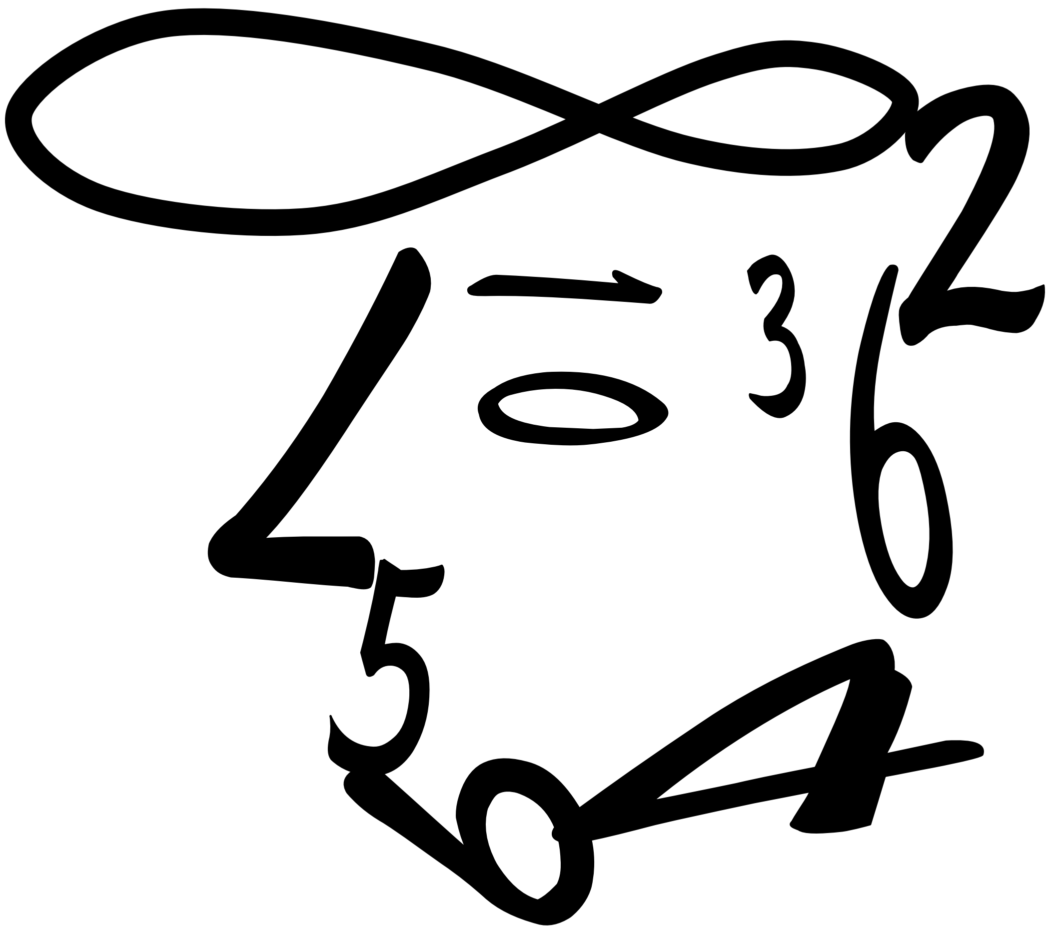
不思議数との出会いの覚書３

～新たな出会いのエピソード



リーゼント頭の時代に流されない

個性的な数の神様

$\sqrt{2}$

………無限の入口の門番数

$\sqrt{2}$ は直角を挟む 2 辺の長さが 1 である直角三角形の斜辺の長さですが、分数に表すことができない数です。

$\sqrt{2}$ の存在は、三平方の定理を証明したピュタゴラス学派は知っていたと言われています。しかし学派は万物の根元は数とみなし、自然界の創造物は数を表す粒子で構成されていると考えたため、分数に表すことのできない $\sqrt{2}$ は神の失敗数とし、忌み嫌いました。その存在は、「アロゴン:alogon～秘密にしておけ」と口外することを固く禁じ、漏らしたものは暗殺されたということです。でも $\sqrt{2}$ は連分数展開すると、

