放物線の接線の小手技

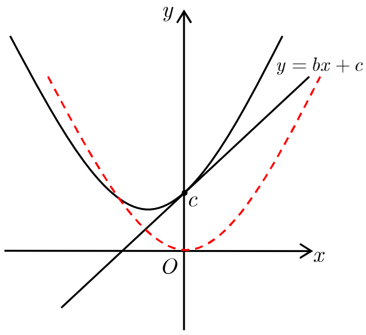
市立札幌旭丘高校　中村文則

○カヴァリエリ風味の接線調理法

<先　生> 本時はまず次の問題から始めよう。

> Ex1）放物線 $f(x)=2x^2+4x+3$ 上の点 $P(1,\ 9)$ における接線の方程式を求めよ。

<まなぶ> いつもの先生の出題に比べると，ずいぶん穏やかだ。取り上げるような問題ではないでしょ。先生，どうしたの。
<先　生> 簡単だからといって疎かにしない。何事も基本が大切なのだから。でもただ解くだけではない。条件がある。
4人ともみな異なる解答を提示すること。
<まなぶ> なんだ。やっぱりいつもの先生じゃないか。それじゃ，先陣を切って僕からやるよ。
やっぱりこれは微分でしょ。
$f'(x)=4x+4$　より，$f'(1)=8$　これが接線の傾きだから，方程式は，
$y=8(x-1)+9$　　$\therefore$　$y=8x+1$　　楽勝だ。
<かず子> まなぶもいつものまなぶよね。それじゃ，私は一番代表的な方法で。
接線の傾きを m とすると，方程式は，$y=m(x-1)+9$
これを，$y=f(x)$ に代入して得られる2次方程式が重解をもてばいい。
だから，判別式 $D=0$ となる m を求めます。
<アリス>　私もその2つを考えました。他にもあるのかしら。
<かず子> 以前，先生が和関数の話をしていたでしょ。それ，使えないかしら。
<アリス> 和関数…ですか？。



確か，$f(x)=ax^2+bx+c$ は，放物線　$y=ax^2$ と
直線　$y=bx+c$ の合わせたものと考えるということね。
そして，そのとき，　$y=bx+c$ は，$y=f(x)$ の y 切片における
接線になるという性質がありました。
ということは,。接線の傾きは b なのだから…。
点 $A(1,9)$ が y 切片 $(0,9)$ になるように平行移動するのかしら。
x 軸方向に -1 平行移動すればいいから，放物線の方程式は,
$$y=2(x+2)^2+1=2x^2+8x+9$$
だから，接線の傾きは8になります。
<よしお> 最後は僕ですね。いよいよ手詰まりって感じですけど，1つだけ習った方法，思い出しました。
「万能組立除法」で先生が説明していましたよね。
$f(x)$ を組立除法を用いて，$(x-1)^2$ で割ります。そうすると，
$$f(x)=2(x-1)^2+8(x-1)+9$$
これから，接線の方程式は,
$$y=8(x-1)+9=8x+1$$

1	2	4	3
		2	6
	2	6	9
		2	
	2	8	

<先　生>4通りを考えられるかちょっと心配だったけど，クリアーできね。
<まなぶ>4人にこれだけやらせておいて，これで終わりってことはまさかないよな。
<先　生> その通り。これからが本題なんだ。
この接線の方程式を，カヴァリエリの原理という性質を用いて求めてみよう。
<まなぶ> カバ？
<先　生> カヴァリエリは,微分･積分の概念を考えた,ニュートンやライプニッツと同世代の17世紀イタリアの数学者だ。
彼の柔軟な発想は近代求積法の道を拓いたともいわれている。いくらなんでもカバは失礼だ。
<まなぶ> ふーん，で，そのカバさんは，どんなことを考えたの。
<先　生> 玉ねぎをまな板の上に置いて，包丁で薄く輪切りにすることを想像してごらん。
<かず子> いきなり調理実習ですか。まさか，オニオンリングを作るってことではないですよね。
<先　生> スライスした形状が大事なんだ。いろいろな半径の円がたくさんできるよね。その円をまた集めるともとの玉ねぎになる。
<アリス> せっかく，切ったのに，元に戻してしまうのですか。
<よしお> 先生が言いたいのは，円の面積を集めたら球の体積になるってことですねよ。
<先　生> 正解。カヴァリエリは，２つの立体図形を同じ方向で切るとき，その切り口が常に等しければ，２つの立体の体

