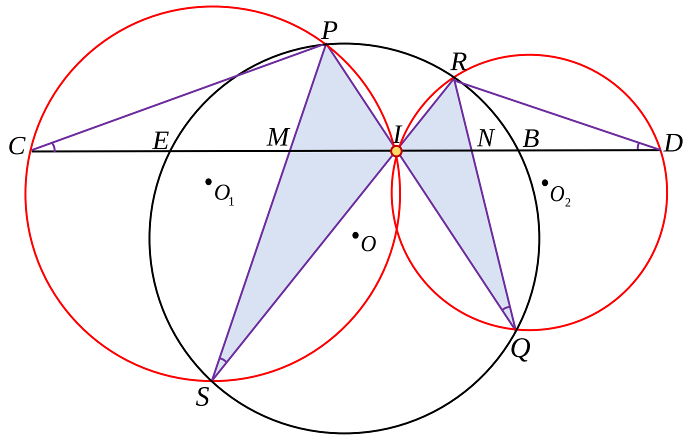
$\Delta IPS, \Delta IQR$に外接する円をそれぞれ円O_1, O_2とする.

直線ABが円O_1と交わる点で，Iでない点をCとする.

また，直線 AB が円 O_2 と交わる点で， I でない点を D とする．

（ｉ）円 O と円 O_1 ，円 O と円 O_2 において，

春木の補助定理により，



$$\frac{AM\cdot IB}{MI}=CA=\frac{AS\cdot BQ}{SQ}$$

$$\frac{AI\cdot NB}{IN}=BD=\frac{AS\cdot BQ}{SQ}$$

よって，$\dfrac{AM\cdot IB}{IM}=\dfrac{BN\cdot IA}{IN}$

（ⅱ）$CA=BD$ より， $CA+AB=BD+AB$

$\therefore\quad CB=AD$

$CB=CI+IB,\ AD=AI+ID$ より

$$CI+IB=AI+ID\qquad\cdots(*)$$

円 O において，円周角の性質より

$$\angle NQP=\angle RQP=\angle RSP=\angle ISP$$

円 O_1 において，円周角の性質より

$$\angle ISP=\angle ICP=\angle NCP$$

よって，　$\angle NQP=\angle NCP$

これから 4 点 N,Q,C,P は同一円周上の点である．

方べきの定理より，

$$PI\cdot IQ=CI\cdot IN\qquad\cdots①$$

また，円 O において方べきの定理より，

$$PI\cdot IQ=AI\cdot IB\qquad\cdots②$$

①，②より，

$$CI\cdot IN=AI\cdot IB$$

$$IC=\frac{AI\cdot IB}{IN}\qquad\cdots③$$

円 O と円 O_2 についても同様に考えると，

$$ID=\frac{AI\cdot IB}{IM}\qquad\cdots④$$

③，④を(*)に代入すると，

$$\frac{AI\cdot IB}{IN}+IB=AI+\frac{AI\cdot IB}{IM}$$

両辺を $AI\cdot IB$ で割ると，

$$\frac{1}{IN}+\frac{1}{IA}=\frac{1}{IB}+\frac{1}{IM}$$

Q.E.D.

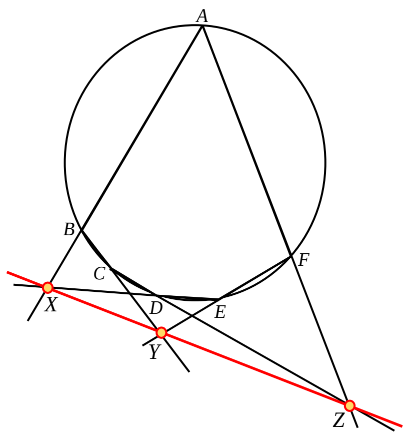
定理において， I を弦 AB の中点とすると， $IA=IB$ であるから，（ⅱ）より

$$IM=IN$$

よって，定理は，胡蝶定理を含んでいる．

⑻ パスカルの定理

> 円に内接する六角形 $ABCDEF$ において， AB と DE ，BC と EF ， CD と FA のそれぞれの交点を X,Y,Z とすると，この 3 点は一直線上にある



証明)

AB と CD の交点を P，AB と EF の交点を Q
CD と EF の交点を R とする．

三角形 PQR を横切る直線を考え，メネラウスの定理を用いる．

3点 D,E,X を通る直線に関して，

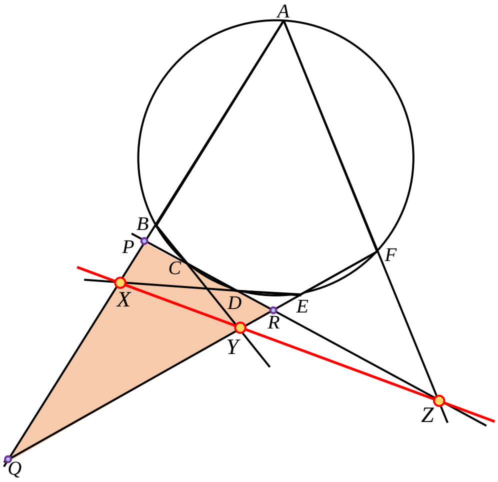
$$\frac{PX}{XQ}\cdot\frac{QE}{ER}\cdot\frac{RD}{DP}=1$$

3点 B,C,Y を通る直線に関して，

$$\frac{QY}{YR}\cdot\frac{RC}{CP}\cdot\frac{PB}{BQ}=1$$

3点 A,F,Z を通る直線に関して，

$$\frac{RZ}{ZP}\cdot\frac{PA}{AQ}\cdot\frac{QF}{FR}=1$$



三式を辺々かけて

$$\frac{PX}{XQ}\cdot\frac{QE}{ER}\cdot\frac{RD}{DP}\cdot\frac{QY}{YR}\cdot\frac{RC}{CP}\cdot\frac{PB}{BQ}\cdot\frac{RZ}{ZP}\cdot\frac{PA}{AQ}\cdot\frac{QF}{FR}=1$$

式の左辺を整理して

$$\frac{PX}{XQ}\cdot\frac{QY}{YR}\cdot\frac{RZ}{ZP}\cdot\frac{PB\cdot PA}{PC\cdot PD}\cdot\frac{QE\cdot QF}{QB\cdot QA}\cdot\frac{RD\cdot RC}{RE\cdot RF}=1 \quad \cdots(*)$$

ここで，方べきの定理より，

$$PB\cdot PA=PC\cdot PD \qquad QE\cdot QF=QB\cdot QA \qquad RD\cdot RC=RE\cdot RF$$

である．よって(*)より，

$$\frac{PX}{XQ}\cdot\frac{QY}{YR}\cdot\frac{RZ}{ZP}=1$$

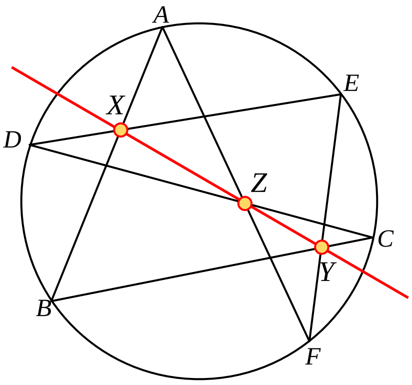
三角形 PQR と三点 X,Y,Z においてメネラウスの定理の逆により，
三点 X,Y,Z は一直線上にある．

Q.E.D.

この三点 X,Y,Z を通る直線をパスカル線という．
なお，円周上の点の配置を右図のように替え，
$A\to B\to C\to D\to E\to F\to A$ の順に結ぶと，円の内部に交点 X,Y,Z ができ，この場合もその3点は一直線上にある．前述の証明をそのまま辿っていけば同様に導かれることが分かる．

著名な哲学者でもあるパスカル(Blaise Pascal 1623-1662)は，この定理を16歳のときに著した「円錐曲線論」の中に記している．

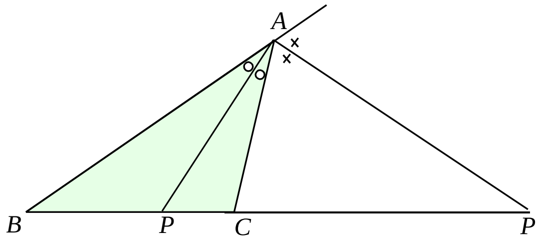
パスカルは，この理論をさらに発展させ，適当な射影平面を考えることで，円の性質は楕円や放物線でも保存されると考えた．
「円錐曲線に内接する六辺形の3組の対辺の3つの交点は1直線上にある」というパスカルの定理は射影幾何学の基本的な定理であり，パスカルはこの定理から400以上の図形の性質を導き出したといわれる．後世，その功績を称え，パスカルの六辺形は「神秘六辺形」とよばれた．(詳細は，拙著「メネラウスで三角形を巡る」にて)



○方べきの定理より得られる図形の性質

(1) 角の2等分線

> 三角形 ABC の頂角 A の二等分線と対辺 BC またはその延長との交点を D とすると，次式が成立する．
>
> $AP^2=|AB\cdot AC-PB\cdot PC|$



角の二等分線は，内角と外角の場合がある．
内角に二等分線の場合は，

$$AP^2 = AB \cdot AC - PB \cdot PC$$

外角の二等分線の場合は，

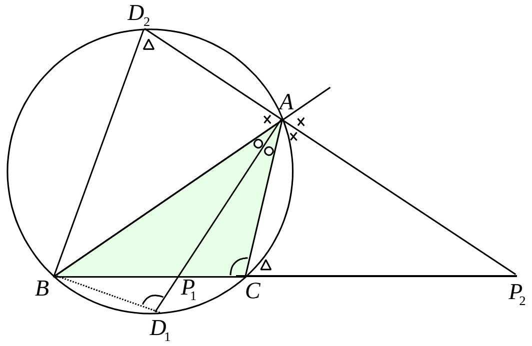
$$AP^2 = PB \cdot PC - AB \cdot AC$$

となる．

証明)

角 A の内角の二等分線と辺 BC の交点を P ，三角形 ABC の外接円との交点を D とする．

(図では $P = P_1, D = D_1$)　弧 AB の円周角から



$\angle ADB = \angle ACP$ より，$\Delta ABD \backsim \Delta APC$

よって，$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AP}{AC}$

$$AB \cdot AC = AD \cdot AP$$

$$\therefore \quad = (AP + PD)AP$$

$$= AP^2 + PD \cdot PA$$

ここで，方べきの定理より

$$AP \cdot PD = BP \cdot PC$$

であるから，

$$AP^2 = AB \cdot AC - AP \cdot PD = AB \cdot AC - BP \cdot PC$$

同様に外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を P ，三角形 ABC の外接円との交点を D とする．

(図では $P = P_2, D = D_2$)　補角の関係から，

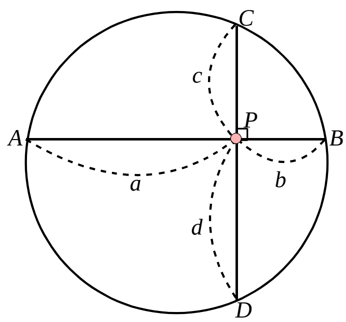
$\angle ADB = \angle ACP$ より，$\Delta ABD \backsim \Delta APC$

以下，内角の二等分線と同様に証明される．　　Q.E.D.

(2) 割線と円の半径

方べきの定理を用いて、円の内部の点 P を通る２つの弦の割線により円の半径を表現してみよう．

> 半径 r の円の２つの弦 AB, CD が点 P で直交している．
>
> $AP = a,\ BP = b,\ CP = c,\ DP = d$
>
> とすると，
>
> $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2$
>
> である．



証明)

点 C を通る直径の他の端点を E とすると
直径を弧とする円周角の性質より，

$\angle CAE = 90°$

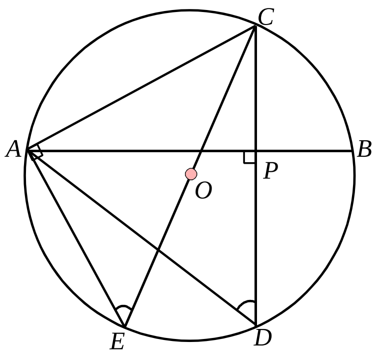
$\therefore \quad \angle CAE = \angle APD$　　……①

また，弧 AC の円周角より，

$\angle AEC = \angle ADC = \angle PDA$　……②

①，②より２角が等しいので，

$\Delta CEA \backsim \Delta ADP$



よって，

$AC : CE = PA : AD$

$\therefore \quad AC \cdot AD = CE \cdot PA$　　……③

三平方の定理より，

$AC^2 = AP^2 + PC^2 = a^2 + c^2$

$AD^2 = AP^2 + PD^2 = a^2 + d^2$

③に代入して，

$$\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+d^2}=2r\cdot a$$

両辺を平方して整理.

$(a^2+c^2)(a^2+d^2)=4r^2a^2$　より，$a^4+(c^2+d^2)a^2+c^2d^2=4r^2a^2$

$$a^2+c^2+d^2+\frac{c^2d^2}{a^2}=4r^2$$

ここで方べきの定理より，

$$AP\cdot PB=CP\cdot PD$$

$\therefore\quad ab=cd$　より　$b=\dfrac{cd}{a}$

以上より，　$a^2+b^2+c^2+d^2=4r^2$　　Q.E.D.

次のように証明することもできる.

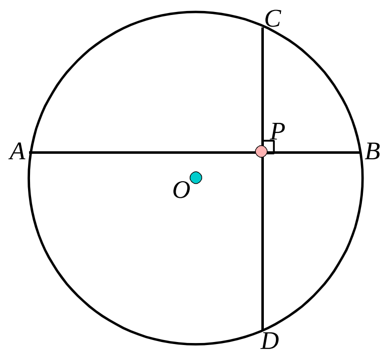
$\angle EDC=90^\circ$ と $AB\perp CD$ であることより，$AB/\!/ED$ であり，四角形 $AEDB$ は等脚台形である.
よって，$AE=BD$ であるから，

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+d^2&=\left(AP^2+PC^2\right)+\left(BP^2+PD^2\right)\\&=AC^2+BD^2\\&=AC^2+AE^2\\&=CE^2=(2r)^2\end{aligned}$$

ここに方べきの定理は用いられない.

次の性質も方べきの定理を用いずに証明することは可能であるが，解析幾何的手法に持ち込むのが方べきの定理の面白さである．式の右辺は点 P の方べきの値を証明に用いることを暗示している.

> 半径 r の円 O の２つの弦 AB , CD が点 P で直交している.
> このとき，
> $$AB^2+CD^2=8r^2-4OP^2$$
> が成立する.



証明)

$$\begin{aligned}AB^2+CD^2&=(AP+PB)^2+(CP+PD)^2\\&=(AP^2+2AP\cdot BP+BP^2)+(CP^2+2CP\cdot DP+DP^2)\\&=(AP^2+BP^2+CP^2+DP^2)+2(AP\cdot BP+CP\cdot DP)\end{aligned}$$

前述の性質より，

$$AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=4r^2$$

方べきの定理と点 P の方べきにより，

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD=r^2-OP^2$$

以上より，

$$\begin{aligned}AB^2+CD^2&=4r^2+4(r^2-OP^2)\\&=8r^2-4OP^2\end{aligned}$$

なお，上述の２つの性質より

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(a^2+c^2)+(b^2+d^2)=AC^2+BD^2$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(a^2+d^2)+(b^2+c^2)=AD^2+BC^2$$

２式を辺々加えて，

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2)=AC^2+AD^2+BC^2+BD^2$$

$a^2+b^2+c^2+d^2=4r^2$　より，

$$AC^2+AD^2+BC^2+BD^2=8r^2=AB^2+CD^2+4OP^2$$

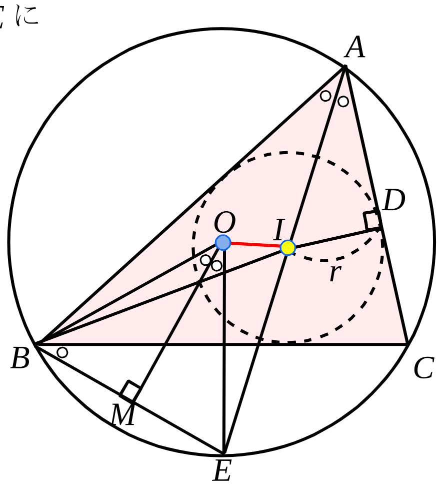
以上より，　$AB^2+CD^2+4OP^2=AC^2+AD^2+BC^2+BD^2$　　Q.E.D.

(3) 内心の方べき

方べきの値を与える次の性質はオイラーの定理と呼ばれるものである(オイラーのより 20 年前に，チャップルは独自に証明をしているため，チャップル-オイラーの定理ともいう)。

> 三角形 ABC の外接円の中心を O ，半径を R とし，内接心の中心を I ，半径を r とする．このとき，
> $$OI^2 = R^2 - 2Rr$$
> が成立する．

証明) 内心 I から辺 AC に下ろした垂線の足を D する．また内接円と辺 AC との接点を D とする。 AI と外接円との交点を E とし，外心 O から BE に下ろした垂線の足を M とする． $OB = OE = R$ より， ΔOBE は二等辺三角形であるから， M は線分 BC の中点である．



$$\angle MOE = \frac{1}{2}\angle BOE = \angle BAE$$

AE は $\angle BAC$ の二等分線より，

$$\angle CAE = \angle BAE$$

よって， $\angle MOE = \angle CAE = \angle DAI$

$\therefore\quad \Delta OME \backsim \Delta ADI$

これから

$OE : EM = IA : ID$ より， $EM \cdot IA = OE \cdot ID = Rr$

$EM = \dfrac{1}{2}EB$ より，

$IA \cdot EB = 2Rr$ ……①

また，方べきの定理およびその方べきの値より，

$IA \cdot IE = R^2 - OI^2$ ……②

次に， BI は $\angle ABC$ の二等分線より， $\angle IBC = \angle ABI$

EC の円周角および， AE が $\angle BAC$ の二等分線であることより，

$\angle CBE = \angle CAE = \angle BAE$ よって，

$$\begin{aligned}\angle IBE &= \angle IBC + \angle CBE \\ &= \angle ABI + \angle BAE \\ &= \angle BIE\end{aligned}$$

三角形 BEI は二等辺三角形であるから， $EB = IE$

①，②より，

$$\begin{aligned}2Rr &= EB \cdot IA \\ &= IE \cdot IA \\ &= R^2 - OI^2\end{aligned}$$

以上より，

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

Q.E.D.