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

無限では分数に表現できることになりますがその場所での佇まいを人は目にすることはできません。だから不可侵の無限に触れようとすると、ときどき大きなしっぺ返しを受けることがあります。

例えば、方程式

$$x=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} \qquad (x>0)$$

の解は何でしょう。両辺を平方すると、

$$x^2=x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=x+x=2x$$

$x>0$ ですから、$x=2$ となります。すなわち、

$$2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

であるわけです。同じように、

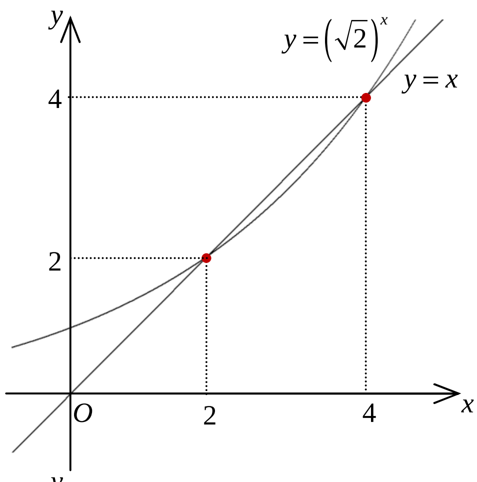
$$x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}=2 \qquad \cdots①$$

の正の解は、(左辺) $=x^2=2$ より、$x=\sqrt{2}$ が得られます。それでは、

$$x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}=4 \qquad \cdots②$$

はどうなるでしょう。(左辺) $=x^4=4$ より、$x^2=2$ ですから、$x=\sqrt{2}$ 。ということは、

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots\cdots}}}} \qquad \cdots\cdots(*)$$



の値は、2 なのか、それとも 4 なのか。不思議なことが起こっています。

調べてみましょう。いま(*)の値を x とすると、

$$x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}=\left(\sqrt{2}\right)^x$$

となります。直線 $y=x$ と指数関数 $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ の交点は、$(2,2)$, $(4,4)$ のみで、この 2 数以外に解はなさそうですが(*)の値は相変わらず不明のままです。

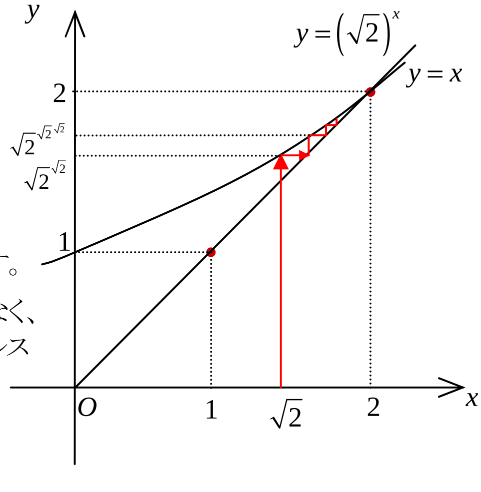
そこでこの直線と曲線を違う視点からみてみましょう。

$f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$ とします。$x=\sqrt{2}$ の $f(x)$ の値は $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 。

次に、この値に対する $f(x)$ の値は

$$f\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$$

この操作を続けていくと(*)が得られます。



右のグラフをみてください。$x=\sqrt{2}$ と $y=f(x)$ の交点を通り、x 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を求めます。この交点を通り y 軸に平行な直線と $y=f(x)$ との交点……と続けていくと、点は無限の領域に少しずつ近づき、点 $(2,2)$ に吸い込まれていくのが分かります。すなわち、(*)の値は 2 になるのです。

神の失敗数の烙印を押された $\sqrt{2}$ はけっして人が安易に評価できるような数ではなく、むしろ、神の領域に踏み込み無限の迷路へと誘われた人間を待ち受けるミノタウルスの如き数なのです。

153

………自画自賛する数

1から1000までの数で、各位の数の3乗の和を求めます。その値が元の数に一致しているものは何個あるでしょうか。
もちろん、最初に現れる数は1です。では次の数は何だと思いますか(タイトルから予想できますね)。

この計算には1桁の数の3乗の値が関わってくるので右表にまとめました。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
n^3の一位	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