積は等しいと考えた。言い方を変えると，ある立体を一定方向に厚みがないように薄く切れば面積のようにみなすことができる。だから，面積を集めると体積が求められる。このことは，平面図形を薄くスライスして，線分を集めるともとの図形の面積になると考えてもいい。

<まなぶ> 放物線をスライスすることで，接線を求められるということだろうか。
スライスしたものも接線も確かに線分ではあるけどピンとこない。

<先　生> では実際をやってみよう。
放物線と接線で囲まれてできる区間 AB の図形を図のようにする。
これを，x 軸に垂直な方向にトントンと切ってみよう。

<かず子> x 軸がまな板ということですね。トントンは玉ねぎのような立体の素材を切るときで，この場合は開いたイカを切るような感じだからスッスッかな。

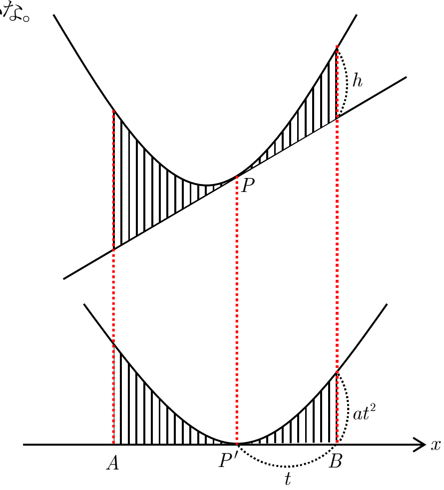
<まなぶ> さすが，かず子。女子力高いね。で，先生，そのあとは？

<先　生> 切った線分をまな板である x 軸の上に左から順に並べていく。
そして線分を集めると，どんな図形ができあがるだろう。

<アリス> もとの放物線の接点が頂点になっている放物線にみえます。

<先　生> そうだね。では，グラフの開きはどうなっている。

<アリス> 同じかな。あっ，これ，さきほど接線を求めるときに考えた，和関数と同じにみえるわ。



<先　生> グラフの開きが同じになることを確認しようか。
放物線，接線の方程式をそれぞれ，

$$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a>0)\ \ ,\ \ g(x)=mx+n$$

とする。このとき，$x=t$ で切り取られる線分の長さは，

$f(t) \geqq g(t)$ のとき，$f(t)-g(t)=at^2+(b-m)t+(c-n)$

これをもう一度 x 軸の上に整形した図形の方程式は，

$$y=ax^2+(b-m)x+(c-n)$$

となることが分かる。

<よしお> 2 次式である放物線から 1 次式である直線を引いても 2 次の項の係数は変わらないから，放物線のグラフの開きも変わらないということですね。これは，僕が先ほど解いた組立除法で変形した放物線を表している。

放物線が $y=2(x-1)^2$ で，接線が $y=8(x-1)+9$

そういうことですよね。

<先　生> アリスとよしおの解答はカヴァリエリの原理から説明できるということだ。
でもここではもう少し違った見方をする。
接線の方程式は，点 $P(1,9)$ を通るわけだから，接線の傾きが分かればいい。
カヴァリエリの原理から，接点から x 軸方向に t だけ離れた点で x 軸に垂直に切った線分の長さ h は，新たに整形し直した放物線の頂点 P' から，x 軸方向に t だけ離れた点で切った線分の長さと同じだ。その値は何だろうか。