この性質は，

$$IA \cdot IE = R^2 - OI^2 = 2Rr$$

より，円の内部の点についても方べきの定理で得られる一定数を方べきの値と考えれば，内心の方べきの値が $2Rr$ であることを表している．

(4) 円に内接する四角形の性質

> 円 O に内接する四角形 $ABCD$ がある． $AB \nparallel CD$, $AD \nparallel BC$ とし，直線 AB と CD ， AD と BC のそれぞれの交点を E, F とすると， 次式が成立する．
> $$EA \cdot EB + FA \cdot FD = EF^2$$

証明)

三角形CBEの外接円O_1と直線EFとの交点をGとすると，補角の性質より，

$\angle CGE = \angle ABC$

また円Oにおいて，

$\angle ABC = \angle CDF$

であるから，

$\angle CGE = \angle CDF$

よって， 4点C, G, F, Dは同一円O_2の周上の点である．

円O_2において方べきの定理より，

$EG \cdot EF = EC \cdot ED$ ……①

円Oにおいて方べきの定理より，

$EC \cdot ED = EB \cdot EA$ ……②

①，②より，

$EG \cdot EF = EB \cdot EA$ ……(*)

円O_1 において方べきの定理より，

$FG \cdot FE = FC \cdot FB$ ……③

円Oにおいて方べきの定理より，

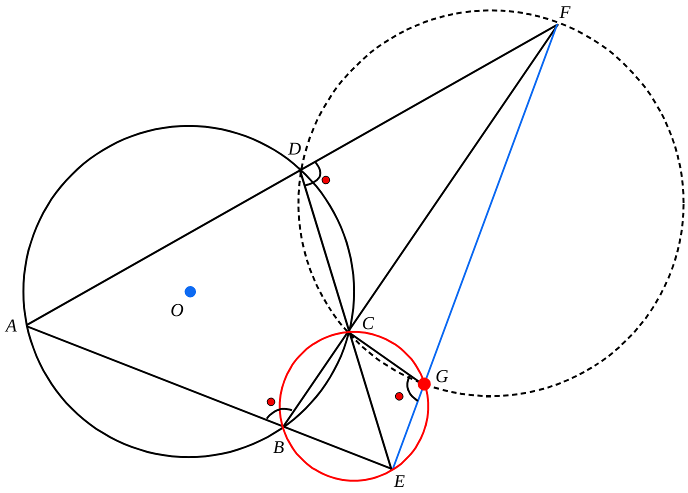
$FD \cdot FA = FC \cdot FB$ ……④

③，④より，

$FG \cdot FE = FD \cdot FA$ ……(**)

(*)，(**)より，

$$EB \cdot EA + FD \cdot FA = EG \cdot EF + FG \cdot FE$$
$$= (EG + FG)EF = EF^2$$



Q.E.D.

証明の過程より，

$EC \cdot ED + FC \cdot FB = EF^2$

も成立している．本定理はドイツの数学者 Jacobi が 1846 年にみつけたものである．
定理は，さらに次のように表現される．

> 円Oに内接する四角形$ABCD$がある． $AB \not\parallel CD,\ AD \not\parallel BC$ とし，直線ABとCD， ADとBCのそれぞれの交点E, Fから円Oに引いた接線の接点をP, Qとすると，
>
> $EP^2 + FQ^2 = EF^2$
>
> である．また， EFを直径とする円は，円Oと直交する．

証明)

円Oに関する方べきの定理より，

$EB \cdot EA = EP^2$

$FD \cdot FA = FQ^2$

辺々加えると，前述の性質より，

$EP^2 + FQ^2 = EB \cdot EA + FD \cdot FA = EF^2$ ……①

円Oの半径をrとすると，

$EP^2 = EO^2 - r^2$

$FQ^2 = FO^2 - r^2$

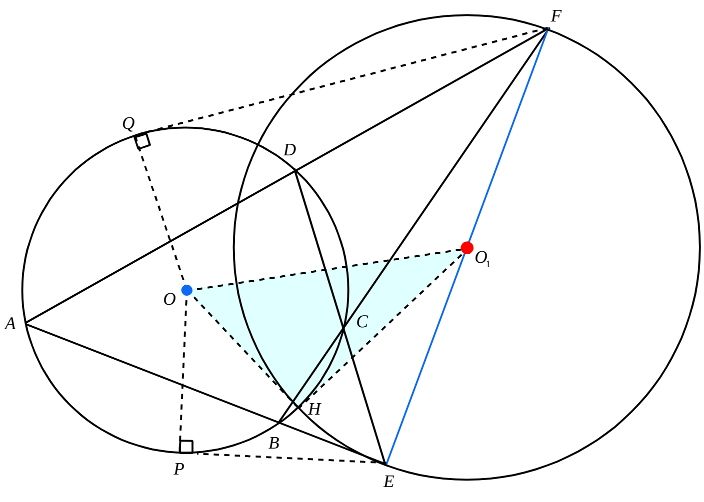
①より，

$EO^2 + FO^2 - 2r^2 = EF^2$ ……②

ここで，三角形OEFにおいて中線定理より，

$OE^2 + OF^2 = 2(OO_1{}^2 + O_1E^2)$

②に代入して，



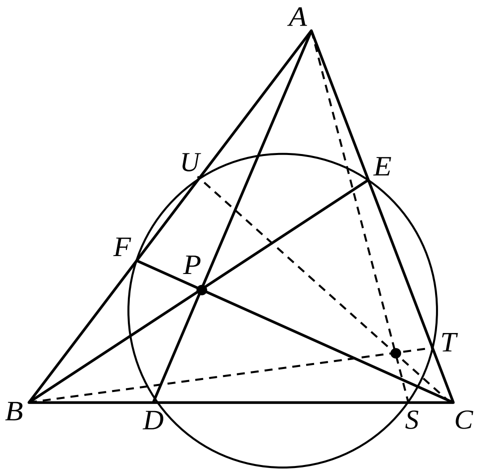
$$2(OO_1{}^2+O_1E^2)-2r^2=(2O_1E)^2$$
$$OO_1{}^2=r^2+O_1E^2$$
２円の交点の１つを H とすると，$O_1E=O_1H$ ，$r=OH$ であるから，
$$OO_1{}^2=O_1H^2+OH^2$$
∴　$\angle OHO_1=\angle R$　より，２円は直交する．

Q.E.D.

⑷ チェバの定理より得られる共点に関する性質

三角形 ABC の内部の点 P に対して，頂点 A,B,C と点 P を通る直線が頂点の対辺と交わる点をそれぞれ D,E,F とする．この３点を通る円が，三角形 ABC の辺 BC,CA,AB と交わる点をそれぞれ S,T,U とするとき，AS,BT,CU は１点で交わる．

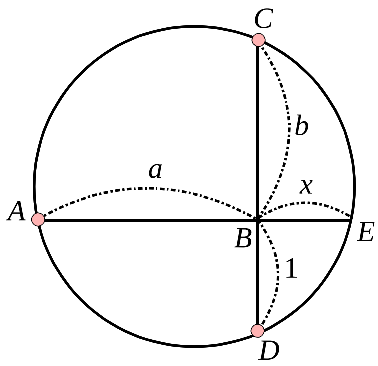
証明)



方べきの定理より，
$$AE\cdot AT=AU\cdot AF$$
$$BF\cdot BU=BD\cdot BS$$
$$CS\cdot CD=CT\cdot CE$$
３式を辺々掛けると，
$$AE\cdot AT\cdot BF\cdot BU\cdot CS\cdot CD=AU\cdot AF\cdot BD\cdot BS\cdot CT\cdot CE$$
整理すると，
$$\frac{CS}{SB}\cdot\frac{BU}{UA}\cdot\frac{AT}{TC}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\quad\cdots①$$
ここで，チェバの定理より，
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$
よって，①より，
$$\frac{CS}{SB}\cdot\frac{BU}{UA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$$
チェバの定理の逆により，AS,CU,BT は１点で交わる．

Q.E.D.

〇方べきの定理による２方程式の解の作図



一次方程式 $ax=b\ (a>0,b>0)$ の解を作図してみよう．

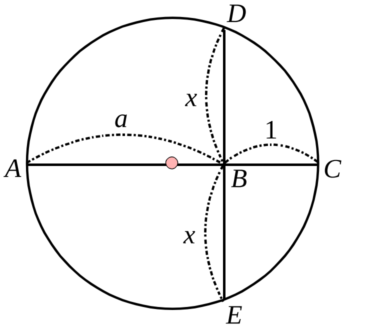
長さ a,b である線分を右図のように、$AB=a,\ BC=b$ として 2 つの線分を垂直につなぐ．

CB の延長上に $BD=1$ となるように点 D をとり，３点 A,C,D を通る円を描く．この円と直線 AB との交点を E とすると、BE の長さが方程式の解である．

なぜならば、方べきの定理より、
$$AB\cdot BE=CB\cdot BD$$
であるから、$BE=x$ とおくと、
$$ax=b\cdot 1=b$$
よって、$x=BE=\dfrac{b}{a}$ である．

このように、方べきの定理を用いることで、方程式の解を作図することができる．
２次方程式の解についても作図してみよう．以下、$a>0\,,b>0$ とする．

$x^2=a$ の解



$AB=a$ の延長上に、$BC=1$ となる BC をつなぎ、線分 AC を直径とする円を描く．AC に垂直で点 B を通る弦を DE とすると、解は $BD(=BE)$ である．これは、方べきの定理より、

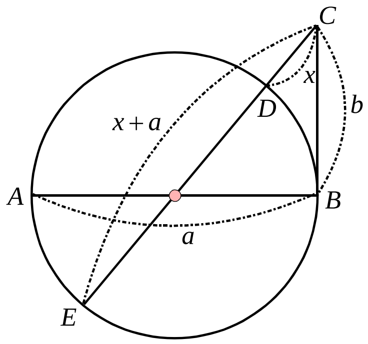
$$AB\cdot BC=BD\cdot BE$$

であることより、明らかである．
したがって、BD の長さは a の平方根 $\sqrt{a}$ である．

$x^2+ax-b^2=0$ の解

$$x(x+a)=b^2 \quad \cdots\cdots ①$$

とすることで、方べきの定理を使えることが予想できる．



$AB=a$ に $BC=b$ を垂直につなぎ、点 C と円の中心を通る直線が円と交わる点を D,E とすると、方べきの定理より、

$$CD\cdot CE=CB^2$$

ここで、$CD=x$ とすると、$CE=x+a$ より、①となる．
なお、ここで、$CE=x$ とすれば、$CD=x-a$ より、

$$(x-a)x=b^2$$

よって、方程式 $x^2-ax-b^2=0$ の正の解が得られる．

この 2 つの 2 次方程式のそれぞれの正の解は,

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \quad , \qquad x=\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$$

であり，図の CD,CE の長さで表される．
この 2 つの方程式の定数項 $(-b^2)$ は負の値であるから方程式の 1 つの解は正となり，解の作図は可能となる．では，負の解，あるいは虚数解はどのように作図すればよいか考えてみよう．

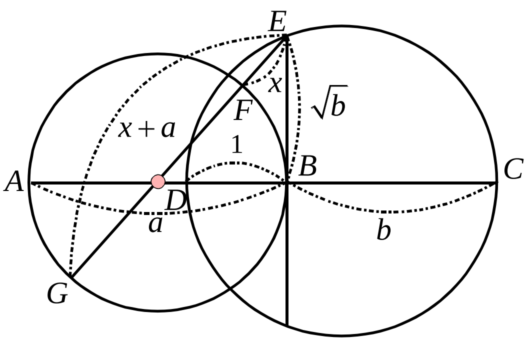
2 次方程式の一般形を，$x^2+ax+b=0$ とする．
a と b の値が，正または負の値の場合について考えればよい．($a=0$ または $b=0$ は除外する).
以下，$a>0$，$b>0$ とし，負の値は，$-a$，$-b$ として扱うことにする．

(A) $x^2+ax-b=0$ の解

2 次方程式の解は，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$ より、2 次方程式は正と負の 2 つの実数解をもつ．

$$x(x+a)=\left(\sqrt{b}\right)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

であることから方べきの定理の利用を考える．



$AB=a$ の延長に $BC=b$ をつないで線分 AC を作る．
線分 CB の延長に $BD=1$ となるように点 D をおく．
AC に垂直で点 B を通る直線を引き、この直線と、CD を直径とする円との交点を E とする．
方べきの定理より、

$$BC\cdot BD=BE^2$$

であるから、$BE=\sqrt{b}$ である．
次に、点 E から AB を直径とする円の中心を通る直線を引き、円との交点を図のように F,G とする．
このとき、$EF=x$ とすると、FG は円の直径より、$EG=x+a$ である．
方べきの定理より、

$$EF\cdot EG=EB^2$$

であるから①を得る．
なお、$EG=x$ とすると、$EF=x-a$ であるから、方べきの定理より、

$x(x-a)=b$

∴ EG は2次方程式 $x^2-ax-b=0$ の解であり，その正の解は,

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}=-\frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

これは，2次方程式(A)の負の解の絶対値である.

よって，2次方程式の2つの実数解は，EF と $-EG$ である.

(B) $x^2-ax-b=0$ の解

方程式の解は，$x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$ より，正の解と負の解をもつ．(A)の図より，

正の解は $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}=EG$ 負の解は $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}=-\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}=-EF$

これは，(A)の方程式で x を $-x$ に置き換えると(B)になることからも分かる.

(C) $x^2-ax+b=0$ の解

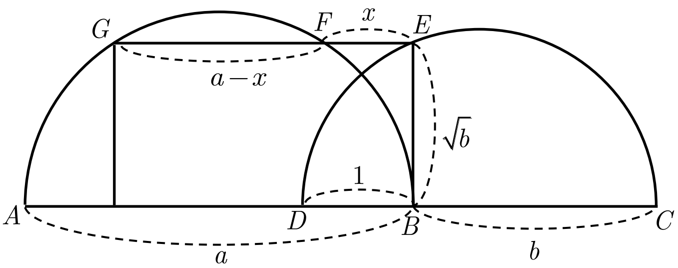
2次方程式の解は，$x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ である.

実数解をもつときは，$a^2\geqq 4b$ より，$\sqrt{b}\leqq\dfrac{a}{2}$．このとき2次方程式は，2つの正の解をもつ.

$$(a-x)x=\left(\sqrt{b}\right)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

であるから、まず $\sqrt{b}$ を方べきの定理で作図する.

$AB=a$ の延長に $BC=b$ をつないで AC を作り, (A)と同様に $\sqrt{b}$ を作る. 次に、点 E を通り AC に平行な直線と、AB を直径とする円との交点を点 E に近い方から順番に F ,G とする.



方べきの定理より、

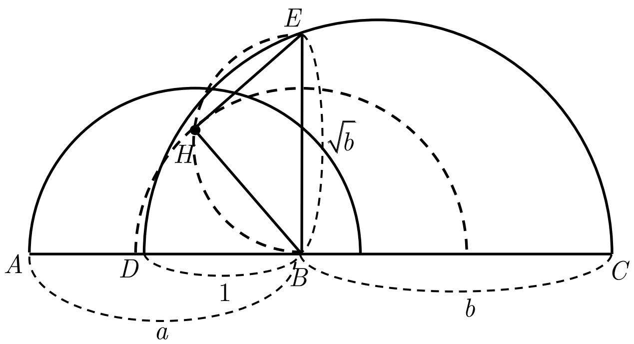
$$EF\cdot EG=EB^2$$

$EF=x$ とすると、$EG=a-x$ より、①を得る．このとき、EG は2次方程式のもう一つの解である.

次に，虚数解をもつ場合を考える．虚数解をもつ条件は，$\sqrt{b}>\dfrac{a}{2}$ である.

$BE=\sqrt{b}$ を作図後，BE を直径とする円弧と，点 B を中心として直径が a である円弧との交点を H とすると，$BH=\dfrac{a}{2}$ である.

$\angle BHE=90^\circ$ であるから三平方の定理より，



$$EH=\sqrt{BE^2-BH^2}=\sqrt{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

2次方程式(C)の虚数解は，$\sqrt{b}>\dfrac{a}{2}$ より，

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i=HB\pm HEi$$

すなわち，$\overline{HB}$ を実数軸，$\overline{HE}$ を虚数軸とみなした複素平面上でその解を表現することができる.

(D) $x^2+ax+b=0$ の解

2次方程式の解は，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ より，$a>0$,$b>0$ であることから，異なる2つの負の解か，2つの虚数解をもつ.

ここで，$x=-\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ であることから，(C)の図より，2 次方程式の解は次のようになる.

$a>2\sqrt{b}$ のとき，異なる負の解は，$-EF$,$-EG$

$a<2\sqrt{b}$ のとき，虚数解は，$-HB\pm HEi$

(A)～(D)により，2 次方程式のすべての解は作図できたことになる.
もう一つ，面白い値を得る 2 次方程式の解を作図してみよう.

$\boxed{x^2-x-1=0 \text{ の解}}$

長さ $AB=1$ の線分の端に垂直に長さ $BC=\dfrac{1}{2}$ の線分をつなぐ.

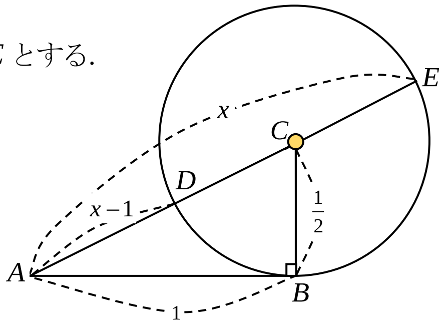
C を中心し、半径 CB の円を描き、直線 AC と円との交点を D,E とする.

$AE=x$ とおくと、$AD=AE-DE=x-1$　　方べきの定理より、

$AD\cdot AE=AB^2$

$\therefore$　$x(x-1)=1$ より，$x^2-x-1=0$

これより、$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$



正の解を考えると、$AE=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

黄金比の値が作図できたことになる.

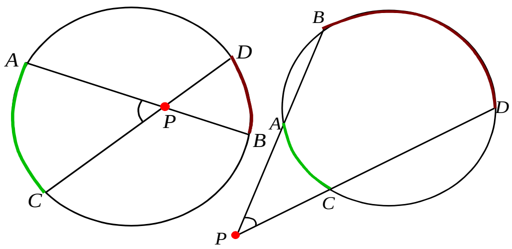
また，$AD=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ より，　　$ED:DA=1:\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}:1=AE:ED$

よって，点 D は線分 EA を黄金分割している.

○方べきの定理と似た定理　(アルハゼンの定理)

方べきの定理は，定点を通る直線が定円によって分割されるときの弦(割線)の比の性質である.
これに対して，定円の円周が定点を通る直線によって分割されるときの弧の比(円周角の比)の性質を表す定理がある.

> 定円の内部の点 P を通る 2 直線の弦 AB, CD に対して，$\angle APC$ は弧 AC と弧 BD の和の上に立つ円周角に等しく，定円の外部の点 P を通る 2 直線の弦 AB, CD に対して，$\angle APC$ は弧 AC と弧 BD の差の上に立つ円周角に等しい.



アルハゼン(965～1040 アラビアの数学者 *Ibn al-Haytham*)が見つけたこの定理は，方べきの定理と同様にその証明の容易さに加えて解析幾何的な色合いが強い.

証明)

点 P が円の内部の点であるとき，

弦 AB に平行で，点 D を通る弦を DE とする.

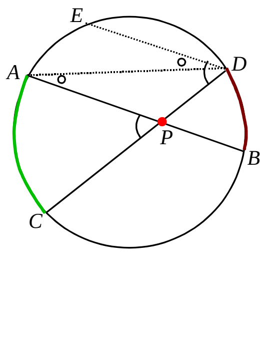
$AE=BD$ であるから，

$\angle BAD=\angle ADE$

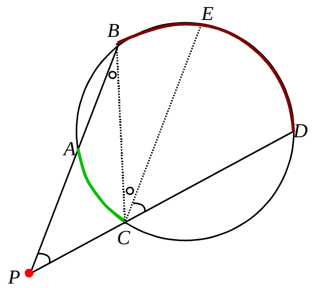
$\therefore$　$\angle CDA+\angle BAD=\angle CDA+\angle ADE=\angle CDE$

また，$ED//AB$ より，同位角は等しい. よって

$\angle CPA=\angle CDE$



次に，点 P が円の外部の点であるとき，$BD>AC$ とすると，
点 C を通り，弦 AB に平行な弦 CE に対して，

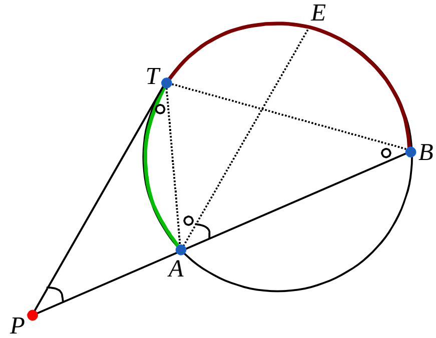


$AC = BE$ より， $\angle ABC = \angle BCE$
また， $BP // EC$ より同位角は等しいから，
$\angle BPD = \angle ECD$
$= \angle BCD - \angle BCE = \angle BCD - \angle ABC$

Q.E.D.