この表から1桁の数では該当するものは1しかないことが分かります。2桁の数では、数5〜9の3乗は3桁の値になってしまいますので、0〜4で作られる2桁の数、$4\times5=20$(個)が候補になります。これを逐一調べてみると該当する数は見つかりません。

次に100〜199までの3桁の数をみてみましょう。3桁の数Nは、$N=100+10a+b$ $(0\leqq a,b\leqq 9)$で与えられ、各位の数の3乗の和は、$1+a^3+b^3$になります。これがNに一致すればいいわけです。まず、一位が一致する場合について表を用いて調べてみましょう。$100+10a+b\equiv 1+a^3+b^3 \pmod{10}$ より、$b\equiv 1+a^3+b^3$となります。

ここで、6〜9は、3乗が200以上のため各位の数として用いることはできません。すなわち、$0\leqq a,b\leqq 5$に限定されます。

$b=0,1,4,5$のとき、3乗の値の一位の数は元の数と等くなります。すなわち$b^3\equiv b \pmod{10}$より、

$$b\equiv 1+a^3+b \qquad a^3+1\equiv 0 \pmod{10} \quad \text{すなわち} \quad a^3=9 \pmod{10}$$

$0\leqq a\leqq 5$より、これを満たすaはありません。

$b=2,3$のとき、3乗の値の一位の数は$10-b$になります。すなわち、$b^3\equiv 10-b \pmod{10}$ より、

$$b\equiv 1+a^3+10-b \qquad a^3\equiv 2b-11\equiv 2b-1 \pmod{10}$$

$b=2$のとき$a^3\equiv 3$よりこれを満たすaはありません。

$b=3$のとき$a^3\equiv 5$、すなわち$a=5$となります。

以上のことより、3乗の和で一位の数が元の数と一致するのは153しかないということになります。この数の各位の数の3乗の和が153に一致しなければ199までの数の中には条件を満たすものはないのです。恐る恐る……

$$1^3+5^3+3^3=1+125+27=153$$

一致しました!!!!!。

一見単純そうな「3乗の和が一致」という条件は、実は結構厳しい条件なのです。

実際、1〜1000までの中で、この条件を満たすものは、

1, 153, 370, 371, 407

この5つの数しかなく、3桁で最初に登場するのが153なのです。

なお、条件を

「n桁の自然数で、その各位のn乗の和が元の数に等しい数」

と変えてみるとどうなるでしょう。

$n=1$のときは、1から9の自然数は全て満たしています。

$n=2$のときは、このような数は存在しません。

$n=3$のときは、先ほどの153,370,371,407の4つの数が該当することになります。

$n=4$のときは、1634,8208,9474

10から9999までに7個しかない極めて稀な数であり、これらの数はナルシスト数と命名されています。このナルシスト数は有限個しかありません(他の有名数は稀に出現してもその個数は無限個であることが多い)。それは、1桁の数のn乗が非常に大きな数になることから予想できます。n桁の最大数である10^n-1に対して各位のn乗の和は$n\times9^n$ですが、十分大きなnについては、この値はn桁の最小数10^{n-1}より小さくなってしまうのです。例えば$n=100$のときは、

$$10^{100-1}-100\times9^{100}=100\times(10^{97}-9^{100})>0 \qquad (\log_{10}9^{100}=200\log_{10}3\fallingdotseq 200\times0.4771=95.42)$$

となります。ナルシスト数の全個数は87個であることが証明されています。このように数全体からみれば本当に極めて稀に出現する数であり、n乗の和が自分に戻るわけですから、自分を自分で愛でたくなる気持ちは分かりますね。

そしてその中でも153にはさらに凄い性質があるのです。

「3で割り切れる数に対して、各位の数の3乗の和を求め、さらにこの操作を続けると必ず153になる」

というものです。例えば

$$18\to1^3+8^3=513\to5^3+1^3+3^3=153 \ (2回の操作)$$

$$132\to1^3+3^3+2^3=36\to3^3+6^3=243\to2^3+4^3+3^3=99$$

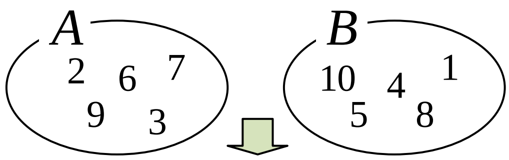
$$\to9^3+9^3=1458\to1^3+4^3+5^3+8^3=702\to7^3+0^3+2^3=351\to3^3+5^3+1^3=153 \ (7回の操作)$$