<かず子> $y=ax^2$ として考えれば at^2 ですよね。だから，$h=at^2$ になります。

<先　生> ということは，$t=1$ とすると，$h=a$ 。グラフの開きを図の中にみることができる。
右図をみてみよう。求めたいのは接線の傾き m で，図では $m=ST$ になっている。これから，

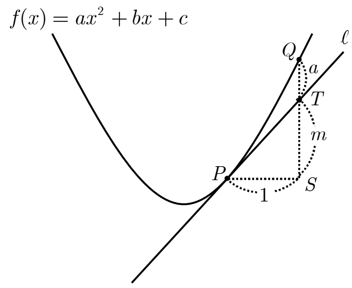
$$ST=SQ-QT$$

接点 P の x 座標を $x=t$ とすると，$SQ=f(t+1)-f(t)$

そして，先ほどの結果から　$QT=a$　だから，

$$m=f(t+1)-f(t)-a$$

これから，接線の傾きが求められる。



<アリス> なんか，すごく面倒なことになっている。

<かず子> そうでもないわよ。この問題の放物線のグラフの開きは，$a=2$
接点は $A(1,9)$ だから $f(1)=9$ ，だから計算するのは $f(2)$ の値だけだわ。
$f(2)=19$ だから，接線の傾きは，

$$m=f(2)-f(1)-a=19-9-2=8$$

ほんと，できちゃった。

<まなぶ> うーん，でもアリスが言ってたように，やっぱりムズい。だってこの問題，微分で瞬殺じゃん。

<かず子> あのね。さっき先生も基本は疎かにしたらダメっていっていたでしょ。
アイデアとしては凄く面白い方法と思うわ。そうですよね，先生。

<先　生> かず子の言う通りだ。でも，今後，接線を求めるときこの方法を使おうと思う人はいないはずだ。
だから，まなぶの言葉を借りるならば，ムズい。

<まなぶ> 先生，珍しく僕の味方なんだ。なんか嬉しいような，悲しいような。

<先　生> 味方をしているわけではない。まなぶの言う通り，微分という強力なツールがあるから敢えてこの方法を使う必

要はないということだ。

<よしお> ということは，問題の内容によってはこのアイデアが威力を発揮することがあるということですね。

<先　生> では，次の問題を解いてごらん。最初はまなぶが解いた方法から考えようか。

Ex2) 次の 2 つの放物線の共通接線を求めよ。

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 2\ ,\quad g(x) = 2x^2 - 8x + 10$$

<まなぶ> 急にアップグレードだ。

接点が分からないから，まず，$y = f(x)$ の接点の座標 $A(s, f(s))$ とする。

$f'(s) = 4s + 4$ だから，これから接線の方程式を求める。

$$y = (4s+4)(x-s) + 2s^2 + 4s - 2 \qquad \therefore\quad y = (4s+4)x - 2s^2 - 2\ \cdots①$$

次に，$y = g(x)$ の方の接点を $B(t, g(t))$ とすると，$g'(t) = 4t - 8$ より

$$y = (4t-8)(x-t) + 2t^2 - 8t + 10 \qquad \therefore\quad y = (4t-8)x - 2t^2 + 10\ \cdots②$$

①と②は同じ接線になればいいから，傾きと y 切片を比較して，s, t を求めると…，　$s = -\dfrac{1}{2}$，$t = \dfrac{5}{2}$