ここで，点 P から定円に引いた接線の接点を T とするとき，$\angle APT$ は，弧 BT と弧 AT の上に立つ円周角の差に等しい．

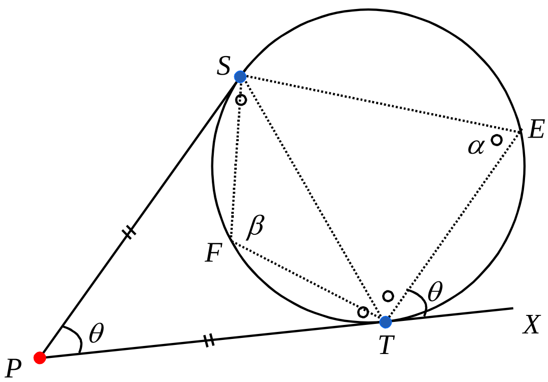
証明は上述の証明と同様に考え，PT に平行で点 A を通る弦を AE とすると，接弦定理より，
$\angle PTA = \angle ABT$
また，$PT // AE$ より錯角は等しいから，
$\angle PTA = \angle EAT$
よって， $\angle EAT = \angle ABT$
同位角は等しいから，
$\angle APT = \angle BAE$
$= \angle BAT - \angle EAT = \angle BAT - \angle ABT$



さらに，点 P から円に引いた２本の接線に対しては次の定理が成立する．

> 点 P から定円 O に引いた２本の接線の接点を S, T とすると， $\angle SPT$ は，円周が S, T によって分けられる優弧と劣弧の上に立つ円周角の差に等しい．

証明)
直線 PS に平行で点 T を通る弦を TE とする．
PT の延長上に点 X をとると，
$PS // TE$ より，同位角は等しいから，
$\angle ETX = \angle SPX = \theta$
$\angle SET = \alpha$ とすると，接弦定理により
$\angle PST = \angle SET = \alpha$
また， $PS = PT$ より，三角形 SPT は二等辺三角形より
$\angle PTS = \angle PST = \alpha$
$PS // TE$ であるから錯角より，
$\angle STE = \angle PST = \alpha$
$\therefore \quad \angle PTS = \angle STE = \angle PST = \alpha$
以上より
$\theta = \angle ETX$
$= 180° - \angle PTE$
$= 180° - (\angle PTS + \angle STE) = 180° - 2\alpha$



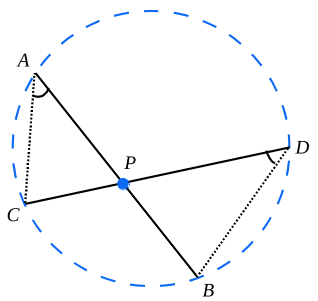
劣弧 ST 上の点を F とし， $\angle SFT = \beta$ とすると，
補角の関係より， $\alpha + \beta = 180°$ であるから，
$\theta = 180° - 2\alpha = (180° - \alpha) - \alpha = \beta - \alpha$
以上より， $\angle SPT$ は優弧 ST と劣弧 ST の上に立つ円周角の差に等しい．

Q.E.D.

なお，
$\theta = 180° - 2\alpha = 180° - 2(180° - \beta) = 2\beta - 180°$
より，
$$\beta = 90° + \frac{\theta}{2},\ \alpha = 90° - \frac{\theta}{2}$$
で与えられる．

2．方べきの定理の逆

> 線分 AB, CD またはその延長線が点 P で交わり，
> $$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
> が成り立つとき，４点 A, B, C, D は同一円周上の点である．



証明)

ΔAPC と ΔDPB において，

$\angle APC = \angle DPB$

(点 P が線分で交わるときには対頂角，延長で交わるときは共通角で等しい)

条件より，

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

よって，２辺の比とその間の角が等しいから，

$\Delta APC \backsim \Delta DPB$

$\therefore\quad \angle CAP = \angle BDP$

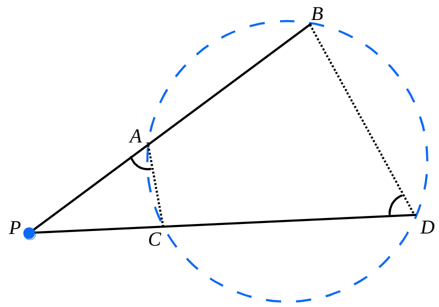
すなわち 点 P が線分上の点であるときは

$\angle CAB = \angle BDC$　より弧 BC に対する円周角は等しい．

点 P が延長上の点であるときは

四角形 $ABCD$ に対して $\angle CDB$ とその対角の外角は等しい．

以上より，４点 A, B, C, D は共円である．



Q.E.D.

方べきの定理の逆の証明の過程で，

「弦の上にたつ円周角が等しい」　…(a)

「四角形の対角は補角」　…(b)

といった共円であるための条件が使われるが，方べきの定理の逆から，これらの性質が共円の必要十分条件であることを示すことができる．

三角形 ABC の外接円 O と直線 PC との交点を E とすると，

方べきの定理より，

$PA \cdot PB = PC \cdot PE$

ここで，

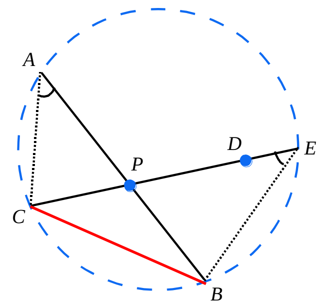
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

が成立するとき，

$PC \cdot PE = PC \cdot PD$

$PC \neq 0$ より，$PE = PD$

$\therefore$　点 E と点 D は一致するから４点 A, B, C, D は共円である．



このように，(a),(b)を用いずに，方べきの定理の逆を示すことができる．

したがって，前述の証明の過程から，

$\angle CAP = \angle BDP$

が得られるが，これは，

点 P が線分 AB 上の点であるとき，

$\angle CAB = \angle BDC$　(円周角が等しい)

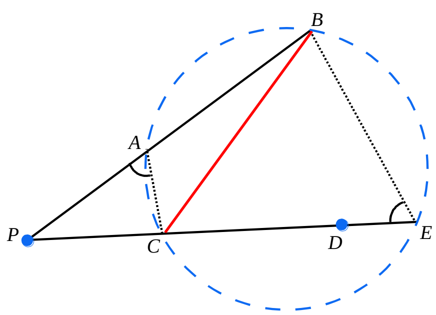
点 P が線分 AB の延長上の点であるとき，

$\angle CAP = \angle BDC$　(角とその対角の外角は等しい)

これより，

対角の和は $180°$（補角）

である．すなわち，(a),(b)は平面上の４点が共円であるための必要十分条件であることが分かる．



円の外部の点 P から引いた接線に対しても同様に次の方べきの定理の逆が成立する．

点 P を通る直線 ℓ 上の異なる２点を A, B とする．直線 ℓ 上にない点 T に対して，

$$PA \cdot PB = PT^2$$

が成り立つとき，直線 PT は三点 A, B, T を通る円の接線である．

証明)

条件より，$\dfrac{PA}{PT} = \dfrac{PT}{PB}$ であるから，

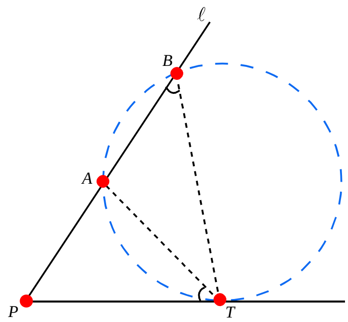
$$\Delta APT \backsim \Delta TPB$$

$\therefore \quad \angle ATP = \angle TBP$

よって，接弦定理の逆により，

PT は点 T を接点として，三点 A, B, T を通る円に接する．

Q.E.D.



○円周の五等分(正五角形の作図)

正五角形の中には、ピュタゴラス学派のペンタグランマに象徴されるように、黄金比が潜んでいる．右図の正五角形 $ABCDE$ において、台形 $ABCE$ にトレミーの定理を使うと、

$$AB \cdot CE + BC \cdot AE = BE \cdot AC$$

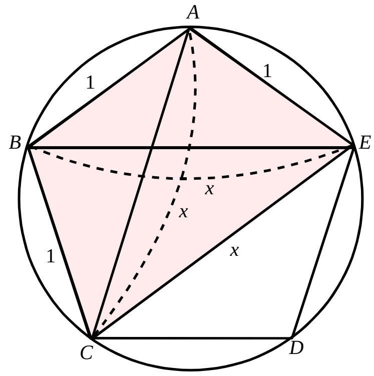
ここで、

$$AB = BC = AE = 1, \quad BE = AC = CE = x$$

とおくと、

$$x + 1 = x^2 \quad より、 x^2 - x - 1 = 0$$

$x > 0$ であるから、$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



対角線に黄金比がみつかる．

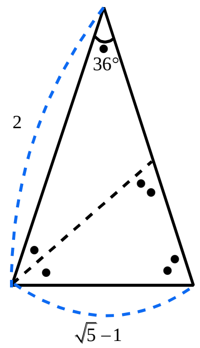
この黄金比をどのように引き出すかによって正五角形の種々の作図法が考えられる．その方法の多くは、正十角形を作図し、頂点を一つ置きにとる方法である．

円に内接する正十角形の辺(弦)の中心角は $36°$ であり、円の半径を２とするとき、正十角形の１辺の長さは、

$$2 : x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$$

これより、$x = \dfrac{4}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5} - 1$

この長さを、辺の長さの比が $1 : 2 : \sqrt{5}$ である直角三角形を利用して、切り出すことになる．

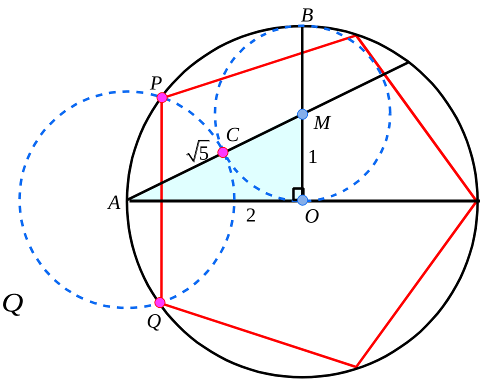


右図のように、中心 O である円の円周上に、$OA \perp OB$ となる２点 A, B を取り、OB を直径する円を描く．この円の中心を M とし、線分 AM と円との交点を C とすると、前節「方べきの定理による２次方程式の解法」で触れたように、

$$\frac{AC}{AO} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

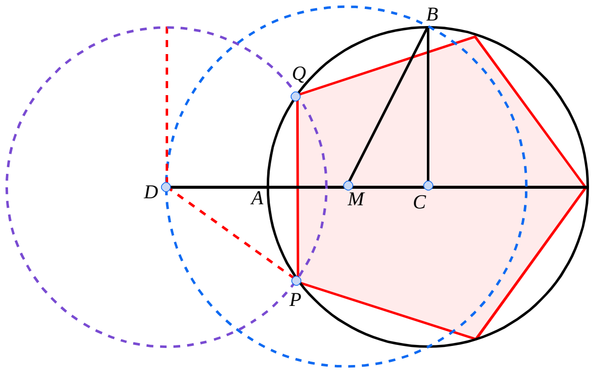
である．

よって、点 A を中心し、半径 AC の円と、円 O との２交点を P, Q とすると、$AP = AQ$ は正十角形の１辺であり、PQ は正五角形の１辺である．



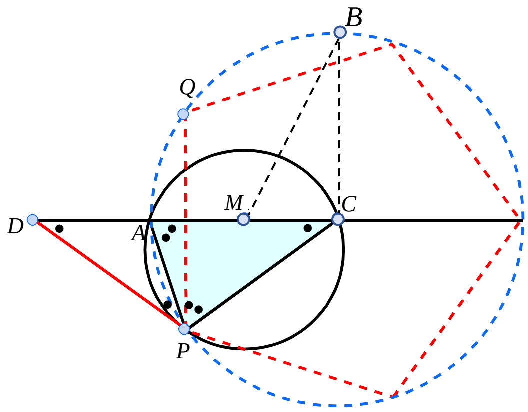
この作図法は、辺の長さをあらかじめ調べることで成立するものであるが、方べきの定理の逆を用いることで円周の等分による作図ができる．手順を示そう．

①円 C を適当に描き、$CA\perp CB$ である半径 CA, CB を作図する.
②AC の中点 M を中心とし、MB を半径とする円と、CA の延長との交点を D とする.
③D を中心とし、半径が AC である円と、円 C との２交点を P, Q とする.
④弧 PQ の長さで円 C の円周を五等分する.



この手順で正五角形が作図できることを証明しよう.
$AM=CM$, $MD=MB$ であることから、

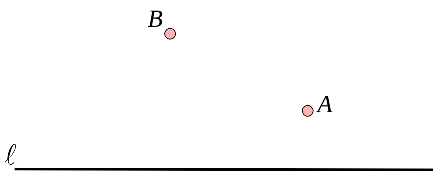
$$
\begin{aligned}
DA\cdot DC &= (DM-AM)(DM+MC)\\
&= (DM-MC)(DM++MC)\\
&= DM^2-MC^2\\
&= MB^2-MC^2=BC^2
\end{aligned}
$$



ここで、$BC=DP$ より、
$DA\cdot DC=DP^2$
よって、方べきの定理の逆により、
三角形 APC に外接する円に対して、DP は点 P を接点とする円の接線である.
よって、接弦定理より、
$\angle DPA=\theta$ とすると、$\angle PCA=\angle DPA=\theta$
また、$DP=CP$ より、$\angle ADP=\angle PCA=\theta$
これから、$\angle PAC=\angle DPA+\angle ADP=2\theta$
$CA=CP$ より、
$\angle CPA=\angle PAC=2\theta$
よって、三角形 CAP の内角の和は、
$\angle CAP+\angle APC+\angle PCA=2\theta+2\theta+\theta=5\theta$
$\therefore\ 5\theta=180^\circ$ より、$\theta=36^\circ$ である.
$\therefore\ \angle PCQ=2\angle PCA=72^\circ$
中心角が 72° である弦を１辺とする正多角形は、正五角形である.

○円の作図

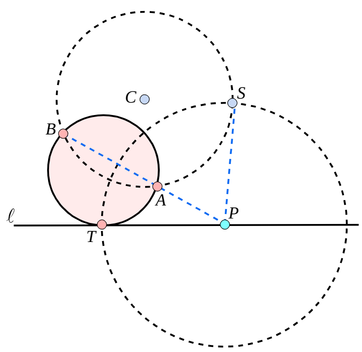
方べきの定理の逆を用いると，次のような円の作図が可能となる.



作図 1）２定点 A, B を通り，直線 ℓ に接する円を作図せよ.

手順は次の通り.

①直線 AB と直線 ℓ との交点を P を求める.
②２点 A, B を通る適当な円 C を描く.
③点 P から円 C に引いた接線の接点を S とする.
④点 P を中心とし，半径 PS である円と直線 ℓ との交点のひとつを T とする.
⑤3 点 A, B, T を通る円を描く.



【解説】

直線ℓが接線となるように，円の接点Tが作図できればよい．

ABを弦とする適当な円Cに点Pから引いた接線の接点をSとすると，方べきの定理より，

$PA \cdot PB = PS^2$

が成立する．　次にPを中心とする半径PSの円を描き，点Sを直線ℓ上の点Tに移すと，

$PA \cdot PB = PT^2$

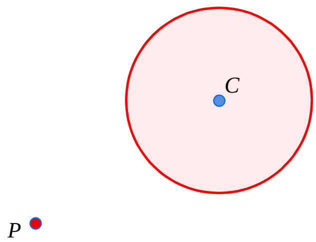
が成立する．ここで，A, Bは求める円周上の点であるから，方べきの定理の逆により，PTを接線とする円が描けることになる．

なお，点Pから円Cに引いた接線は，線分PCを直径とする円と円Cとの交点が接点Sであることより求められる．

方べきの定理の逆を用いて，もう少し複雑な作図に挑戦してみよう．

作図 2）定点Pを通り，定円Cに外接する円を作図せよ．

①点Pを通る直線PXを引く．
②直線PXに点Pで接し，定円Cと異なる２点で交わるような円Dを適当に描く．
③定円Cと円Dの交点Q, Rを通る直線と直線PXとの交点をAとする．
④線分ACを直径とする円Eを描く．
⑤定円Cと円Eとの交点をTとする．
⑥点Pを通りPXに垂直な直線と直線CTとの交点をFとする．
⑦点Fを中心とし，FPを半径とする円を描く．



【解説】

求める円Fと定円Cが外接するときの接点Tが作図できればよい．

接点Tが求められたとする．

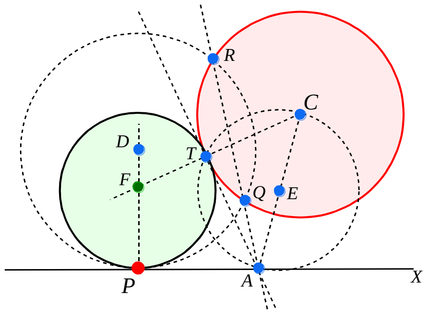
①，②．③より得られる点Aに対して，方べきの定理より，

$AQ \cdot AR = AT^2 = AP^2$

方べきの定理の逆により，P, Q, Rを通る円は，点Pで直線PXに接することが分る．

④，⑤により，定点Aから円Cに接線を引き，接点Tを求める．

⑥，⑦により，求める円の中心と半径を求め，円Fを描く．



作図２の⑤において２円のもう一つの交点をSとすると，点Sは点Pを通り定円が内接する円の接点である．

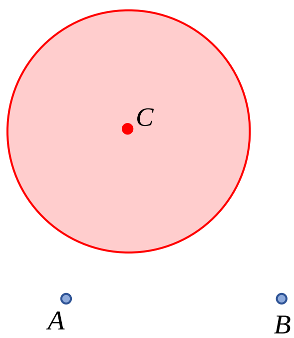
なお，この作図では，直線PXは接線になるから，「定直線と定円に接する円」の作図と考えてもよい．

ところで，作図２の条件を満たす円は無数に存在するが，この作図法はその中の１つの円を求めるものである．円が限定される問題の作図を考えてみよう．

作図 3）　2 定点A, Bを通り，定円Cに接する円を作図せよ．

手順は次の通り

①２点A, Bを通り円Cと２点で交わる適当な円Oを描く．
②円Cと円Oの交点を通る直線と直線ABとの交点をPとする．
③点Pから円Cに２本の接線を引き，それぞれの接点をS, Tとする．
④３点A, B, S（A, B, T）を通る円を描く．