100000以下の数を調べてみると、最大14回の操作で153に収束することが分かります。すなわち、すべての3の倍数は、ほんの僅かな操作回数で153にひれ伏してしまうです。
153は鼻高々のとびっきりのナルシストというわけです。

25

………オーダーを均質化した数

1 から 10 までの自然数を、5 個ずつの 2 つのグループに分けます。
次に、1 段目に A グループの数字を小さい順に左から右へ並べ、
2 段目に、B グループの数字を大きい順に左から右へ並べます。
そして、3 段目には、左から順に各列の 1 段目と 2 段目にある 2 数を大きい数から小さい数を引いた値を入れていきます。
右がその一例です。



A	2	3	6	7	9
B	10	8	5	4	1
差	8	5	1	3	8

さてここで、3 段目にある数の和を求めてください。右表では、

$$8+5+1+3+8=25$$

あなたの計算結果はどうでしょう。25 になっていませんか。
不思議ですね。そしてこの 25 の正体はいったい何なのでしょう。

A	2	3	6	7	9
B	10	8	5	4	1
差	8	5	1	3	8

もう少し表を注意してみてみましょう。各列の大きい数から小さい数を引くわけですが、その「大きい方の数」の枠に色を塗ってください。その結果は、A 段または B 段がすべて塗られているか、そうでない場合は、B 段では左から順に塗られ、ある列からは残りすべては A 段の枠が塗られていませんか。そして塗られている枠の数は、

6,7,8,9,10

ですね。この辺に秘密がありそうです。
まず、色の塗られ方ですが、A 段は左から小さい数の順に並んでいて、B 段は左から大きい数の順に並んでいるから左に進むうちにどこかで A 段のと B 段の数の大きさが逆転することは分かりますね。
ここで、B の左端か A の右端のどちらかは 10 になりますが、B の左端を 10 としましょう(A の右端が 10 のときは、A 段と B 段を交換すればいいのです)。B 段は右へ進むと数は小さくなり、B 段の右端の数は 1 以上 6 以下の数に制限されます(B 段で、値の減り方の最小であるものは 10→9→8→7→6 となる場合だからです)。同様に A 段の右端の数は 5 以上 9 以下となります。
A 段の右端が 5 のときは、

(A 段)　1→2→3→4→5　　(B 段)　10→9→8→7→6

となり、B 段すべての枠に色が塗られます。A 段の右端が 5 以外の数 6,7,8,9 のときは、B 段の右端の数は A 段の右端の数より小さくなり A 段の右端の枠に色が塗られます。では、それはどんな数になるでしょう。
簡単です。B 段の数が左から 10→8 と変化すると、A 段の端は B 段で飛ばされた 9 が配置されてその枠が塗られます。
B 段の数の変化をみると、例えば 10→8→5→…の順に小さくなれば、A 段の右端からは B 段で飛ばされた数 9,7,6,…の順に配置されるのです(…　←6←7←9)。これから、A 段は右端から色が塗られ、B 段は左端から色が塗られ、どこかの列で色が塗られる段の境目ができることになります。ところが列の数は 5 列ですから、A 段または B 段から選ばれる大きい方の数は、6,7,8,9,10 になってしまうのです。

A	6	7	8	9	10
B	1	2	3	4	5
差	5	5	5	5	5

したがって、例えば A 段には 6 以上の数、B 段には 5 以下の数を配置しても条件は保たれ、各段の大きさの順も適当でいいことになります。そこで右表のように並べてみると、各列の 2 数の差はすべて 5 になります。よって、その和は、

$$5\times5=25$$

となるのです。
この性質は数を 1 から 2*n* にしても成立します。1～*n* と(*n*+1)～2*n* の 2 つのグループに分けたとき、求める和は、

(2 つのグループの最小値の差)×(グループの個数)　で求められ、

$$(n+1-1)\times n=n^2$$

になります。
このことを用いるといろいろな問題や面白いパズルが作れそうですね。

Ex1) 次の数を同じ個数の 2 つのグループに分け、1 段目は左から小さい順、2 段目は左から大きい順に並べて 3 段目に各列の大きい数から小さい数を引いた値を入れます。3 段目の数の和を求めなさい。