最後に，s の値を①に代入すると，$y = 2x - \dfrac{5}{2}$

先生，わざと分数の値になるようして面倒にしてない。

<かず子> 次はわたしの方法ということね。通る点は分からないから，接線の方程式を $y = mx + n$ とします。

そして，$y = f(x)$ に代入して得られる x の 2 次方程式の判別式 D に対して，$D = 0$ とします。

同じようにして $y = g(x)$ からも m と n の関係式を作って，連立方程式を解けばいいけど結構大変。

<アリス> まなぶが求めた①を $y = g(x)$ に代入して判別式を考えた方がいいのではないですか。

<かず子> それ，最初に考えたけど，やろうと思ったらなんか生理的に受けつけなかったのよ。

<よしお> 僕とアリスが求めた方法は特殊だったから，この問題ではちょっと厳しい。

でも，別の方法を考えることはできます。2 つの放物線の x^2 の項の係数は等しいから，

放物線の頂点から接点に向かうベクトルは等しいはずです。ということは，共通接線の傾きは，2 つの頂点を通る直線の傾きに等しくなります。$f(x)$ と $g(x)$ を標準形にすると，

$$f(x) = 2(x+1)^2 - 4\ ,\quad g(x) = 2(x-2)^2 + 2$$

$y = f(x)$，$y = g(x)$ の頂点の座標は，それぞれ，$A(-1, -4)$，$B(2, 2)$。

これから，直線 AB の傾き m は，

$$m = \frac{2-(-4)}{2-(-1)} = 2$$

よって，接線の傾きも 2 です。あとは，まなぶの微分の方法を使うなら，

$$f'(s) = 4s + 4 = 2 \qquad これから\quad s = -\frac{1}{2}$$

。$y = f(x)$ の接点の x 座標が求められます。

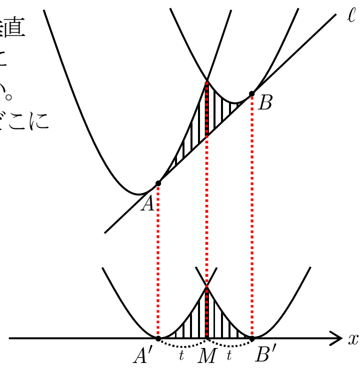
<まなぶ> ほら，結局，どこかで微分を使うと計算は簡単になる。やっぱり微分は最高だってことだよ。

<かず子> あのね，まなぶ。なんか微分が自分の専売特許みたいにいってるけど，まなぶは工夫した解答を考えたくなかったから，誰でも一番楽だって知っていた微分の方法をいの一番に奪っただけでしょ。

<先　生> まあ，そこらへんにしておこう。でも次に説明する方法では微分はまったく用いない。**Ex1** でアリスやよしおが考えた方法のベースであるカヴァリエリの原理を利用する。

解答の進め方は前問と同じだ。2 つの放物線と接線で囲まれる図形を，x 軸に垂直な方向でスライスしていく。そして，それを x 軸上に並べていくと，右図のように新しい 2 つの放物線ができる。やっぱりグラフの開きはもとの放物線と変わらない。

さて，ここからが大事なところだ。では，整形し直した 2 つの放物線の交点はどこにあるだろうか。



<アリス> $y = f(x)$，$y = g(x)$ の接点 A, B が整形した放物線の頂点 A', B' になり，

グラフの開きが同じだから，線分 $A'B'$ の中点が x 座標だと思います。

<先　生> その通り。中点を M としよう。では，M の x 座標を求めてごらん。

<かず子> もとの 2 つの放物線の交点と x 座標は同じよね。だから，$f(x) = g(x)$ から

すぐに得られるわ。$x = 1$ です。

<先　生> 快調だね。それでは，線分 $A'B'$ の長さを何だろうか，まなぶ。

<まなぶ> 急に振らないでよ，ながさ？，ながいさー。

<かず子> あほ。さっき，よしおがいったこと聞いていた？

<まなぶ> ベクトルが同じとかいうことかい。あっ，そうか，もとの $f(x)$ と $g(x)$ の頂点の x 座標の差を考えればいいのか。

<よしお> 軸の間の距離とした方がいいよ。頂点の y 座標は必要ないから平方完成する必要はない。

<まなぶ> なるほどね。$y=f(x)$，$y=g(x)$ の軸の方程式は，それぞれ，$x=-1,\ x=2$ より，

$$A'B'=2-(-1)=3$$

<先　生> いよいよ大詰めだ。以上のことより，接点の x 座標は何だろう。

<まなぶ> えーっ，大詰めというより，いきなり結論じゃないですか。

<アリス> わたし分かります。M は $A'B'$ の中点だから，$A'M=\dfrac{1}{2}A'B'=\dfrac{3}{2}$

だから，A' の x 座標は $x=1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$　B' の x 座標は，$x=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$