【解説】

点 P から円 O に引いた 2 直線 AB , EF に対して方べきの定理より，

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF \quad \cdots(*)$$

が成立する．

また，2 点 A , B は作図する円の円周上の点でもあるから，方べきの定理より，

$$PA\cdot PB=PS^2=PT^2 \quad \cdots(**)$$

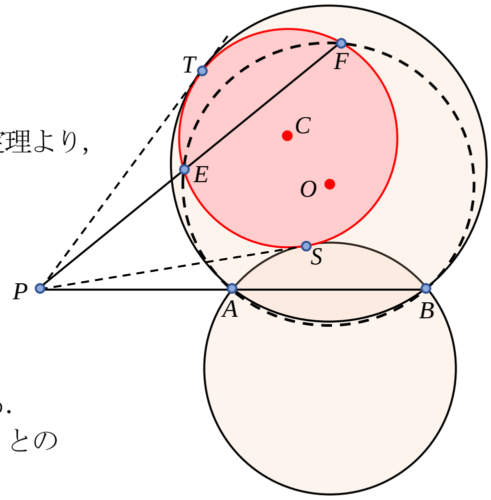
よって，(*),(**)より，

$$PE\cdot PF=PS^2=PT^2$$

これから，方べきの定理の逆により，

3 点 E , F , S (E , F , T)は同一円周上(すなわち円 C 上)の点であり，

かつ S (T) はその円に点 P から引いた接線の接点である．



右図で，円 C と外接する円の接点は S ，内接する円の接点は T である．

その円の中心は線分 AB の垂直二等分線上にあることより直線 CS ， CT との交点から求められる．

なお，作図 2 は，定点を A とし点 B を任意にとったものである．

方べきの定理を用いた円環(アルベロス)図形の円の作図を試みてみよう．

作図 4)　半円 C の直径 AB 上に点 P がある．直径 AB に垂直な点 P を通る直線を ℓ とするとき，半円 C と直線 ℓ に接する円を作図せよ．

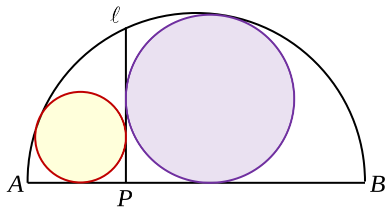
手順は次の通り

①直線 ℓ と円との交点を Q とする．線分 AB 上に AQ と同じ長さの線分 AD をとる．

② AB に垂直で点 D を通る直線 g を引く．

③直線 g 上に $DO=DP$ である点 O をとる．

④中心 O ，半径 OD である円を描く．



【解説】

図の２つできる円のうち，大きい円について考えてみよう．

円 O の作図ができたとする．

円 O と直径 AB ，直線 ℓ ，円 C の弧との接点をそれぞれ D,E,F とする．

ここで， $\angle AFB$ は，円 C および円 O の直径を弦とする円周角であるから，

3 点 A , E , F は一直線上にある．

円 O において方べきの定理より，

$$AE\cdot AF=AD^2 \quad \cdots(a)$$

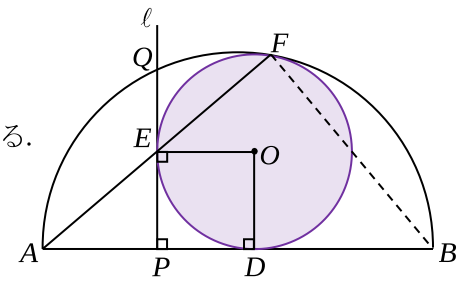
$\angle BFE=\angle EPB=90^\circ$ より，4 点 B , P , E , F は同一円周上の点である．

方べきの定理より，

$$AE\cdot AF=AP\cdot AB \quad \cdots(b)$$

(a),(b)より，

$$AP\cdot AB=AD^2 \quad \cdots(c)$$



また， $\angle BPQ=90^\circ$ より，三角形 BPQ は BQ を直径とする円に内接する．方べきの定理より，

$$AP\cdot AB=AQ^2 \quad \cdots(d)$$

(c)，(d)より，

$$AD^2=AQ^2 \quad \text{すなわち } AD=AQ$$

これで直径 AB と，円 O との接点は求められる．

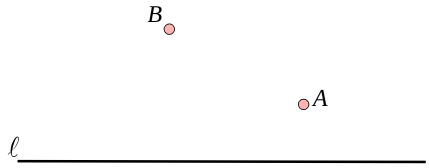
また PD が円 O の半径であることは明らかである．

同じように考えて小さい方の円についても作図すればよい．

○最大・最小問題

円の作図１は，ユニークなパズルの問題としてしばしば扱われている.

問題) 次の条件を満たす直線ℓ上の点Pをそれぞれ求めよ.
(1) $AP+PB$が最小となる点P
(2) $\angle APB$が最大となるような点P

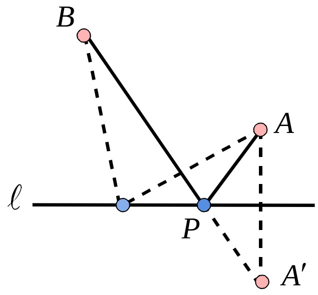


(1) 反射の原理を用いた問題である. 点Aの直線ℓに関する対称点をA'とすると，

$\Delta APA'$は二等辺三角形であるから，

$AP+PB=A'P+PB \geqq A'B$

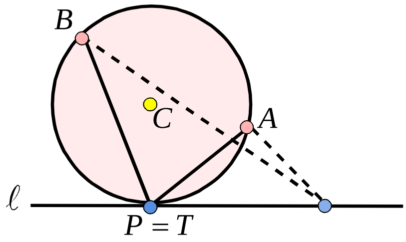
よって，直線$A'B$と直線ℓとの交点が求める点Pである.



(2) 2点A, Bを通り，直線ℓ上の点Tで接する円Cを作図する.
点Pが直線ℓ上を動くとき，点T以外の点はすべて円の外部の点である.
よって円周角の性質より，

$\angle APB \leqq \angle ATB$

であるから，点Pが接点Tに一致するとき，
$\angle APB$は最大角となる.
したがって，前述の作図１により，接点を求めればよい.



これをパズル的な出題にすると次のようになる.

壁に縦幅180 cmの絵が飾ってある.
壁に垂直な目線が，絵の下端から 60cm 下にある人が近づいて絵をみるときどの位置でみるのが一番いいだろう？

正解)
絵の見込みの角が最大となればよい.
壁に垂直な目線を表す直線ℓと壁との交点をHとする.
また，絵の上端，下端をそれぞれA, Bとすると，

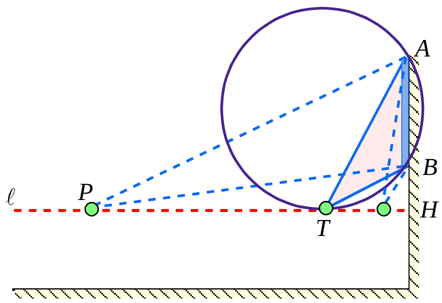
$AB=180,\ BH=60$

である.
２点A, Bを通り, 直線ℓに接する円を描くとその接点Tが求める位置である. 方べきの定理より，

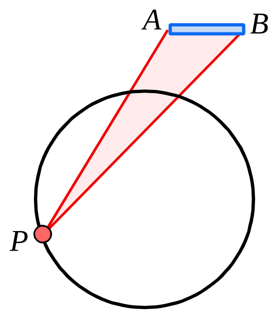
$HT^2=HA \cdot HB=(180+60)\times 60=14400$

$\therefore\ HT=120$

よって，壁から 120ｃｍ離れた位置がベストポジションである.
(中世ドイツの天文学者であるレギオモンタヌスが考案した問題である)



メリーゴーランドに乗っている子どもが，軌道円の外の壁に貼ってある目線の高さのポスターを見るとき，どの位置でみるのが一番いいだろうか?



ポスターの横幅をAB，円周上の点をPとするとき，ABを見込む角$\angle APB$の最大値を求めればよい.
定円をCとする．二点A, Bを通り定円Cと２点で交わる円Dを描く.
円Cと円Dの交点をE, Fとする.
直線ABと直線EFの交点をSとし，Sから円Cに引いた２接線のうちABに近い側にある接点をTとする.

円Cにおいて方べきの定理より，

$SE \cdot SF = ST^2$　……①

円Dにおいて方べきの定理より，

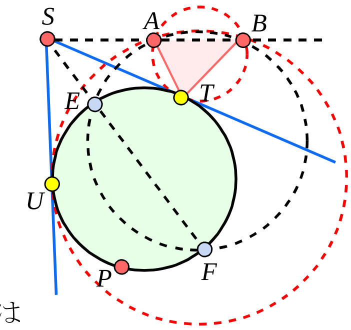
$SA \cdot SB = SE \cdot SF$　……②

①，②から

$SA \cdot SB = ST^2$

よって方べきの定理の逆により，3点A, B, Tは同一円周上の点である．

A, Bを通り点Tを接点とする円Gが描く(すなわち作図3).

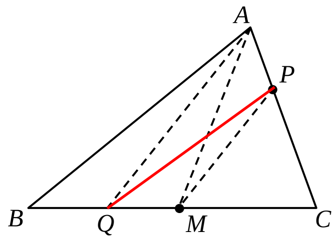


このように点Tを求めれば，円周角の性質より，円C上の点は，点T以外はすべて円Gの外部の点であるから，$\angle ATB$の見込む角度は最大となる．

以上より，円Cの2点A, Bを通る外接円Gの接点Tでポスターをみるのが一番いいということになる．

なお, 円Cを内接する2点A, Bを通る円G(接点U)も同様に作図することができるが, 円C上の点で，点U以外はすべて円Gの内部の点である。すなわち，円Cの円周上の点でA, Bを見込む角の最小となる角が$\angle AUB$であり，ポスターが最も見えにくい場所ということになる．

○図形の面積等分の作図



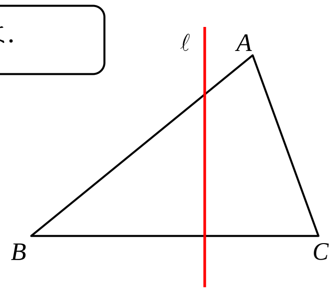
「右図において，三角形の面積を点Pを通る直線で二等分せよ」

この問題もパズルでは頻出である．

解答は，BCの中点をMとするとき，PMに平行で頂点Aを通る直線で図形を切ると面積は二等分される．

この三角形の面積等分を次のようにするとどうなるだろうか．

> 三角形ABCの面積を辺BCに垂直な直線で二等分するような直線を作図せよ．



手順は次の通り．

> ①辺BCの中点をMとし，頂点Aから対辺に引いた垂線とBCとの交点をHとする．
> ②線分MHを直径する円Oを描く．
> ③点Bから円Oに引いた接線の接点をTとする．
> ④辺BC上に$BQ = BT$である点Qをとる．
> ⑤辺BCに垂直で点Qを通る直線を引く．

解説) $BM = a,\ BH = b$とする．面積の二等分線が引けたとして，

AB, BCとの交点をP, Qとし，$BQ = x$とすると，

$\Delta ABH \backsim \Delta PBQ$より，

$$\Delta ABH : \Delta PBQ = b^2 : x^2 \quad \cdots ①$$

また，$\Delta ABH : \Delta ABM = b : a$

ここで，$\Delta ABM = \Delta PBQ$より，

$$\Delta ABH : \Delta PBQ = b : a \quad \cdots ②$$

①，②より，$b^2 : x^2 = b : a$ であるから，

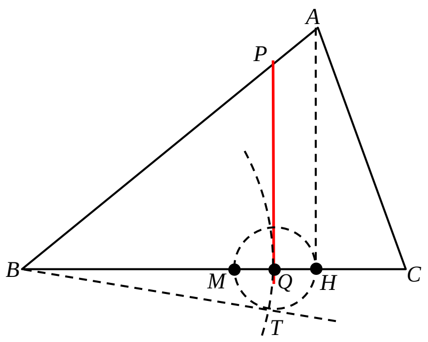
$$x^2 = ab$$

よって，$x = \sqrt{ab}$

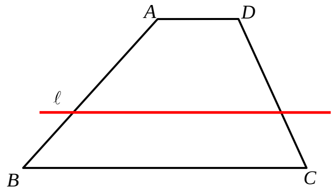
すなわちaとbの相乗平均の値が作図できればよい．

方べきの定理より，

$$BT^2 = BM \cdot BH = ab$$



であるから手順の作図となる.



> 図の台形 $ABCD$ の面積を辺 BC に平行な直線で二等分するとき，その直線を作図せよ.

手順は次の通り.

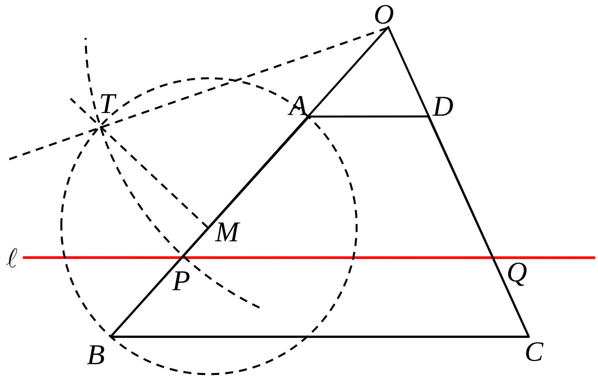
> ① 直線 AB と CD の交点 O を求める。
> ② 線分 AB を直径とする円を描く.
> ③ AB の中点(円の中心)を通り AB に垂直な直線との交点 T を求める.
> ④ 辺 AB 上に $OT=OP$ である点 P をとる.
> ⑤ 点 P を通り，辺 BC に平行な直線を引く.

解説) 四角形の面積の二等分線する線分を PQ とする.

$OA=a, OB=b$， $OP=x$， $S=\Delta OAD$ とする.

$\Delta OAD \backsim \Delta OPQ \backsim \Delta OBC$

であることより，



$$\Delta OPQ=\left(\frac{x}{a}\right)^2 S,\quad \Delta OBC=\left(\frac{b}{a}\right)^2 S$$

よって，四角形 $APQD$ の面積 S_1 は

$$S_1=\Delta OPQ-\Delta OAD=\frac{x^2}{a^2}S-S$$

四角形 $PBCQ$ の面積 S_2 は,

$$S_2=\Delta OBC-\Delta OPQ=\frac{b^2}{a^2}S-\frac{x^2}{a^2}S$$

$S_1=S_2$ より，

$$\frac{x^2}{a^2}S-S=\frac{b^2}{a^2}S-\frac{x^2}{a^2}S \qquad \text{これから} \quad x^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

$\therefore \quad x=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ すなわち，a と b の二乗平均の作図が出来ればよい.

AB の中点を M とすると，$OM=\dfrac{a+b}{2}$，$MT=\dfrac{b-a}{2}$ であるから,

$$OT^2=OM^2+MT^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

○フォイエルバッハの定理

定点と円周上の点を結ぶ線分を一定の比に分ける点の軌跡(パンタグラフ問題)は方べきの定期の逆を用いて求めることができる.

> 中心 O，半径 r の円の円周上の点 P と定点 A を結ぶ線分の中点の軌跡は，AO の中点を中心とする半径 $\dfrac{r}{2}$ の円である.

証明)

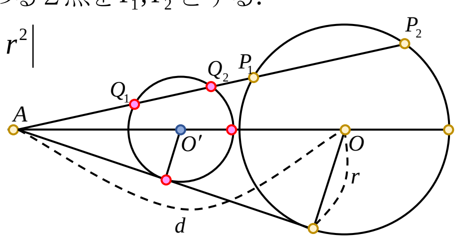
定点 A (円の内部または外部)を通る直線が定円 O と交わる2点を P_1, P_2 とする.

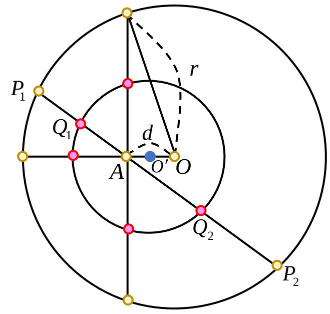
$AO=d$ とおくと，方べきの定理より，$AP_1\cdot AP_2=\left|d^2-r^2\right|$

AP_1, AP_2 の中点をそれぞれ Q_1, Q_2 とすると，

$AP_1=2AQ_1$, $AP_2=2AQ_2$ より

$AQ_1\cdot AQ_2=\left|d^2-r^2\right|$



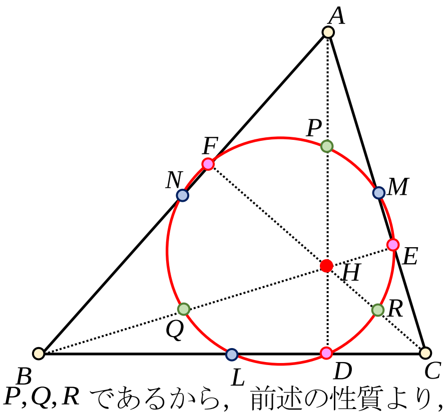


$$\therefore \quad AQ_1 \cdot AQ_2 = \left| \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right|$$

よって，方べきの定理の逆により，Q_1, Q_2 の軌跡は，円を描く．

また，円の中心が AO の中点 O'，半径は $\dfrac{r}{2}$ であることは，明らかである．

この性質を利用して平面幾何でもっとも美しくといわれる９点円の定理を証明することができる．



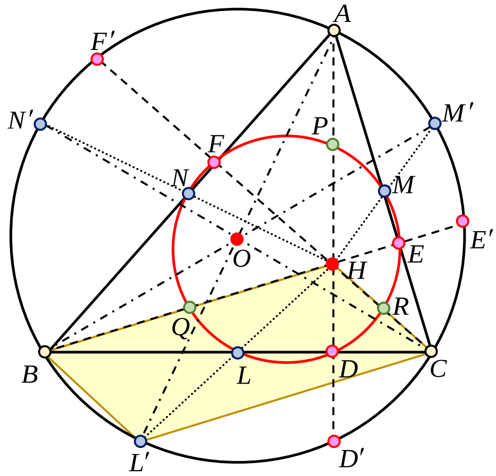
> 三角形 ABC の頂点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とし，垂線の交点を H とする．AH, BH，CH の中点をそれぞれ P, Q, R とする．
> 辺 BC, CA, AB の中点を L, M, N とする．
> このとき，この９点 $D, E, F, K, L, M, P, Q, R$ は同一円周上の点である．

証明)

三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r とする．

垂心 H と三角形の各頂点 A, B, C を結ぶ線分の中点はそれぞれ P, Q, R であるから，前述の性質より，

P, Q, R は半径 $\dfrac{r}{2}$ の円周上の点である．残りの６点がこの円周上にあることを示す．



AO, BO, CO の延長が外接円と交わる点をそれぞれ L', M', N' とすると

AL', BM', CN' は円 O の直径である．

$\angle L'BA = 90°$ で，$AB \perp CF$ より，

$BL' // HC$

$\angle L'CA = 90°$ で，$BE \perp CA$ より

$L'C // BH$

したがって，四角形 $BL'CH$ は平行四辺形である．

よって，対角線 BC と HL' は互いに他を二等分するからその交点は

BC の中点 L であり，L は HL' の中点である．

同様に，HM', HN' の中点はそれぞれ M, N である．

次に，垂線 AD, BE, CF の延長と外接円との交点をそれぞれ

D', E', F' とする．

$\angle L'D'A = 90°$ で，$BC \perp AD$ より

$LD // L'D'$．

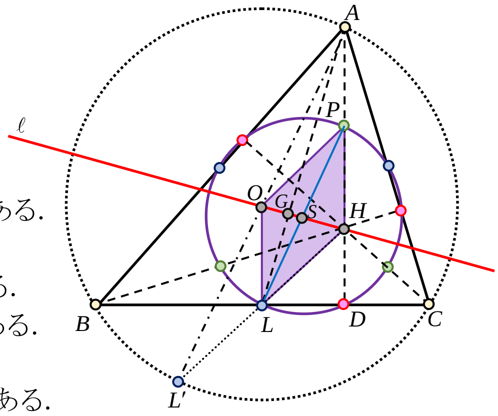
$HL = LL'$ より，HD' の中点は点 D である．

同様に，HE', HF' の中点はそれぞれ点 E, F である．

以上より，$A, B, C, L, M, N, P, Q, R$ は同一円周上の点である．

ここで，$\angle LDP = 90°$ であるから，PL は円の直径である．

この円を三角形 ABC の９点円という．



９点円の中心の性質を調べてみよう．

L は HL' の中点であった．また O は外心より，AL' の中点である．

よって，$\Delta AL'H$ において，AL, OH は中線よりその交点 G は重心である．

$\therefore \quad OG : GH = 1 : 2$，$AG : GL = 2 : 1$

AL は三角形 ABC の中線でもあるから，G は三角形 ABC の重心である．

以上より，三角形 ABC の外心 O，重心 G，垂心 H は一直線上にある．

この直線を三角形のオイラー線という．

また，L は辺 BC の中点であるから，L の垂直二等分線上に外心 O がある．

よって，$OL // AH$

$\Delta AL'H$ において，$AO = OL'$ であるから中点連結定理により，

$AH = 2OL$

点 P は AH の中点であるから，

$OL = \dfrac{1}{2}AH = PH$

よって，四角形 $OLHP$ は平行四辺形である．

したがって，対角線 OH と PL は互いに他を二等分する．

９点円の中心は直径 PL の中点 S であったから，S は直線 OH，すなわちオイラー線上の点であり，

$OS : SH = 1:1$

$OG : GH = 1:2$

であるから，

$OG : GS : SH = 2:1:3$

である．

この９点円は別名フォイエルバッハの円ともいう．

カール・フォイエルバッハ(K.Feuerbach:ドイツ)は，著名な青年ヘーゲル派の雄である哲学者フォイルエバッハを兄にもつ数学者であるが，彼が発見した９点円に関する性質「フォイエルバッハの定理」は平面幾何の性質で最も美しく，その証明は緻密かつ巧妙であり，方べきの定理の逆は重要な役割を演じている．

$\boxed{\text{三角形の９点円は，三角形の内接円，傍接円に接する．}}$

内接円の場合を証明しよう．１本の補助線 ℓ を引くことにより，性質が浮かび上がってくる．

証明)

三角形 ABC が $AB = AC$ である二等辺三角形の場合は，BC の中点で９点円と内接円が接するのは明らかである．よって，$AB > AC$ の場合について証明すればよい．

頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線の足を D とする．

BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とする．

内接円の中心を I とし，内接円と BC との接点を S とし，直 AI と BC との交点を E とする．

ここで，頂点 C を通り，AI に垂直な直線 ℓ を引き，AI との交点を H，AB との交点を F とする．

この補助線から得られる次の性質を証明する。

(a) $\angle LHE = \angle HDE$

(b) $LS = LH$

(c) $\angle DNL = \angle FEB$

(a)の証明

AI は $\angle BAC$ の二等分線より，三角形 AFC は $AF = AC$ である二等辺三角形である．

H は CF の中点，L は BC の中点より，ΔBCF において中点連結定理により，

$BF \,//\, LH$ ……①　　　$LH = \dfrac{1}{2}BF$ ……②

①より，$\angle BAE = \angle LHE$ （同位角）

AI は $\angle BAC$ の二等分線より，

$\angle BAE = \angle CAE$.