(1) 1 から 50 までの数
1～25 と 26～50 の 2 つのグループに分けると、(26−1)×25=625

(2) 12 個の奇数 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23
1,3,5,7,9,11　と　13,15,17,19,21,23　のグループに分けると、(13−1)×6=72

Ex2) 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 の 10 個の偶数を 5 個ずつの 2 つのグループに分け、1 段目は左から大きい順、2 段目は左から小さい順に並べます。3 段目は、各列の大きい数を小さい数で割った数を記入します。3 段目の数の積を求めなさい。

$$\frac{6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4\times5}=252$$

(数が偶数のため必ず約分ができて規則性が見えなくなるのがポイントです)

バラバラなグループに分けられていても大小の比較をすることで、自然にオーダーができ、でもそのオーダーも最終的には均質化されてしまうわけで、なんとなくこの性質は自然界の有り様によく似ていますね。

72

………資産を運用する数

お金を 8%の複利で預けるとき、元金が 2 倍になるのは何年後になるか、すぐに分かりますか。
これを速算で求める資産運用(倍増)の法則といわれる関係式があります。

> r% の複利で n 後に資産が 2 倍になるとき、次の関係が成立する。
> $rn = 72$

これから、$8n = 72$ より、$n = 9$ 。9 年後に元金は 2 倍なります。72 という数が登場するこの関係式は「72 の法則」ともいわれ、金融界では有名な法則だそうです。その 72 を導出するには、元金を M とすると、

$$M\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 2M \quad \cdots\cdots(*)$$

これより、rnを求めればいいことになります。

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{r}{100}\right)^{n-k}$$

ここで、$\dfrac{r}{100}$ が小さな値とみなせば、

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{r}{100}\right)^k \fallingdotseq 1 + {}_nC_1 \frac{r}{100} + {}_nC_2 \left(\frac{r}{100}\right)^2 \fallingdotseq 1 + \frac{rn}{100} + \frac{1}{2}\left(\frac{rn}{100}\right)^2$$

すなわち、$\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1 = 2 \quad \left(x = \dfrac{rn}{100}\right)$ と近似できます。$x^2 + 2x - 2 = 0$ を解くと、

$$x = -1 \pm \sqrt{3} \quad x > 0 \quad \text{より、} x = -1 + \sqrt{3} \fallingdotseq -1 + 1.732 = 0.732$$

以上より、 $rn = 100 \times 0.732 = 73.2$

72 ではなくちょっと微妙な値になっています。実は計算の過程には 3 回の近似が用いられており、その度に等式の精度は落ちているのです。そうであるなら 73.2 よりは 72 の方が約数も多いため暗算に適しているから、さらに近似してもいいじゃないか……、ということになったようです。大事な資金の運用計算なのに、随分いい加減な感じもします。

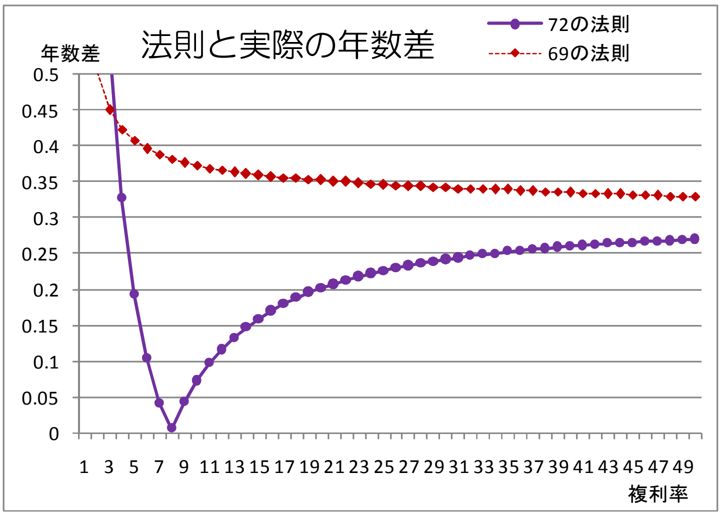
では、大仰に構えた「72 の法則」の精度はどの程度のものなのでしょう。
(*)の式からもう一度調べてみましょう。

$$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = \log 2 \quad \text{より、} n\log\left(1+\frac{r}{100}\right) = \log 2$$