<よしお> これは，もとの放物線の接線の接点 A,B の x 座標でもあるから，あとは y 座標を求めて直線 AB の方程式を求めればいいんですね。

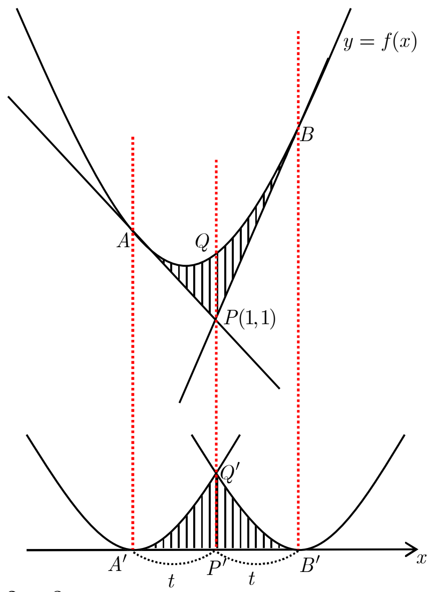
<かず子> 本当に微分をまったく使わないで求められてしまったわ。

<まなぶ> うーん。確かにカバちゃん，凄いかも。

<先　生> カヴァリエリの原理の素晴らしさ，少しは分かっただろうか。それでは次の問題。

> Ex3) 点 $P(1,1)$ から放物線 $f(x)=2x^2+3x+4$ に引いた接線の方程式を求めよ。

今度は最初からカヴァリエリの原理を利用してみよう。



<かず子> 接線は2本引けます。この接線と放物線で囲まれる図形を2つの接点 A,B の間で，x 軸に垂直に切るんですね。

<アリス> そして，その次に，x 軸の上に並べていく。そうすると，あれっ，これって先ほどの問題と同じ図形になるわ。

<まなぶ> 本当だ。ということは，右図の点 P' は，線分 $A'B'$ の中点になる。あとは，$A'B'$ の長さが分かれば接点の x 座標が求められる。

<かず子> でも先ほどのように2つの頂点を利用することはできないわよ。

<よしお> $P'Q'$ の長さは使えないだろうか。カヴァリエリの原理より，

$P'Q'=PQ$ だよね。

<まなぶ> PQ の長さは計算できるとうことだ。

$f(1)=9$ だから，$PQ=f(1)-1=8$

これ，何となく Ex1 と同じだ。

$A'P'=t$ とすると，点 A' は整形した放物線の頂点で，

グラフの開きが2であることから，

$$P'Q'=2t^2$$

求められそうだ。これから，

$$2t^2=8 \quad より，\quad t>0 とすると t=2$$

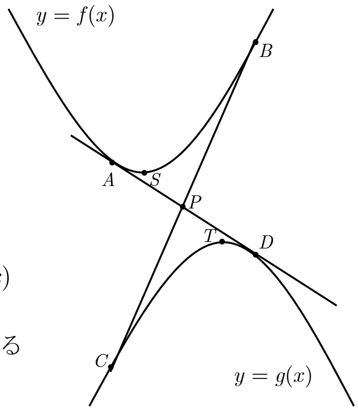
だから，A' の x 座標は，$x=1-2=-1$　B' の x 座標は，$x=1+2=3$