よって，$\angle LHE = \angle CAE$ ……③

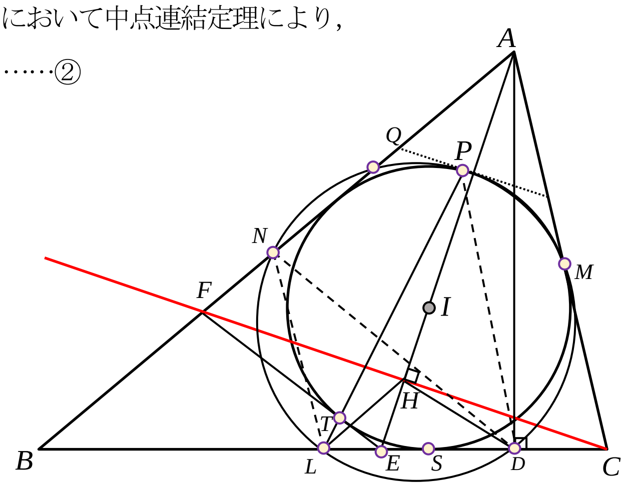
ここで，$\angle ADC = \angle AHC = 90°$ より，

直径 AC で中心 M である円は，四角形 $AHDC$ の外接円である．よって，

$\angle HDE = \angle CAH = \angle CAE$ ……④

③，④より，

$\angle LHE = \angle HDE$



(b)の証明

②と $AF = AC$ より

$$LH=\frac{1}{2}FB=\frac{1}{2}(AB-AF)=\frac{1}{2}(AB-AC)$$

また，$BL=CL$ より，

$$LS=\frac{1}{2}\{2LS+(BL-CL)\}=\frac{1}{2}\{(BL+LS)-(CL-LS)\}=\frac{1}{2}(BS-SC)$$

ここで，点Aから内接円に引いた接線の長さをd とすると，

$BS=AB-d\,,CS=AC-d$　より，

$BS-AC=(AB-d)-(AC-d)=AB-AC$

よって，$LS=\frac{1}{2}(AB-AC)$　より，$LH=LS$

(c)の証明

$\Delta AFE\equiv\Delta ACE$ で，直線ECは内接円の接線より，直線EF も接線である。その接点をT とする。

$\angle AFE=\angle ACE=\angle ACB$　より，

$\angle FEB=\angle AFE-\angle ABC=\angle ACB-\angle ABC$　……⑤

L,N はそれぞれBA　辺BC, BA　の中点より，中点連結定理より，$NL//AC$，よって，

$\angle BLN=\angle ACB$

三角形ABDは$\angle ADB=90^\circ$ である直角三角形より，ABの中点N を中心とする直径ABの円に内接する.

これから三角形NBD は$NB=ND$(半径)である二等辺三角形より，

$\angle BDN=\angle NBD=\angle ABC$

よって，

$\angle DNL=\angle BLN-\angle BDN=\angle ACB-\angle ABC$　……⑥

⑤，⑥より，$\angle DNL=\angle FEB$

補助線により得られた性質(a),(b),(c)を用いて，直線LT が再び内接円と交わる点をP とするとき，この点が９点円との共有点となることを示そう.

３点D,H,E を通る円に対して，(a)の性質から接弦定理の逆により，

LH はこの円の接線である.

よって方べきの定理より，

$LH^2=LE\cdot LD$　……⑦

内接円上の点P,T,S において，点S は接点であるから方べきの定理より，

$LS^2=LT\cdot LP$　……⑧

(b)と⑦，⑧より，

$LE\cdot LD=LT\cdot LP$　……⑨

方べきの定理の逆により，⑨は４点E, D, P, T が同一円周上の点であることを表す.

四角形$EDPT$ において補角の関係より，

$\angle TPD=\angle FEB$

(c)より，$\angle DNL=\angle FEB=\angle TPD=\angle LPD$

弧LD　にたつ円周角は等しいから，４点L, D, P, N は同一円周上の点である.

ここで，３点L, D, N は９点円周上の点より，内接円周上の点である点P は９点円周上の点である.

最後に，点P が内接円と９点円の接点であることを示そう.

点P における内接円の接線と辺AB との交点をQ とすると，EF も接線であるから，

$\angle QPT=\angle FTP$　……⑩

四角形$EDPT$ は円に内接するので補角の関係より，

$\angle EDP=\angle FTP$　……⑪

⑩，⑪より，

$\angle QPL=\angle QPT=\angle FTP=\angle EDP=\angle LDP$

ここで，P,L,D は９点円周上の点より，接弦定理の逆により，

QP は９点円の点P における接線となる.　　　　　　　　　　Q.E.D.

方べきの定理やその逆を用いる幾何定理は意外と多い.

例えば，パスカルの定理はメネラウスの定理による辺の比の組合せを方べきの定理によりつなぎ整理す

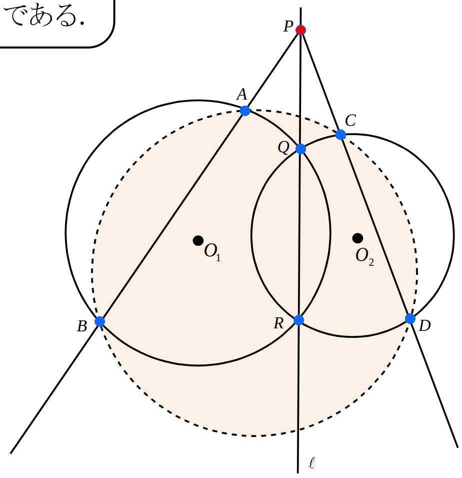
ることで共線を示す（拙著：メネラウスで三角形を巡る）.

　方べきの定理が証明の核となるわけではないが，図形から拾い出された種々の式をスリム化・構築化する役割は重宝なものといえるだろう．フォイエルバッハの定理もまた，百花繚乱の性質が咲き乱れるが，方べきの定理の逆により，最後に一つにまとめられるのである．

○共円問題

次に方べきの定理の逆を利用して，共円問題を解いてみよう．

> ２つの円O_1, O_2が異なる２点で交わるとき，その２点を通る直線をℓとする．直線ℓ上の点Pから引いた２本の直線が１本は円O_1と２点A, Bで交わり，もう一本は円O_2と２点C, Dで交わるとき，４点A, B, C, Dは共円である．

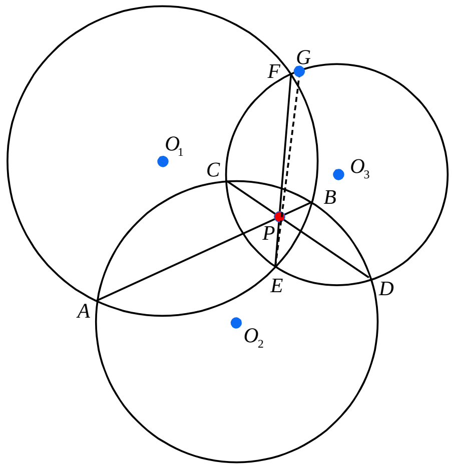


2 円の交点をQ, Rとする．
円O_1に関して方べきの定理より，
　$PA \cdot PB = PQ \cdot PR$　……①
円O_2に関して方べきの定理より，
　$PC \cdot PD = PQ \cdot PR$　……②
①，②より，
　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
よって，方べきの定理の逆により，
４点A, B, C, Dは同一円周上の点である．

Q.E.D.

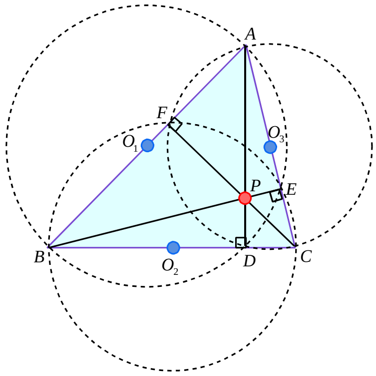
この性質から，４点A, B, C, Dを通る円をO_3とすると，円O_1, O_2, O_3の３本の共通弦の延長が１点Pで交わることが予想できる．

> 中心が一直線上にない３つの円O_1, O_2, O_3がある．
> ２円O_1とO_2，O_2とO_3，O_3とO_1の共通弦をそれぞれAB，CD，EFとすると，３つの弦は一点で交わる．



証明)
弦ABとCDの交点をPとする．
　円O_2に関して方べきの定理より，
　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$　……①
　直線EPが円O_3と交わる点をGとする．
　円O_3に関して方べきの定理より，
　　$PE \cdot PG = PC \cdot PD$　……②
①，②より，
　　$PA \cdot PB = PE \cdot PG$
方べきの定理の逆により，４点A, B, E, Gは共円である．
ここで，３点A, B, Eは円O_1上の点であるから，円O_3上の点であるGは円O_1上の点でもある．
よって，点Gは円O_1とO_3の点E以外の交点であるから点Fに一致する．
以上より，３つの弦は共点である．　Q.E.D.

なお，中心が一直線上にある場合は３つの弦は平行（一致を含む）になることは明らかである．
この性質はモンジュ(Gaspard Monge:フランス 1746～1818)が発見し，モンジュの定理と呼ばれる．



また，三角形ABCの各辺AB, BC, CAを直径とする円をそれぞれ，O_1, O_2, O_3とする．円O_1とO_3，O_1とO_2，O_2とO_3の三角形ABCの頂点A, B, C以外の交点をそれぞれD, E, Fとすると，直径を弦とする円周角の性質よりAD, BE, CFはそれぞれ辺BC, CA, ABの垂線を表す．前述の性質により，３つの垂線は１点Pで交わる．
このことより，三角形の頂点からその対辺に下ろした垂線は１点で交わる．すなわち三角形の垂心の存在が証明できたことになる．

ところで，３つの円の交線が１点で交わることを用い，前出の春木博氏は，エレガントでミステリアスな定理を与えている．

中心が一直線上にない３つの円O_1, O_2, O_3がある．
２円O_1とO_2，O_2とO_3，O_3とO_1の共通弦をそれぞれAP，BQ，CRとするとき次が成立する．

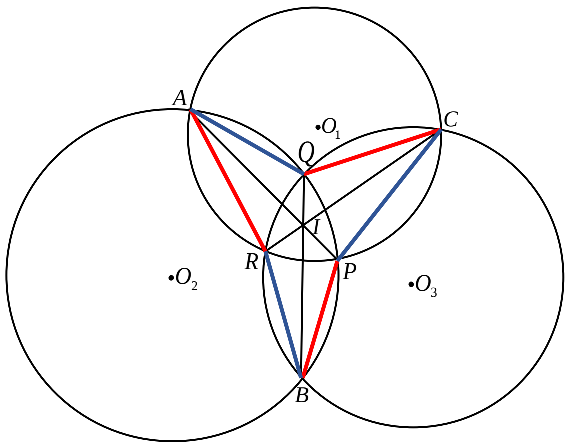
$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

証明
３つの共通弦AP, BQ, CRの交点はモンジュの定理より１点で交わる．その交点をIとする．
円O_1において，円周角の性質より，

$$\angle APC=\angle ARC$$

また，$\angle AIR=\angle CIP$
これより，２角が等しいから，$\Delta IAR \backsim \Delta ICP$

$$\therefore\quad \frac{AR}{RI}=\frac{CP}{PI}\quad\cdots①$$



同様に円O_2，円O_3についてもそれぞれ，

$$\Delta IBP \backsim \Delta IAQ,\quad \Delta ICQ \backsim \Delta IBR$$

が成立するから，

$$\frac{BP}{PI}=\frac{AQ}{QI}\quad\cdots②$$

$$\frac{CQ}{QI}=\frac{BR}{RI}\quad\cdots③$$

①，②，③を辺々かけて，

$$\frac{AR\cdot BP\cdot CQ}{RI\cdot PI\cdot QI}=\frac{CP\cdot AQ\cdot BR}{PI\cdot QI\cdot RI}$$

よって

$$AR\cdot BP\cdot CQ=CP\cdot AQ\cdot BR$$

これを整理すると，

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1\qquad\cdots(*)$$

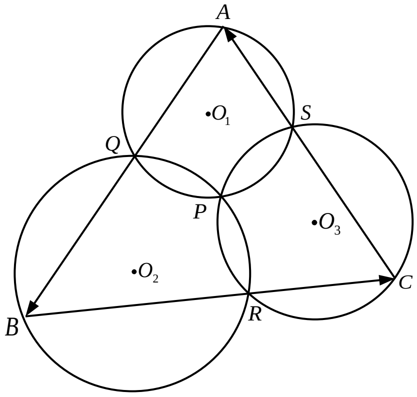
Q.E.D

なお，三角形ABCの各辺AB, BC, CAと直線IR, IP, IQとの交点をそれぞれR', P', Q'とすると，点Iに関するチェバの定理より，

$$\frac{AR'}{R'B}\cdot\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ'}{Q'A}=1$$

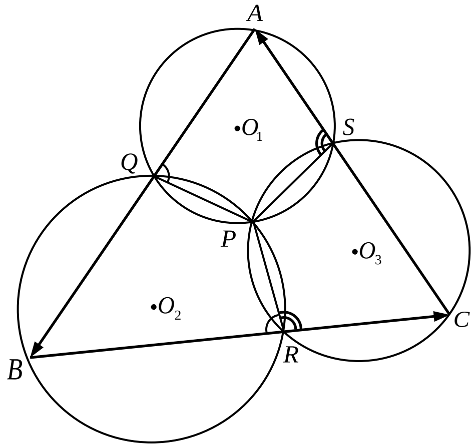
(*)は，折れた辺についてもチェバの定理が成立しているとみると面白い性質ではないだろうか．
　3つの円の交点が1点を共有するときも面白い性質がある．

　3つの円O_1, O_2, O_3は図のように1点Pを共有し，それ以外の交点を図のようにQ, R, Sとする．
直線AQとO_2の交点をB，直線BRと円O_3との交点をCとする．このとき，直線CSと円O_1との交点は点Aに一致する．



証明)
　直線BQと直線CSとの交点をA'とすると，A'は円O_1上の点であることを示せばよい．
　四角形$BRPQ$は円O_2に内接するから，補角の関係より，
　　$\angle A'QP = \angle BRP$　…①
　四角形$CSPR$は円O_3に内接するから，同様に，
　　$\angle A'SP = \angle CRP$　…②
　点Rは直線BC上の点より，
　　$\angle BRP + \angle CRP = 180°$
　①，②を辺々加えて，
　　$\angle A'QP + \angle A'SP = \angle BRP + \angle CRP = 180°$
　よって，四角形$A'QPS$において，$\angle A'QP$とその対角$\angle A'SP$の和は$180°$より，四角形$A'QPS$は同一円周上の点である．
Q, P, Sは円O_1上の点より，点A'は円O_1上の点である．
よって，AとA'は一致する．

Q.E.D.

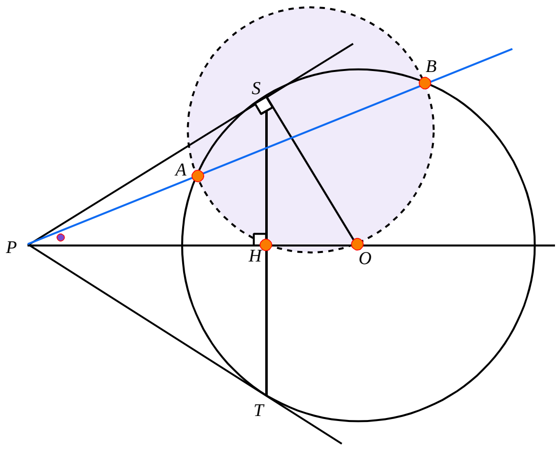


　この性質をミケルの定理という．
　もう一つ，共円に関する重要な性質を示そう．

点Pから円Oに引いた2本の接線の接点をS, Tとし，直線STと点Pを通る円Oの直径との交点をHとする．
このとき点Pを通る直径以外の弦ABに対して，4点A, B, H, Oは共円である．

証明)
　方べきの定理より，
　　$PA \cdot PB = PS^2$　……①
　ΔOPSとΔSPHは直角三角形で$\angle OPS$を共有するから，
　$\Delta OPS \backsim \Delta SPH$　である。
　よって，$\dfrac{PO}{PS} = \dfrac{PS}{PH}$
$\therefore$　$PH \cdot PO = PS^2$　……②
　①，②より，
　$PA \cdot PB = PH \cdot PO$
よって方べきの定理の逆により，
　4点A, B, H, Oは同一円周上の点である．

Q.E.D.