これから、$n = \dfrac{\log 2}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)} \quad \cdots(**)$

金利 r を変化させて、実際の年数との差の絶対値を求めてみたのが下表および右のグラフです。

グラフより $r = 7, 8, 9, 10, 11$ ではその誤差はあまりないことが分かります(特に 8% の利率はほぼ一致します)。しかし、それ以外の値では随分差が開いてしまうものもあります。$r = 100$ のときは、当然 1 年で 2 倍になりますが、72 の法則では 0.72。$r = 1$ のときは、実際は 69. 7 年なのに 72 の法則では 72 年。この 2 年の差は大きいのではないでしょうか。



複利率	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
実際の年数	69.661	35.003	23.45	17.673	14.207	11.896	10.245	9.006	8.043	7.273	6.642	4.959	3.802	3.106	2.642	2.31	2.06	1.865	1.71	1.475	1.306	1.179	1.08	1
法則の年数	72	36	24	18	14.4	12	10.286	9	8	7.2	6.545	4.8	3.6	2.88	2.4	2.057	1.8	1.6	1.44	1.2	1.029	0.9	0.8	0.72
差の絶対値	2.339	0.997	0.55	0.327	0.193	0.104	0.041	0.006	0.043	0.073	0.097	0.159	0.202	0.226	0.242	0.253	0.26	0.265	0.27	0.275	0.277	0.279	0.28	0.28

しかし、低金利の今の時代では、年利 $7 \leqq r \leqq 11$ など望めそうにもなく、「72 の法則」は時代遅れの感は否めません。
そこで、$x \fallingdotseq 0$ のときの近似式である $\log(1+x) \fallingdotseq x$ を用いて(**)をもう一度計算してみましょう。

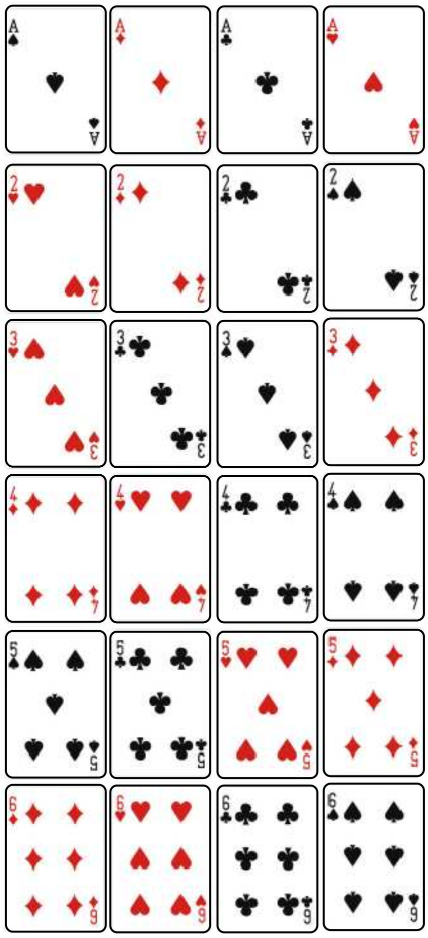
$$\log\left(1+\frac{r}{100}\right) \fallingdotseq \frac{r}{100} \quad \text{より、} n = \frac{100\log 2}{r} \quad \text{これより、} nr = 100\log 2 = 69.3$$

グラフをみると、「72 の法則」よりは全体としての精度は高くはないのですが、69.3 から得られる「69 の法則」は金利 5%以下ではたしかに有用です。これからの時代は「69 の法則」が金融界を席巻するかも…でも、ちょっとまってください。もともと 72 の法則は速算の必要性から生まれたものです。あなたの服のポケットやバッグの中には携帯やスマートフォンが入っていませんか。今は人差し指一本で簡単に正確な値を叩き出せる時代。72 や 69 の法則はすでにアナログ時代の産物なのかも知れません。