<よしお> 接点は，$A(-1,3)$ と $B(3,31)$ ですね。だから接線の方程式は，直線 AP と直線 BP になります。

それぞれ求めると，$y=-x+2$，$y=15x-14$

<先　生> だいぶ，放物線の調理方法が板についてきたね。それでは，最後の問題だ。

> Ex4) 次の2つの放物線の共通接線を求めよ。
>
> $f(x)=x^2+2x+5$　，$g(x)=-x^2+6x-15$



<まなぶ> 今度は，上に凸と下に凸の放物線ですか。先生もいろいろ考えるね。

<かず子> でも，x^2 の項の係数の絶対値は1で等しい。たぶん，そのことが使えると思う。

<先　生> いい読みだ。では，これもカヴァリエリの原理を利用して考えてみよう。

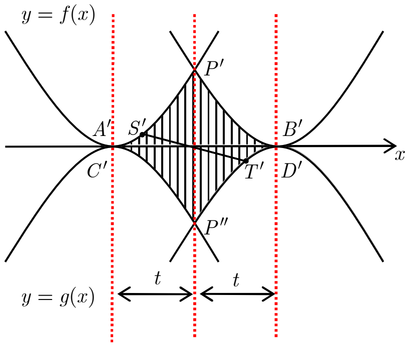
<アリス> イメージを描いてみると右図のようになります。だから共通接線は2つあります。その交点を P とすると，これは先ほどの Ex3 と同じで，点 P から放物線 $y=f(x)$ に引いた共通接線を求める問題になります。

<まなぶ> 本当だ。そうするはカバちゃんを使うと先ほどのように，グラフの開きが同じである2つの放物線に整形できる。

<かず子> 上に凸の放物線 $y=g(x)$ の方はどうなるのかしら。

<よしお> 同様に x 軸に垂直に切って整形し，今度は x 軸の下方にくっつけてみたらどうだろう。

<アリス> ここでさきほどかず子がいっていたことが使えるのね。
x 軸に関して対称移動したように，先ほどと全く同じ
ツインの放物線ができるわ。



<かず子> 2 つの放物線の接線 AD， BC で， A と C， B と D の
接点の x 座標って同じになるのね。カヴァリエリの原理で
スライスすると見えてくる。
<よしお> 点 P は P'， P'' になって，直線 $P'P''$ は線分 $A'B'$ の垂直
二等分線になっていることも分かる。
<まなぶ> そうするとこれも前の問題と同じように解けるということか。
でも $P'P''$ の長さってどうやって求めればいいのだろう。
<先　生> もとの放物線の頂点 S,T は整形した放物線ではどこ移るか
点を入れてごらん。
<まなぶ> 頂点 S が移った点を S' として書き込むと， $A\to S$ と， $A'\to S'$ は放物線上を
同じ道のりだけ動く。頂点 T が写った点 T' についても同じで…そうか，線分 $S'T'$ の中点は x 軸上にある。
<かず子> ということは，元の放物線の頂点を結ぶ線分 ST の中点が 2 つの接線の交点 P ということね。

$f(x)=(x+1)^2+4$　より，頂点 $S(-1,4)$

$g(x)=-(x-3)^2-6$　より，頂点 $T(3,-6)$

だから， ST の中点 P の座標は， $P(1,-1)$

あとは，Ex3)と同じね。

<アリス> わたし解きます。

$f(1)=8$　だから， $f(1)-(-1)=9$

点 A と，線分 $P'P''$ との距離を t とすると， $t^2=9$　より $t=3$
これから，接点 A と C の x 座標は， $x=1-3=-2$　接点 B と D の x 座標は， $x=1+3=4$
あとは，直線 AD と BC を求めればいいわ。