　上述の性質において円Oの外部の点Pを極といい，点Pから引いた2本の接線の接点を結ぶ直線STを極線という．次に，方べきの定理を極を通して眺めてみよう．

３．方べきと極

円Oの円外の点Pから引いた２本の接線の接点をA,Bとする．
直線POと直線ABとの交点をP'とすると，２つの直角三角形
ΔOAPと$\Delta OP'A$は相似であるから，

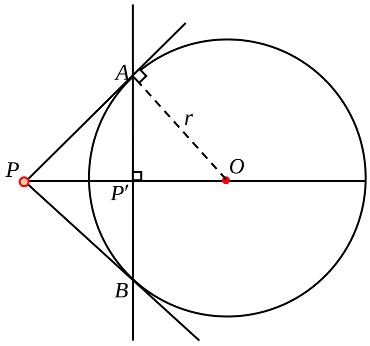
$$OA:OP=OP':OA$$

$OA=r$とすると，

$$OP\cdot OP'=r^2$$

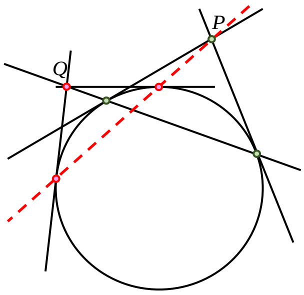
が成立する．

逆に，OP上の点P'を通り，直線OPに垂直な直線と円Oとの交点は，点Pから円に引いた接線の接点になる．



> 半径rの円Oと任意の点Pに対して
> $$OP\cdot OP'=r^2$$
> となるように点P'を直線OP上にとり，OPに垂直で点P'を通る直線をℓとする．このとき，点Pを直線ℓの極点，直線ℓを点Pの極線という．

点Pは円の内部・円周上の点であっても極点と極線は存在する．
極点が内部の点の場合は，点Pと点P'を入替えればよい．
極点が円周上の点の場合は，点Pと点P'は一致する．
極点と極線の性質を理解するための重要な性質である「ポンスレの定理」を示そう．



○ポンスレの定理

> 円Oの外部の極点Pの極線上にある任意の点をQとするとき，
> 極点Qの極線上に点Pはある．

直線OPと極点Pの極線との交点をP'とすると，

$$\angle PP'Q=90^\circ$$

である．また，直線OQと点Pから下した垂線との交点をQ'とすると，

$$\angle PQ'Q=90^\circ$$

であるから，４点P,P',Q,Q'は，PQを直径とする同じ円周上の点である．よって，方べきの定理より，

$$OP\cdot OP'=OQ\cdot OQ'$$

ここで，円Oの半径をrとすると，極点と極線の定義により，

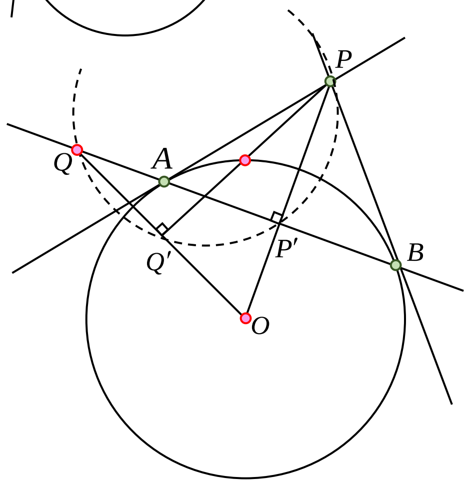
$$OP\cdot OP'=r^2$$

よって，

$$OQ\cdot OQ'=r^2$$

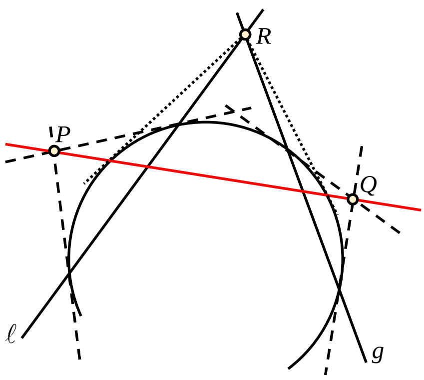
となり，直線PQ'はQの極線である．

Q.E.D.



定理から次のことが分かる．

点Pと点Qの極線をそれぞれℓ,gとし，２直線の交点をRとする．
このとき，点Rは極線ℓ上の点より，点Rの極線上に点Pはある．
点Rは極線g上の点より，点Rの極線上に点Qはある．
直線は異なる２点で決定するから，直線PQは点Rの極線である．



以上より，ポンスレの定理は次の性質も表す.

> ２つの極点 A, B に対し，その２つの極線の交点を極とする極線は直線 AB である.

パスカルにより，射影幾何学は発展し近世の幾何学の道が拓かれる．その後，パリ工芸大学創設の中心人物であったモンジュ(Gaspard Moge,1746-1818)により，「完成された芸術」といわれた画法幾何学が確立する．彼のパリ工芸大学での弟子がポンスレ(Jean-VicrorPoncelet 1788-1867)である．ポンスレはナポレオンのロシア遠征に工兵少尉として出兵するが，ナポレオン軍の大敗により捕虜となりサラトフの収容所に幽閉させる．幽閉の２年間，彼は同房の捕虜を相手に大学で学んだことを講義し，毎日ボルガの流れを眺めながら射影幾何学の研究に没頭して，極と極線の双対の原理を発見したという.

戦争終結による解放後，母国フランスに戻ったポンスレは，獄舎で研究した内容をまとめ「図形の射影的性質に関する概論」を発表し，射影幾何学は完成するのである.

双対の原理とは,「ある命題において，点を直線，直線を点に置き換えた双対(duality)の命題は，一方が成立すれば他方も成立する」というものである．前述のパスカルの定理は,

「円に内接する六辺形の向かい合う３対の辺またはその延長線の交点は一直線上にある(共線)」

というものであったが，これを数学の対義語で読み替えると次のようになる.

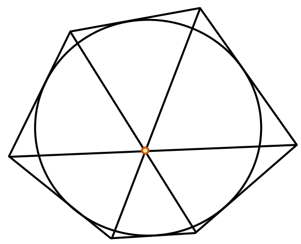
「円に外接する六辺形の向かい合う３対の頂点を結ぶ直線の交点は１点で交わる(共点)」

双対原理を用いると「パスカルの定理」から自明なこととしてこの性質は導かれるのである.

パスカルの定理の双対であるこの性質を「ブリアンションの定理」という.

この定理を証明する.

○　ブリアンションの定理



> 円に外接する六辺形の３対の対辺の交点は１点で交わる.

証明)

円に外接する六角形 $ABCDEF$ において，辺 AB , BC , CD , DE , EF , FA と円との接点をそれぞれ， P , Q , R , S , T , U とする.

２点 A , D を極とするそれぞれの極線 PU , RS の交点を X とする.

ポンスレの定理より， X を極とする極線は AD である.

同様に

２点 B , E の極線の交点 Y の極線は BE

２点 C , F の極線の交点 Z の極線は CF

である．六角形 $PQRSTU$ は円に内接するから，パスカルの定理より,

３組の対辺の延長との交点 X, Y, Z はひとつの直線 ℓ 上にある.

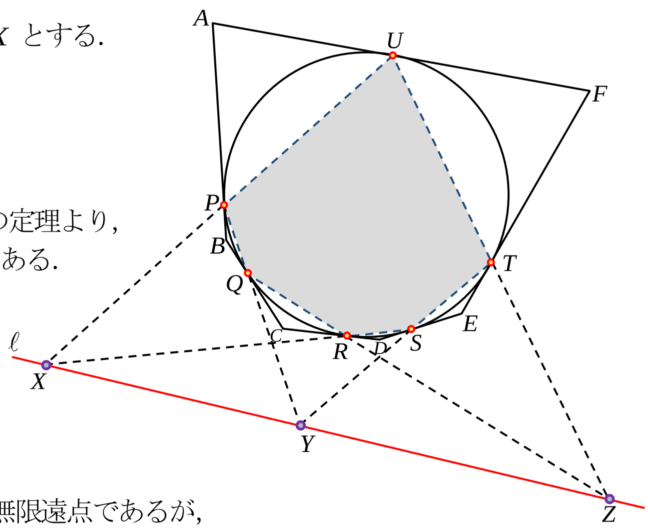
ここで，直線 ℓ を極線とするとき，ポンスレの定理より

極線 ℓ 上の点 X, Y, Z のそれぞれの極線 AD, BE, CF は

極線 ℓ の極点を通る.

したがって３対の対辺の交点は１点で交わる.

Q.E.D.



六角形の対辺が平行であるときは，その交点である極点は無限遠点であるが,

そのときの極線は円の直径であり，円の中心で交わることになり，定理は成立している.

ブリアンション(Charles Julien Brianchon 1785-1864)は，ポンスレと同時代のフランスの数学者であり，射影幾何学を研究し 21 歳のときにこの定理を発見し，双対の原理を用いて証明している.

前述の９点円の定理は，フランスの数学者オイラーは三角形の３頂点と垂心を結ぶ３つの中点以外の６点について同一円周上にあることを証明している.

ドイツの数学者フォイエルバッハがみつけたのも同じ６点円であり，それぞれの国が自国の数学者の名前をとって，９点円の定理を「オイラーの定理」,「フォイエルバッハの定理」とよんでいる．これにさらに３点を加えて９点円としてブリアンションはポンスレとの共著論文で発表したので９点円の定理は「ブリアンションの定理」ともいわれる.

円Oの極Pを通る直線が円Oと交わる2点をQ, R，極線と交わる点をSとする．
弦QRの中点をMとするとき，

$$PQ\cdot PR=PS\cdot PM$$

が成り立つ．

直線POと極線ABとの交点をHとすると，POはABの垂直二等分線である．
よって，$\angle SHO=90^\circ$
また，$OM\perp QR$より，
4点S, H, O, Mは同一円周上の点である．
方べきの定理より，

$$PH\cdot PO=PS\cdot PM \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\angle AHO=90^\circ$，$\angle PAO=90^\circ$より，
点HはOAを直径とする円周上の点であり，
PAは接線である．
よって方べきの定理より，

$$PH\cdot PO=PA^2 \quad \cdots\cdots ②$$

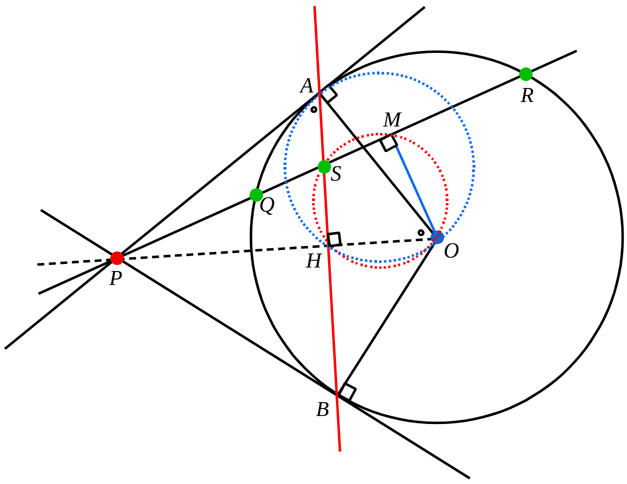
また円Oに関して方べきの定理より，

$$PA^2=PQ\cdot PR \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③より

$$PQ\cdot PR=PA^2=PH\cdot PO=PS\cdot PM$$

Q.E.D.



ところで点Mは，弦QRの中点であるから，

$$PM=\frac{PQ+PR}{2}$$

である．上述の性質より，

$$PQ\cdot PR=PS\cdot PM=PS\cdot\frac{PQ+PR}{2} \quad \cdots(*)$$

これを変形すると，

$$2PQ\cdot PR=PS(PQ+PR)$$
$$PQ\cdot PR-PS\cdot PQ=PS\cdot PR-PQ\cdot PR$$
$$PQ(PR-PS)=PR(PS-PQ)$$

$PR-PS=RS$，$PS-PQ=QS$ であるから，

$$PQ\cdot RS=PR\cdot QS$$

以上より，

$$PQ:QS=PR:RS$$

が成立する．すなわち，線分PSの内分点Qと外分点Rの比は等しい．
このとき，4点$P,S;Q,R$は調和点列であるという．
調和点列の調和の用語は調和数列に関係する．3数a, b, cがこの順に調和数列であるとは，
3数の逆数$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$がこの順に等差数列になることである．
上述の(*)より，

$$\frac{PQ\cdot PR}{PQ+PR}=\frac{PS}{2}$$

両辺の逆数をとって，

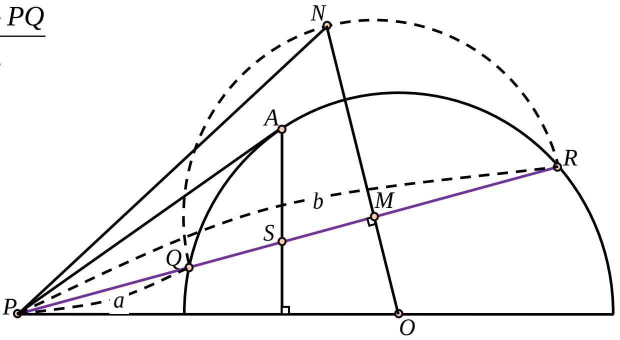
$$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}=\frac{2}{PS}$$

この関係式は，３つの線分の長さPQ, PR, PSは調和数列であることを示す．

すなわち，$PS=\dfrac{2PQ\cdot PR}{PQ+PR}$ より，PS はPQ とPRの調和平均である．

また，点Mを中心，半径MQの円と直線OM の交点をN とすると，

$$MN=MQ=PM-PQ=\frac{PQ+PR}{2}-PQ=\frac{PR-PQ}{2}$$



直角三角形PMNにおいて三平方の定理より，

$$PN^2=PM^2+MN^2$$

$$=\left(\frac{PQ+PR}{2}\right)^2+\left(\frac{PR-PQ}{2}\right)^2=\frac{PQ^2+PR^2}{2}$$

以上より，

$$PN=\sqrt{\frac{PQ^2+PR^2}{2}}$$

PN は，PQ, PRの二乗平均であり，明らかに図より，

$$PM \leqq PN$$

である．

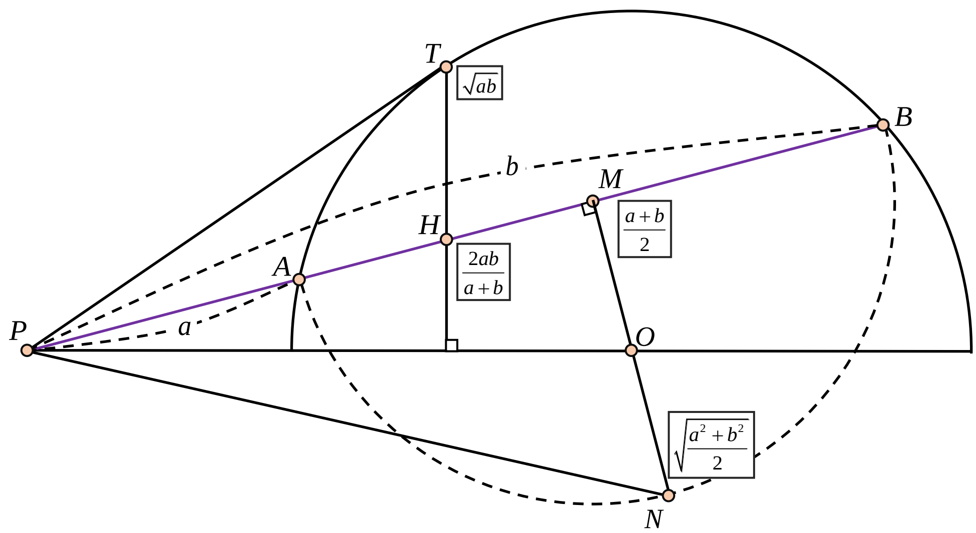
また，方べきの定理より，$PA^2=PQ\cdot PR$

$\therefore \quad PA=\sqrt{PQ\cdot PR}$

PAは，PQ , PRの相乗平均である。

前述した方べきの定理を用いた相加平均・相乗平均・調和平均の関係は，弦RSが円の直径の場合であり，このとき等号成立については点Pは無限遠点上にとる必要があった．しかし調和点列の性質より，任意の弦に対して不等式が成立していることが分かり，次のようにまとめることができる．

> 円Oの外部の点Pを通る弦ABに対して，$PA=a$, $PB=b$ とする．
> 点Pから引いた円の接線の接点Tから点Pを通る円の直径に下ろした垂線と弦ABとの交点をH ，中心Oから弦ABに下ろした垂線の足をM とする．
> また，ABを直径とする円と，直線OM との交点の１つをN とする．このとき，
>
> $$PN=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ ,\quad PM=\frac{a+b}{2},\quad PT=\sqrt{ab},\quad PH=\frac{2ab}{a+b}$$
>
> であり，$PN>PM>PT>PH$ が成り立つ．
> なお，$PB=PT$ であるとき，$a=b$ であり，
>
> $$PN=PM=PT=PH$$
>
> すなわち，等号が成立する．



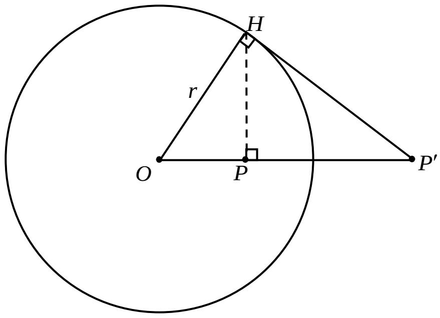
4．方べきと反転

定点Oを中心とする半径rの円Cを考える．このとき平面上の点Pに対して，

$$OP \cdot OP' = r^2 \quad \cdots(*)$$

である点P'を直線OP上にとる．点Pが円周上にあれば，点P'は点Pに一致する．
点Pが円の外部にあるときは点P'は円の内部にあり，点Pが原点から遠ざかれば点P'は原点に近づく．逆に，点Pが円の内部にあるときは点P'は円の外部にあり，点Pが原点に近づけば，点P'は原点から遠ざかっていく．

このように(*)は，円Cに関して内部点と外部点を入れ換える操作を表し，この変換を反転(inverse)という．このとき円Cを反転円といい，その中心を反転の原点(中心)という．また，点P'を点Pの反点(反転像)といい，点Pが曲線上の点であるとき，その反点の軌跡を表す図形を反形という．



反転円の内部の点Pの反点は，次のように求められる．
点Pを通り直線OPに垂直な直線と円との交点をHとする．
点Hを接点とする接線と，直線OPとの交点が，反点P'である．
なぜならば，$\Delta OPH \backsim \Delta OHP'$ より，

$$OP : OH = OH : OP'$$

すなわち，$OP \cdot OP' = OH^2 = r^2$ となるからである．
点Pが反転円の外部の点である場合は，逆の手順を辿ればよい．

点Pが曲線上の点であるとき，その軌跡である反形は単純ではない．
例えば，放物線は焦点を中心にして反転させると，反形は心臓形(cardioid)になる．放物線を極形式で表すと$r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$であるから，反転円を単位円とすると反形は，$r = 1+\cos\theta$である．しかし，放物線の頂点を反転円の中心とすると，半形は疾走線(cissoid)になる．

円と直線の場合はその対応関係は興味深い．

反転円の中心を通る直線は，内部にある線分と外部にある半直線は入れ替わり同じ直線に変換される．反転円の中心にある点の反点は無限遠点に飛ばされる．

直線が反転円の外部にあるとき，直線上の点は，すべて反転円の内部に移る．したがってその反形は直線にはならず反転円の内部にある図形に変換されることが予想できる．さらに直線上の無限遠点は原点に移るから，反形は原点を通る閉曲線である．また，円が反転円を含むとき，円の円周上の点はすべて反転円の内部に移される．円周上に無限遠点はないから，反転像は原点を通らない閉曲線になることが予想できる．具体的にその像は次のようになる．

> 反転円Oによる円や直線の反転は次のようになる．
> １．原点Oを通る直線の反転は自分自身である．
> ２．原点Oを通らない直線の反転は原点Oを通る円である．
> ３．原点Oを通る円の反転は，原点Oを通らない直線である．
> ４．原点Oを通らない円の反転は，原点Oを通らない円である．

１は既述.