31

久しぶりに娘とトランプに興じているＳ氏。1 ゲームが終わった時、とびっきりの笑顔で娘が話かけてきた。

「ねえ、お父さん、お願いがあるんだけど」。



なんだ、こいつ突然トランプやらないっていってきたのは魂胆があってのことだったのか。

「今月ちょっとお金使いすぎてしまったの。お小遣いの前借りできないかなあ」

最近親子の会話が少なくなり寂しさを感じていたＳ氏だったので娘からのゲームの誘いはちょっと嬉しかった。なのに下心あってのことと分かり可愛さ余って憎さ 2 倍程度。父親の表情から気持ちを察してか、

「じゃあ、ゲームで私が勝ったらお願いできない。ねぇ、いいでしょう」

物事を勝敗だけで白黒つけようとする娘の安易な姿勢にまたカチンときたＳ氏。娘は多分お父さんが手心を加えてくれるだろうと思っているのだろう。

ここは世の中の厳しさをビシッと教えこまなければ。

Ｓ氏は不承不承ながら娘の挑戦を受けることにした。

「ゲームの内容は私に任せてね」

娘はテーブルの上に、ハート、ダイヤ、スペード、クラブの 1 から 6 までのカード 24 枚を並べた。

「お父さんと私が交互にカードを 1 枚ずつ取り、2 人が取ったカードの数を足していくの。合計が 31 になるカードを取ったほうが勝ち。先手はお父さんからでいいわ」

何仕切っているのだ。誰に似たやら。だいたいこれはゲームと呼ぶにはお粗末なもので先手が有利になるのは確かだ。こいつ本当にお父さんが手を抜いて負けてくれると思っているな。その甘ったれの性根を叩き直してやる。

Ｓ氏の頭の中が目まぐるしく回転しだした。最初の 1 枚が肝心だ。合計が 25 以上になっていると残り 1 回で 1 から 6 のカードのどれかを選べば合計 31 にできる。だから選んだカードで合計が 24 になっていれば、次にカードを選ぶ娘の勝利はなくなる。同様に考え、選ぶカードを遡って調べていけば、合計が 17,10 になるように 7 を減じたカードを選べばいい。ということは最初に選ぶカードは 3 ということだ。なんだほんとうに先手必勝じゃないか。

そこでＳ氏はまず 3 のカードを取った。娘は 3 のカードを選び和 6, 次にＳ氏が 4 を選んで和は目的の 10 なった。

この調子で続けていけばいい。娘 3 で和 13、Ｓ氏 4 で和 17、娘 4 で和 21、Ｓ氏 3 で和 24。ここでＳ氏は勝利を確信した。それにしてもまったく知恵を絞ろうとしない娘、誰に似たんだろう。ちょっと娘が不憫に思えてきた。

娘は、本人は知らないだろうけど敗北が確定する 1 枚を選ぶ。カードの数は 4。これで和が 28 か。さあ最後に 3 のカードを選んで終了だ。ハートの 3 は…ない。スペード・クラブ・ダイヤ…えっ、ええ!。どれもない。4 枚ともない。

顔を上げると、娘のとびっきりの笑顔があった。こいつ、最初から和を 31 にしようなんて考えていなかったな。

和が 3,10,17,24 になるように私がカードを選ぶことを知っていて、3 のカードをすべて使い切ることが目的だったのか。主導権を握っていると信じこませるように主導権を握られ、カードの選び方まで支配されていたんだ。

	父	娘	父	娘	父	娘	父
カード	3	3	4	3	4	4	3
合 計	3	6	10	13	17	21	24

世の中の厳しさをビシッと娘に叩きこまれたＳ氏であった。

では先手必勝であるにはＳ氏はどのカードを選べばよかったのでしょう。

たとえば 5 のカードを選ぶとします。そのとき娘が 2 を選べば和は 7 になるのでＳ氏は 3 を選び和を 10 にします。以降は和が 17,24,31 になるよう相手のカードに合わせて選べばいいのです。同様に娘が選ぶカードが 1,3,4 のときは、Ｓ氏は和が 10 になるように選び、娘が 6 のカードを選んだら、和が 17 になるように選び、主導権を握ります。