<まなぶ> それじゃ，締めはぼくがやろう。 $f(-2)=5$　より， $A(-2,5)$　まあ，ここで微分を使ってもいいけど，
カバちゃんの顔を立ててやろう。ただし AD 上に点 P があるだから， D は求めなくてもいいと思う。
直線 AP を求めると，

$$y=\frac{-1-5}{1-(-2)}(x-1)-1 \qquad \therefore \quad y=-2x+1$$

同様に， $f(4)=29$　より， $B(4,29)$　だから，直線 BP は， $y=10x-11$

<先　生> 上に凸と，下に凸の x^2 の項の係数の絶対値が等しいとき，2 つの放物線は，2 つの接線の交点で点対称になっている。この問題では，接点 A と C の x 座標は同じだから，接線は AP と BP を求めてもいいね。
どうだろう，カヴァリエリの定理を用いた接線の調理法，理解することができたかな。
<まなぶ> 微分は確かに定番過ぎでいまひとつその味わいは深みに欠けている。微分がスパイスならカヴァリエリは調理法に新たな工夫を凝らしていて，カバさまさまだな。
<かず子> びぶん，びぶんっていっていたどの口がそんなこと言うのかしら。

あとがき

新学習指導要領は「思考，表現，判断」が主要な学力として求められ，大学入学共通テストでは先行しその学力が験されます。今回の小手技は，4 人の生徒に「微分，判別式，カヴァリエリの原理」という異なる思考を提示させてみました。

線分を集めると面積，面積を集めると体積という論法は数学としては誤りですが，その表現を出発点としてどのように判断し，そして思考を深めていくかということがこれからは大事なのかもしれません(いままでもそうであったとは思う)。

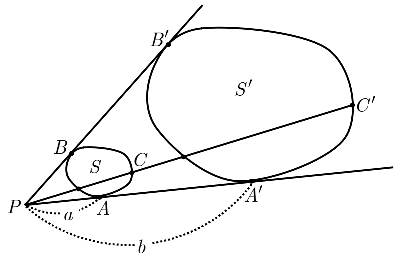
なお，本問の問題は以前執筆した「放物線の共通接線のちょっとした小手技」のリメイクです。そのときは，2 つの放物線上のそれぞれの動点を紐で結び，頂点からの移動量を計算することで接線を導いていますが，今回はカヴァリエリの原理に統一した解法にしました。

カヴァリエリの原理と「すべての放物線は相似である」性質を用いると次の定積分の値が得られます。

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

積分を用いないで， $y=x^2$ と x 軸，直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積が求められるということです(Mathtemplate「放物線で囲む面積」参照)。さらにこの結果を用いて放物線と接線で囲まれる種々の面積は積分を用いないで得られます(「積分をしないで視る積分の性質」参照)。結局，放物線に関する接線および面積は，すべて微分・積分を用いないで計算することができます。新学習指導要領では，数学における概念や原理・法則を人間・文化の関わりから認識・理解するように，数学史を取り入れることを推奨しています(現行もそうであったのですが，うやむやになった感はあります)。ライプニッツとニュートンの微積の発展史と並行して確率していくカヴァリエリの原理の話題はユニークな教材ではないでしょうか。

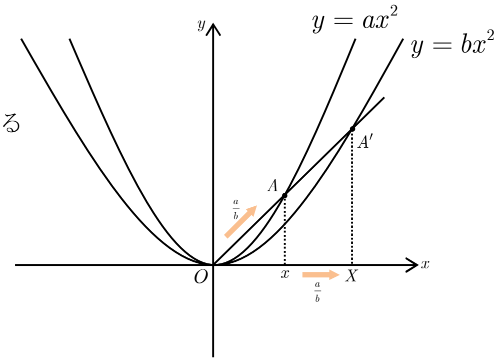
本文は，放物線のグラフの開きの絶対値が等しい場合の共通接線を扱っていますが，「放物線の共通接線のちょっとした小手技」では，開きの異なる共通接線の話題も取り上げています。これを「すべての放物線は相似である」観点からもう一度整理してみましょう。