２の証明

原点を通らない直線をℓ，反転円の半径をrとする．
直線ℓに垂直で原点Oを通る直線が，直線ℓと交わる点をH，
その反点をH'とすると，

$$OH \cdot OH' = r^2$$

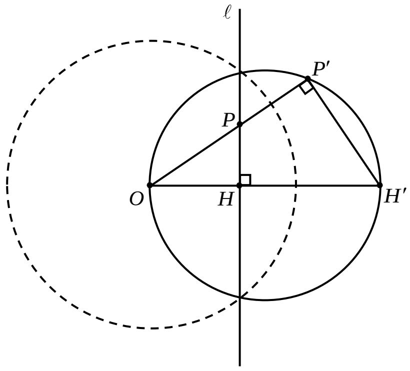
また，直線ℓ上のH以外の任意の点をP，その反点をP'とすると，

$$OP \cdot OP' = r^2$$

これから，

$$OH \cdot OH' = OP \cdot OP'$$

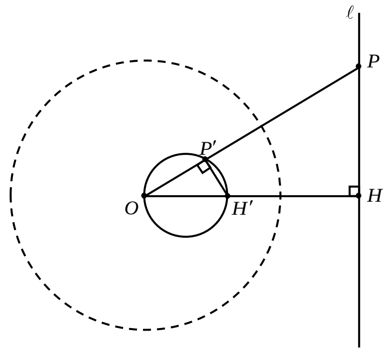
方べきの定理の逆より，4 点H, H', P, P'は同一円周上の点である．
$\angle H'HP = 90^\circ$ であるから補角の関係より，$\angle OP'H' = 90^\circ$ ．



点H'は点Hにより定まる定点より，動点P'の軌跡はOH'を直径とする円であるから，直線ℓの反形は原点を通る円である．

直線ℓが反転円Oの外部にあるときは，その反形は円の内部にある原点を通る円になる．直線ℓが反転円Oと異なる2点で交わっているときは，弦は，円の外部の円弧に移り，弦を除く半直線は反転円の内部の円に移されることになる．

なお，逆を考えると，原点を通る円の反転は，原点を通らない直線になることは明らかである(3の証明)



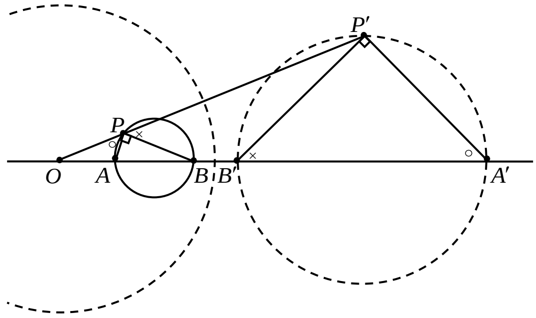
4の証明

原点を通らない円をC，反転円の半径をrとする．

原点Oと円Cの中心を通る直線が，円Cと交わる2点をA,Bとする(弦ABは円Cの直径)．点A,Bの反点をそれぞれA',B'とすると，

$$OA\cdot OA'=r^2 \quad \cdots①$$

$$OB\cdot OB'=r^2 \quad \cdots②$$



また，円C上の2点A,B以外の点Pの反点をP'とすると，

$$OP\cdot OP'=r^2 \quad \cdots③$$

①，③より，

$$OA\cdot OA'=OP\cdot OP'$$

であるから，方べきの定理の逆より，4点A,A',P,P'は同一円周上の点である．したがって，$\angle B'A'P'=\angle OPA$

同様に，②，③より

$$OB\cdot OB'=OP\cdot OP'$$

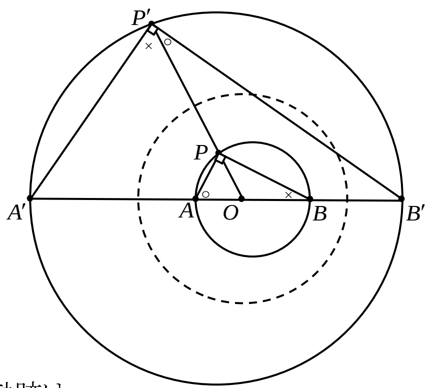
であるから，方べきの定理の逆より，4点B,B',P,P'は同一円周上の点である．

したがって，$\angle A'B'P'=\angle BPP'$

これから，

$$\angle B'A'P'+\angle A'B'P'=\angle OPA+\angle BPP'=180°-\angle APB=90°$$

よって，$\angle A'P'B'=180°-(\angle B'A'P'+\angle A'B'P')=90°$



A'とB'は，円Cの直径ABによりきまる定点であるから，動点P'の軌跡は，$A'B'$を直径とする円周上の点であり，原点は通らない．

以上より，原点を通らない円の反転は，原点を通らない円である．

中心Oを通らない円の円周上の点をP,Qとし，その反点をP',Q'とする．

反転円の半径をrとすると，

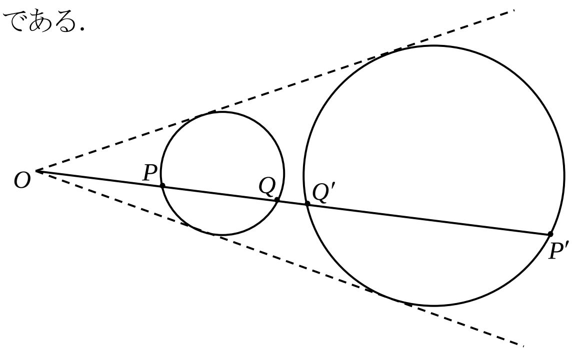
$$OP\cdot OP'=r^2$$

である．一方，2点P,Qは，円周上の点であるから方べきの定理より，

$$OP\cdot OQ=k \qquad (k\text{は方べきの値})$$

この2式を辺々割ると，

$$\frac{OP'}{OQ}=\frac{r^2}{k}\ \text{より，}\qquad OP'=tOQ\ \left(t=\frac{r^2}{k}\right)$$



よって，この場合の反転は，原点Oを中心とする相似比tの相似変換であることが分かる．

直線は半径が無限の長さをもつ円と考えれば，反転は円を円に移す写像でありこれを円々対応という．

反転は，定円を内部と外部の点を入れ換える変換であるが，2点A,Bの反点をそれぞれA',B'とすると，

$$OA\cdot OA'=r^2,\quad OB\cdot OB'=r^2$$

であるから，

$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'$$

となり，方べきの定理の逆より，4 点 A, A', B, B' は同じ円周上の点であることになり，ここからまた方べきの定理を用いることが可能になる．したがって，反転は，隠れている方べきの定理を写像による変換で引き出すものなのである．

> 反転円の中心を O，半径を r とする．2 点 A, B の反点を A', B' とすると
> $$A'B' = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}$$

証明）$OA \cdot OA' = r^2$ …①

$OB \cdot OB' = r^2$ …②

①，②より，　$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$

であるから方べきの定理の逆により，4 点 A, A', B, B' は同一円周上の点である．補角の関係より，

$\angle AA'B' = \angle OBA$

これから，$\Delta OAB \backsim \Delta OB'A'$ より，

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \cdot OA'}{OA \cdot OB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB}$$

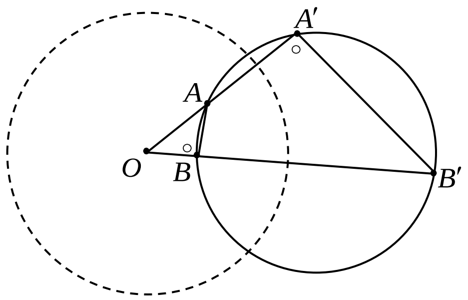
以上より，

$$A'B' = \frac{ABr^2}{OA \cdot OB}$$

A', B' の反点は A, B でもあるから，

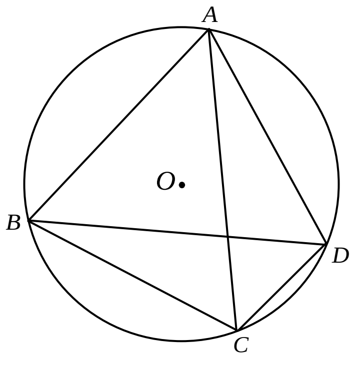
$$AB = \frac{A'B'r^2}{OA' \cdot OB'}$$

も同様に成立する．このことを用いてトレミーの定理を証明してみよう．



〇トレミーの定理

> 円 O に内接する四角形 $ABCD$ において，次式が成立する．
> $$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



証明）頂点 A を中心とする半径 r の反転円を，円 O がその内部にあるように考える．中心 A は円 O 上の点より，反転像は直線である．

したがって，点 B, C, D の反点をそれぞれ，B', C', D' とすると，

3 点は一直線上にある．前述の性質より，

$$B'C' = \frac{BC \cdot r^2}{AB \cdot AC} \quad \cdots ①$$

$$C'D' = \frac{CD \cdot r^2}{AC \cdot AD} \quad \cdots ②$$

$$B'D' = \frac{BD \cdot r^2}{AB \cdot AD} \quad \cdots ③$$

を得る．直線上の 3 点 B', C', D' において，

$$B'C' + C'D' = B'D' \quad \cdots (*)$$

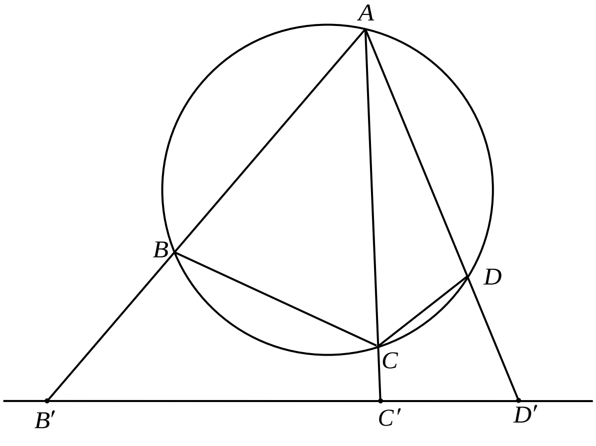
より，①，②，③を代入すると，

$$\frac{BC \cdot r^2}{AB \cdot AC} + \frac{CD \cdot r^2}{AC \cdot AD} = \frac{BD \cdot r^2}{AB \cdot AD}$$

両辺に $\dfrac{AB \cdot AC \cdot AD}{r^2}$ を掛けると，

$$BC \cdot AD + AB \cdot CD = AC \cdot BD$$

Q.E.D.



なお，四角形 $ABCD$ が円に内接しないとき(4 点 A, B, C, D が同一円周上にないとき)，(*)は，

$B'C' + C'D' > B'D'$ となり，次の不等式が成立する．

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD \quad \text{（トレミーの不等式）}$$

中心を通らない円の反転像は円であるが，その半径は次のようになる．

> 原点がOである反転円の半径をsとする．原点を通らない円Cの半径をrとしその反転像である円C'の半径をr'とする．
> また，原点から円Cに引いた接線の長さをd^2(方べき)とするとき，
> $$r'=\frac{s^2}{d^2}r$$
> である．

証明)

円C, C'の中心をC, C'とすると，

$\Delta COT \backsim \Delta C'OT'$であるから，

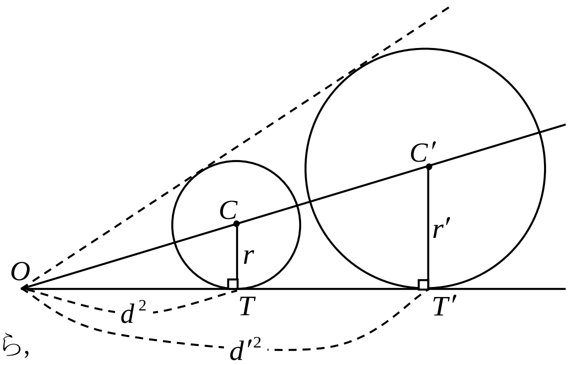
$OT:OT'=r:r'$

より，$r'=\dfrac{OT'}{OT}r$

また，$OT\cdot OT'=s^2$より，$OT'=\dfrac{s^2}{OT}$

よって，

$$r'=\frac{s^2}{OT^2}r=\frac{s^2}{d^2}r$$



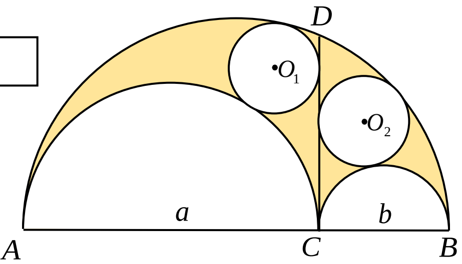
円C'の反転像は円Cであり，反転円は同じであるから，原点Oから円C'へ引いた接線の長さをd'^2とすると，

$$r=\frac{s^2}{d'^2}r'$$

が成立する．

このことを用いて，前述のアルベロス図形の問題を解いてみる．

図の2つの弧と直線に内接する2つの円の半径は等しい



$AC=a$，$BC=b$とする．

点Cを反転の中心とし，反転円の半径を$\sqrt{ab}$ (CD) とする．

点A, Bの反点をそれぞれA', B'とすると，

$CA\cdot CA'=ab$，$CB\cdot CB'=ab$

であるから，$CA'=b$，$CB'=a$ である．

反転により直線ACと直線CDは自分自身の直線に移る．

ABを直径とする円はそれ自身に移る．

AC，CBを直径とする円は，中心Cを通るから，$A'B'$に垂直でそれぞれ点A', B'を通る直線に移る．

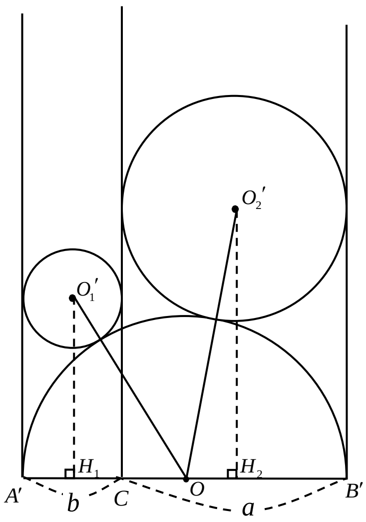
円O_1, O_2は中心を通っていないから，図の円O_1', O_2'に移る．

円O_1', O_2'の円の半径をそれぞれr_1', r_2'とすると，

$r_1'=\dfrac{b}{2}, r_2'=\dfrac{a}{2}$　　また，図において，

$$OH_1^{\,2}=OO_1'^2-OH_1^{\,2}=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2=(a+b)b$$

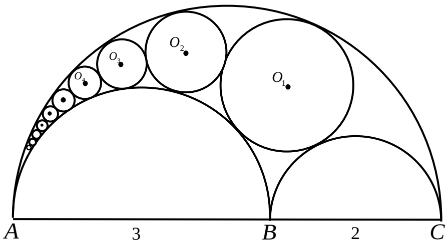
$$OH_2^{\,2}=OO_2'^2-OH_2^{\,2}=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2=(a+b)a$$



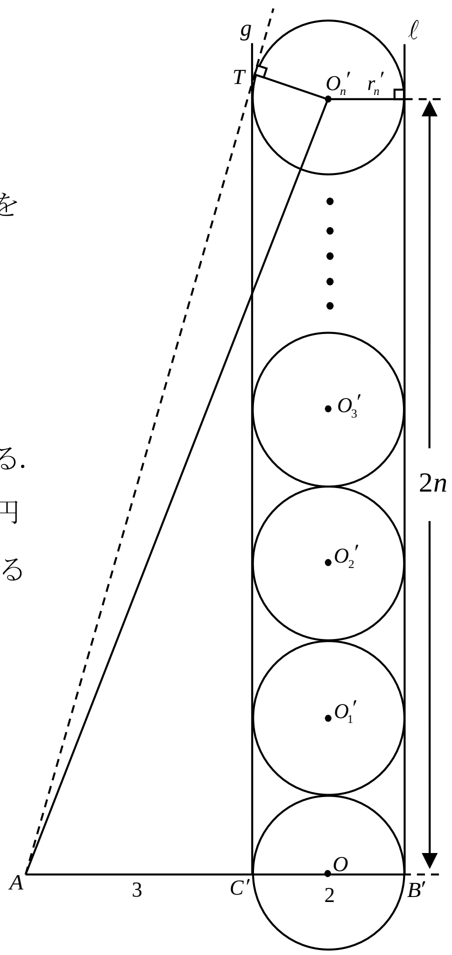
円O_1, O_2の半径をそれぞれr_1, r_2とすると，

$$r_1=\frac{ab}{{OH_1}^2}{r_1}'=\frac{ab}{(a+b)b}\times\frac{b}{2}=\frac{ab}{2(a+b)}$$
$$r_2=\frac{ab}{{OH_2}^2}{r_2}'=\frac{ab}{(a+b)a}\times\frac{a}{2}=\frac{ab}{2(a+b)}$$
以上より， $r_1=r_2$

長さ 5 の線分 AC を 3 : 2 の比に内分する点を B とする．
線分 AC , AB , BC を直径とする半円を線分 AB の同じ側に描き，
3 つの半円に接する円を O_1 とする．次に，AB , AC を直径とする
半円に接し，円 O_1 に外接する円を O_2 とする．以下，同様に
$O_3,O_4,O_5,\cdots\cdots$ をつくるとき，円 O_{10} の半径を求めよ．



解）円 O_n について解答を示そう．
反転円の原点を A，半径を $\sqrt{15}$ (点 A と BC を直径とする円の方べきを考える)
とする．
点 B,C の反点をそれぞれ B',C' とすると，
$$AB\cdot AB'=15\ ,\quad AC\cdot AC'=15$$
であり， $AB=3,\ \ AC=5$ より，
$$AB'=5,\ \ AC'=3$$
であり， A,C',B' はこの順に一直線上に図のように配置される．
AB を直径とする円の反転像は，反転円の原点 A を通るから，直線
AB' に垂直で点 B' を通る直線 ℓ に変換される．
同様に， AC を直径とする円の反転像は，直線 AC' に垂直で点 C' を
通る直線 g に変換される．
BC を直径とする円は原点 A を通らないからその反転像は円であ
り，直線 ℓ,g に接することより，直径が $B'C'$ である円 O に変換さ
れる． $B'C'=2$ より円 O の半径は 1 である．
円 O_1 の反転像は円 ${O_1}'$ であり，2 直線 l,g と円 O に接する．すなわ
ち円 ${O_1}'$ は，図のように円 O と同じ半径 1 の円で円 O の上に外接する．
円 O_2 の反転像である円 ${O_2}'$ は，直線 ℓ,g と円 ${O_1}'$ に接する半径 1 の円
で円 ${O_1}'$ の上に外接する．以下，円 O_{k+1} $(k=1,2,3\cdots)$ の反転像である
半径 1 の円 O'_{k+1} は，円 O'_k の上に外接する．
ピンポン玉を円柱の缶に詰め込む状態を考えればよい．
円 O'_k の半径 r'_k はすべて $r'_k=1$，円 O と円 O'_n の中心間の距離は
$OO'_k=2n$ である．よって，
$$AO'_n=AO^2+OO'^2_n=4^2+(2n)^2=4n^2+16$$
原点 A から円 O'_k に引いた接線の接点を T とすると，方べき AT^2 は
$$AT^2=AO'^2_n-r'^2_n=(4n^2+16)-1=4n^2+15$$
以上より，円 O_n の半径 r_n は
$$r_n=\frac{\left(\sqrt{15}\right)^2}{4n^2+15}r'_n=\frac{15}{4n^2+15}$$
これから， $r_{10}=\dfrac{3}{83}$ である．