図形 S 上のすべての点をある点 P を中心として $\dfrac{b}{a}$ してできる図形 S' を作ると，
S と S' は相似比が $a:b$ である相似な図形であり，点 P は相似の中心になります。
2つの図形が相似であるときは，相似の中心は定点か無限遠点に存在します。
放物線で考えてみましょう。
2つの放物線を

$$y=ax^2 \cdots ① \ ,\ \ y=bx^2 \cdots ② \qquad (a>0, b>0,\ a\neq b)$$

とします。①上の点 $A(x, ax^2)$ を，原点を相似の中心として，$\dfrac{a}{b}$ 倍した点を $A'(X, Y)$ とすると，



$$X=\frac{a}{b}x \ \text{ より，} \ Y=\frac{a}{b}(ax^2)=b\left(\frac{a}{b}x\right)^2=bX^2$$

すなわち，A' は②上の点より，①と②は，原点を相似の中心として相似であることが分かります。このとき，相似比は，

$$1:\frac{a}{b}=b:a$$

となります。
次に放物線②を x 軸対称$(b<0)$ または平行移動をして，

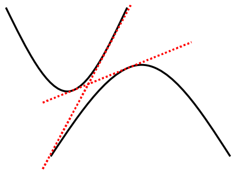
$$f(x)=ax^2 \ \ ,\ \ g(x)=b(x-p)^2+q \quad (a\neq b)$$

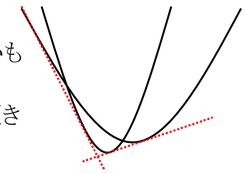
とします。このとき，相似の中心の座標は，$f(x)$ と $g(x)$ の対応点を，

$ab>0$ のときは，$|b|:|a|$ の比に外分する点

$ab<0$ のときは，$|b|:|a|$ の比に内分する点

になります。





この対応する点の1つは頂点です。したがって，2頂点の内分点(外分点)を求めれば相似の中心は得られます。これにもう一つ対応する2点を通る直線を考えれば，相似の中心は，2直線の交点になります。その対応する点としては，放物線を2次曲線とみて，焦点を考えてもいいかもしれません。あるいは，対応する点では，接線の傾きが等しいことを利用します。
頂点における接線の傾きは0で等しく，また共通接線は，接点におけるそれぞれの放物線の傾きが等しいことは明らかです。したがって，共通接線の交点が相似の中心になるのです。
次の問題で確認してみましょう。

Ex5) 次の2つの放物線の共通接線を求めよ。

$$f(x)=x^2+2x+2 \ \ ,\ \ g(x)=-2x^2+2x-4$$

$f(x)=(x+1)^2+1$ より，頂点 $A(-1, 1)$ $\quad g(x)=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$ より，頂点 $B\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$

よって，2接線の交点は，相似の中心であり，線分 AB を $2:1$ の比に内分する点 $P(x, y)$ である。

$$x=\frac{-1+2\times\frac{1}{2}}{2+1}=0\ ,\quad y=\frac{1+2\times\left(-\frac{7}{2}\right)}{2+1}=-2 \qquad \therefore,\ \ P(0, -2)$$

点 P と $f(x)$ の接点を通る y 軸に平行な直線との距離を t とすると，

$$t^2=f(0)-(-2)=4 \qquad \therefore \quad t=2$$

これから接点の x 座標は，$x=-2,\ 2$ である。

$x=-2$ のとき，$f(x)$ の接点は $S(-2, 2)$ より接線 SP の方程式は，$y=-2x-2$

$x=2$ のとき，$f(x)$ の接点は $T(2, 10)$ より，接線 TP の方程式は，$y=6x-2$

$y=f(x)$ 上の点 $C(0, 2)$ における接線の傾きは，$f'(0)=2$ です。
次に，$y=g(x)$ 上の点の接線で傾きが2であるものを求めると $g'(x)=-4x+2=2$ より，$x=0$
よって，$g(x)$ 上の点は $D(0, -4)$。これから，線分 CD を $2:1$ の比に内分する点が相似の中心になります。