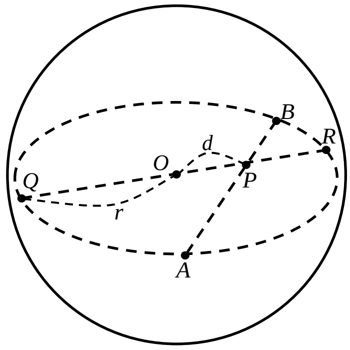


5. 方べきの定理の拡張

(1) 球面上の方べきの定理

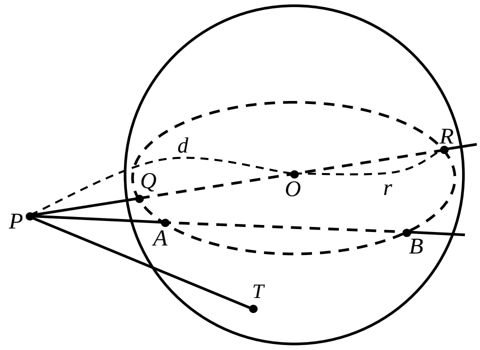
方べきの定理は，空間内では直線と球面の関係を表す．

> 球面上にない点 P から引いた２直線が球によって切り取られる弦をそれぞれ AB, CD とするとき，
> $$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
> が成立する．



点 P と球の中心 O を通る直線が球面と交わる２点を Q, R とすると，弦 QR は球面の直径である．QR を直径とし，２点 A, B を通る球面上の円(大円)において，方べきの定理は成立する．
大円の半径を r とする．また，直径 QR で点 P に近い端点を Q とし，$OP = d$ とすると，

$$PA \cdot PB = PQ \cdot PR$$
$$= |d - r|(d + r)$$
$$= |d^2 - r^2|$$



同様に，弦 CD を含む大円上においても方べきの定理が成立する．
また，球の外部の点 P については，点 P を通る直線が球面と異なる２点 A, B で交わるとき，点 P と弦 AB の両端までの距離の積は一定でありその値は点 P から球面に引いた接線の長さの２乗(方べき)である．
すなわち，接点を T とするとき，$PA \cdot PB = PT^2$ が成立する．

方べきの定理は円以外の２次曲線では一般に成立しない．しかし類似の性質は直線が２次曲線によって分割されるとき，その正射影上では成立する．以下調べてみよう．

(2) 放物線の方べきの定理

> 平面上の点 P を通る２直線 ℓ, g がある．放物線 $y = f(x)$ と直線 ℓ は異なる２点 A, B で交わり，直線 g とは異なる２点 C, D で交わっている．点 P および４点 A, B, C, D から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をそれぞれ P', A', B', C', D' とするとき，次の式が成立する．
> $$P'A' \cdot P'B' = P'C' \cdot P'D'$$

証明) 放物線の方程式を $f(x) = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$，直線 ℓ の方程式を $g(x) = mx + n$ とする．また，$f(x)$ と $g(x)$ の２つの交点 A, B の x 座標をそれぞれ $x = \alpha, \beta$ とし，点 P の x 座標を $x = p$ とする．

$$|f(x) - g(x)| = |a(x-\alpha)(x-\beta)| = |a||x-\alpha||x-\beta|$$

$x = p$ を代入すると，

$$|f(p) - g(p)| = |a||p-\alpha||p-\beta| = |a|P'A' \cdot P'B'$$

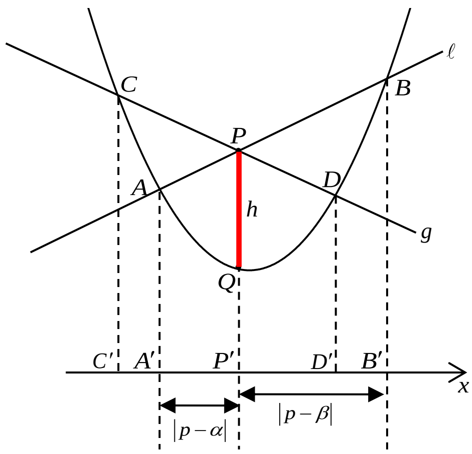
同様に，C, D を通る直線を $h(x)$ とすると，

$$|f(p) - h(p)| = |a|P'C' \cdot P'D'$$

が成立する．

ここで，$g(p) = h(p)$ であるから，

$$P'A' \cdot P'B' = P'C' \cdot P'D' \qquad \text{Q.E.D.}$$



なお，点 P は放物線の内側だけでなく，放物線上，外側でも成立することは明らかである．
また，外側の点 P を通る直線 $g(x)$ が放物線と接するとき，その接点の座標を $T(\gamma, g(\gamma))$ とする．

このとき,

$$|f(x)-g(x)|=|a(x-\gamma)^2|=|a|(x-\gamma)^2$$

点Tからx軸に下ろした垂線の足をT'とすると,

$$|f(p)-g(p)|=|a|(p-\gamma)^2=|a|P'T'^2$$

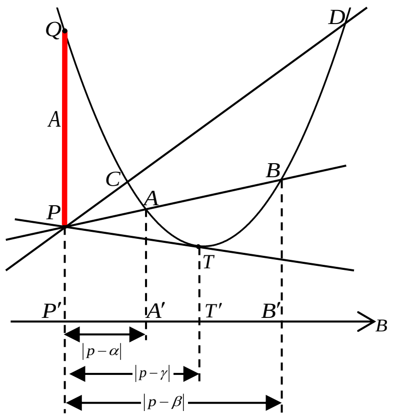
以上より,

$$P'A'\cdot P'B'=P'C'\cdot P'D'=P'T'^2$$

定点Pを通りy軸に平行である直線と放物線$f(x)$との交点をQとすると,
方べきの値は,

$$P'T'^2=\frac{1}{|a|}|f(p)-g(p)|=\frac{PQ}{|a|}$$

となる.



このように,定点を通る直線と放物線では,直線が放物線によって切られる線分のx軸の正射影を考えると,方べきの定理は成立している.また,これは2次曲線に対してもいえることである.

(3) 2次曲線の方べきの定理

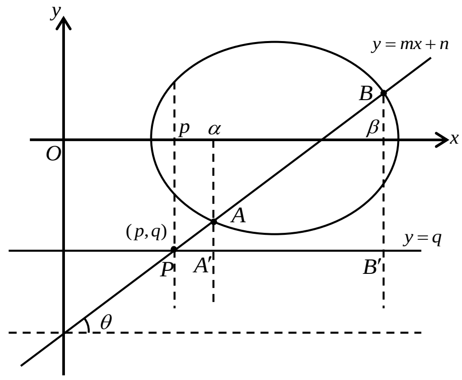
2次曲線と直線の関係は,y軸方向の平行移動を考えることで,2次曲線の方程式を,

$$y^2=\{f(x)\}^2=ax^2+bx+c$$

と表してよい.

直線の方程式を,$g(x)=mx+n$とする.

直線$y=g(x)$は,2次曲線$y=\pm f(x)$ (2次曲線は,陽関数の多価関数で表される)と異なる2点A,Bで交わるとき,その交点のx座標をそれぞれ$x=\alpha,\beta$とする.これから,



$$\begin{aligned}|\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2|&=|(ax^2+bx+c)-(mx+n)^2|\\&=|(a-m^2)(x-\alpha)(x-\beta)|\\&=|a-m^2||x-\alpha||x-\beta|\end{aligned}$$

2次曲線の定義域内にある$y=g(x)$上の点をP (p,q)とする.

x軸に平行な直線$y=q$に点A, Bから下ろした垂線と$y=q$との交点をそれぞれA', B'とすると,

$$|\{f(p)\}^2-\{g(p)\}^2|=|a-m^2||(p-\alpha)||(p-\beta)|=|a-m^2|PA'\cdot PB'$$

$\therefore$ $a\neq m^2$のとき,$q=g(p)$より, $PA'\cdot PB'=\dfrac{|\{f(p)\}^2-q^2|}{|a-m^2|}$

すなわち,直線が二次曲線によって切り取られる線分は直線$y=q$への正射影と考えると,その積は直線の傾きにより決定する.

直線$y=g(x)$とx軸の正方向とのなす角をθとすると,$m=\tan\theta$である.

ここで,2次曲線が円であるとき,$a=-1$ であるから,

$$|a-m^2|=|1+\tan^2\theta|=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

また,

$$PA'=PA\cos\theta,\ PB'=PB\cos\theta$$

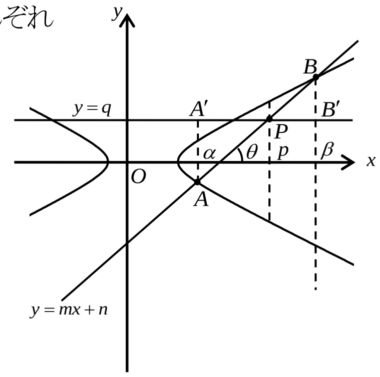
これから,

$$\begin{aligned}PA\cdot PB&=\frac{PA'\cdot PB'}{\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta|\{f(p)\}^2-q^2|\\&=|\{f(p)\}^2-q^2|\end{aligned}$$

2次曲線の定義域内の点Pにおいて,円の方べきの定理が示されたことになる.

円以外の２次曲線について考える．

２次曲線の定義域内の点を$P(p,q)$とする．点Pを通る直線ℓが２次曲線と交わる点をA,Bとし．直線$y=q$に下ろした垂線との交点をそれぞれA',B'とする。また，$h(x)=\{f(x)\}^2-q^2$　とおく．



直線ℓがx軸の正の方向となす角を$\theta=\alpha$とすると，

$$PA\cdot PB=\frac{P'A'\cdot P'B'}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\left|\{f(p)\}^2-q^2\right|}{\left|a-\tan^2\alpha\right|}$$

$$=\frac{|h(p)|}{\left|a\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right|}$$

また，点Pを通るℓと異なる直線gが２次曲線と交わる点をC,Dとし，直線gがx軸の正の方向となす角を$\theta=\beta$とし，同様に考えると，

$$PC\cdot PD=\frac{|h(p)|}{\left|a\cos^2\beta-\sin^2\beta\right|}$$

これから，

$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\left|\frac{a\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{a\cos^2\beta-\sin^2\beta}\right| \quad \cdots①$$

次に，点Pと異なる点Qを通り，ℓと平行な直線ℓ'とgと平行な直線g'を考える．

直線ℓ'が２次曲線と交わる２点をS,Tとし，直線g'が２次曲線と交わる２点をU,Vとすると，

$$\frac{QS\cdot QT}{QU\cdot QV}=\left|\frac{a\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{a\cos^2\beta-\sin^2\beta}\right| \quad \cdots②$$

①，②より，

$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\frac{QS\cdot QT}{QU\cdot QV} \quad \cdots③$$

③を比で表すと，

$$PA\cdot PB:PC\cdot PD=QS\cdot QT:QU\cdot QV$$

である．円の方べきの定理は,

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

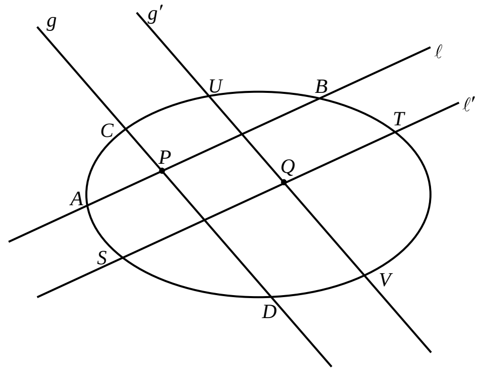
であるが，これは

$$PA\cdot PB:PC\cdot PD=1:1$$

とみると, ２次曲線では，方べきの定理は，直線の傾きにより得られる相似比で成立していることになる．

具体的に，楕円では次の性質が成り立つ．

> 楕円の内部の点Pで交わる２つの弦AB, CDがある．
> 同様に，点Pと異なる点Qで交わる２つの弦ST, UVがある．
> ただし，$AB//ST$, $CD//UV$　とする．
> このとき，次が成立する．
>
> $$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\frac{QS\cdot QT}{QU\cdot QV}$$



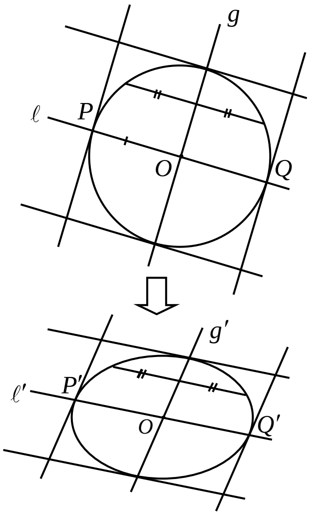
なお，楕円の方程式を，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0)$$

とすると，楕円をy軸方向に$\dfrac{a}{b}$倍することで，半径aの円にうつる．

このとき，線分の長さは，線分の方向のみできまることより直感的にこの性質は理解することができる．

このように，楕円は，円を一定方向に拡縮した図形とみると，
円の種々の性質は楕円でも保存される．

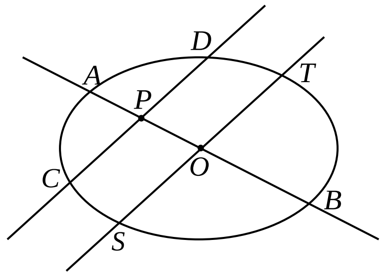


円の中心を通る直交する 2 直線ℓ，g を考える．
このとき，次の性質が成立する．

・直線ℓに平行な弦は，直線g により二等分される．
・直線ℓを切り取る円の弦をPQとするとき，点Pおよび点Q
における接線は，直線g と平行である．

この性質は，円に方程式をy 軸方向に$\dfrac{b}{a}$倍してうつる楕円において も線分比や接線は保たれるため成立している．
これから，前述の性質を用いることで，次が成立する．

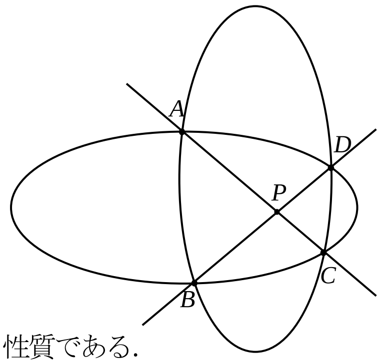
> 楕円の内部の点Pと中心Oを通る弦をABとする．
> 点Pを通る別の弦CDと平行で中心Oを通る弦をSTとするとき，
> $$PA\cdot PB=\left(\frac{PC\cdot OA}{OS}\right)^2$$



前述の性質より，
$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\frac{OA\cdot OB}{OS\cdot OT}$$
である．ここで，
$$PC=PD,\ OS=OT,\ OA=OB$$
より，明らかに成立する．
この性質は，円においては，
$$OA=OS=r\quad(r \text{ は円の半径})$$
であり，$OP=d$ とすると，
$$PA\cdot PB=PC^2=r^2-d^2$$
すなわち，楕円の内部の方べきの値を示していることになる．
そして，同様にこれらの性質は，双曲線，放物線(2 次曲線)でも成立する．

(4) 直交する 2 つの 2 次曲線における方べきの定理

> 楕円Sを$90°$ 回転し平行移動して得られる楕円をTとする．
> 2 つの楕円S，Tが異なる 4 点A，B，C，Dで交わり，直線AC，BDの交点をPとするとき，
> $$PA\cdot PC=PB\cdot PD$$
> が成立する．



方べきの定理が 2 次曲線で成立しているようにみえるがそうではない．
いままでのことから，平面上においては方べきの定理は円にのみ成立する性質である．
$PA\cdot PC=PB\cdot PD$ が成立することは，方べきの定理の逆により，4 点A,B,C,Dは同一円周上の点であることを意味する．したがって，共円問題と考えることができる．
楕円Sの方程式を
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad\cdots①$$
とすると，楕円Tの方程式は，
$$\frac{(x-p)^2}{b^2}+\frac{(y-q)^2}{a^2}=1\quad\cdots②$$
①，②を辺々加えて得られる式は，4 つの交点を通る曲線を表し，x^2 とy^2 の

項の係数は，どちらも

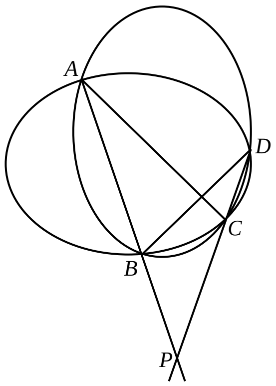
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

である．よって，4 点は共円である．

なお，直線ABと直線CDが円の外部で点Pと交わるときは，

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

が成立している．



また，同様に考えると，放物線では，

$y^2=x$に対しては，$y=x^2+px+q$ を考えると，4 つの共有点は，同一円周上の点である。双曲線では，

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$に対しては，$\frac{(x-p)^2}{b^2}-\frac{(y-q)^2}{a^2}=-1$

を対応させればよい．

すなわち，2 次曲線は，その逆関数を平行移動した曲線を対応させることで，4 つの交点は共円になる．

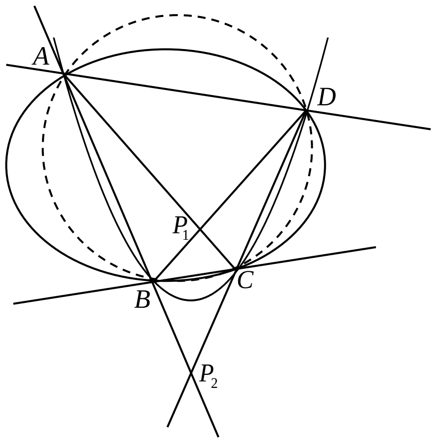
これは異なる種類の 2 次曲線についても対応させることができる．

楕円，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ に放物線 $y=px^2+qx+r$ を対応させた場合は，

$$p=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$$

とすることで，異なる 4 点で交わるときに方べきの定理は成立する．

円が異種の 2 次曲線の縁を結んでいるようでとても面白い．



あとがき

本稿中，「方べき」の用語は，172 回用いられている．

取り上げたどの性質にも何らかの形で方べきの定理は少なからず顔を覗かす．

方べきの定理は，幾何の性質を読み解こうとするとき，相似比として誰でも自然に使うし，それを線分の積として変形して表現することも誰でも無意識にしている．方べきの定理はまるで空気のようにそこにあり，生きていくには必要不可欠の成分として幾何を支えている．だからといって，大仰に存在を主張している定理でもない．空気という言葉を誰が考えたのかは不問であろう．

方べきの定理は，ユークリッドの原論の円の命題の中で，線分の積を長方形の面積として単純に示している．そこには「方べき」という用語は用いられてはいない．ユークリッドから 2000 年後の 1826 年に，シュタイナーが Power-Theorem と名付けたのは，自然とその用語が浮かんだからかもしれないが，深い思惑も推測することもできる．

方べきの定理は，正確には，Power of a Point Theorem ，点の方べきである．

定点Pと半径rの定円Cがあり，点Pと円の中心Oとの距離をdとするとき，$p=\left|d^2-r^2\right|$の値をシュタイナーは点の方べきとした．点Pが円の外部にあるときは，それは極点Pの接線の長さの 2 乗であり，点Pが円の内部にあるときは，その反点P'を極点とするとき，それは極線である弦の$\frac{1}{2}$の長さの 2 乗である(本稿の節「4.方べきと反転」参照)．シュタイナーは，線分の長さを不変量pで表し，「点の力」と扱って命名したのであれば，幾何の血肉を養ってきた power の源である方べきの定理の重みは計り知れない．

でも，そんなふうに考えなくてもいい思う．誰でも使える当たり前の定理であるスタンスの方が好きである．方べきの定理は証明の論理を積み上げていく礎石なのである．

(2020 年 4 月 30 日　コロナウィルスが蔓延する中，脱稿)

※コロナがメディアという媒体をも侵食する間，2020 年 4 月 3 日，望月新一教授(京都大学)が超難問「ABC 問題」を証明したというニュースが飛び込んできた．しかし翌日にはニュースはコロナ一色になってしまった．4 月 11 日，世界最高の数学者であるライフ・ゲームを考案した J.H.コンウェイ氏がコロナウィルスの犠牲になった．コロナは素晴らしき数学者の業績と命を無残に奪っていった．

方べきの定理とその周辺の性質