5 → 1 → 4
5 → 2 → 3
5 → 3 → 2
5 → 4 → 1
5 → 6 → 6

では、娘が 5 を選んだ場合はどうすればいいでしょう。これで和は 10 になり娘に主導権が握られた形になります。そこでＳ氏はカード 5 を選び続けます。カード 5 が 4 枚選ばれれば娘はもう 5 を選ぶことができないので、娘はギブアップをするか、主導権はＳ氏に移ることになります。

(これがＳ氏に対して娘がとった戦法です)。

5 → 5 → 2 → 5 → 2 → 5 → 2

ではＳ氏が他の数字のカードを選んだ場合の勝敗はどうなるでしょうか。考えてみてください。

結局、今回の話題の数は 31 ではなかったわけです。1 から 6 のカードの数字に対して、その枚数より 1 つだけ多い数字 7 がゲームの背後で活躍しており、31 から 7 の倍数を引いた数のカードを先に手に入れた方が勝利の方程式を得ることができます。その駆け引きで 7 はラッキーナンバーにもアンラッキーナンバーにも変わってしまうのです。

144

………鏡の世界の平方数

144 は 12 の平方数ですが、各位の数を並び替えた 441 もまた 21 の平方数です。このように平方数にはその各位の数を並び替えてもまたある数の平方数になっているものがあります。

$$16^2 = 256 \Rightarrow 625 = 25^2 \qquad 37^2 = 1369 \Rightarrow 1936 = 44^2 \qquad 314^2 = 98596 \Rightarrow 99856 = 316^2$$

しかし、これらの平方数の中でも 144 は面白い数の配置になっています。

$$12^2 = 144 \Leftrightarrow 441 = 21^2$$

お分かりでしょうか。12 と、12 の十の位と一の位を入れ替えた 21 は、その平方数の位の並びもまた同様に入れ替わっているのです。このような性質をもつ 2 桁の数はもう一つあります。

$$13^2 = 169 \Leftrightarrow 961 = 31^2$$

では、3 桁の数で、百、十、一の位の数をそれぞれ一、十、百の位と入れ替えた時、平方数も同様に入れ替わるような数はあるでしょうか。

3 桁の数を

$$M = 100x + 10y + z \quad (1 \leqq x, z \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq 9)$$

とします。このとき各位のを入れ替えた数は、

$$N = 100z + 10y + x \quad (1 \leqq x, z \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq 9)$$

平方数を求めると、

$$\begin{aligned} M^2 &= 10000x^2 + 2000xy + 100(y^2 + 2xz) + 20yz + z^2 \\ &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \qquad (1 \leqq a, e \leqq 9, 0 \leqq b, c, d \leqq 9) \end{aligned}$$

このとき対になる平方数は、

$$\begin{aligned} N^2 &= 10000z^2 + 2000yz + 100(y^2 + 2zx) + 20xy + x^2 \\ &= 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \end{aligned}$$

と表すことができます。ここで a と e は、1 の位または最高位の数を表してしますが、4 から 9 までの平方数で 1 の位と 10 の位が等しいものはないことより、1 桁の数となります。さらに、$a = x^2, e = z^2$ より、a 、e は平方数ですから、1,4,9 のいずれかの数です。すなわち x, z は 1,2,3 のいずれかです。また、M^2 および N^2 の各位の数をみると、$2xy = b$ 、$y^2 + 2zx = c$ 、$2xz = d$ でなければならないことも分かります。

$$0 \leqq 2xy \leqq 9 \quad \text{より、} 0 \leqq y \leqq \frac{9}{2x}$$

$$0 \leqq y^2 + 2zx \leqq 9 \text{ より、} 0 \leqq y^2 \leqq 9 - 2zx$$

これから $y = 0,1,2$ となります。

また、$x = z$ の場合は M 、N は同じ数になるため、$x < z$ とすると、x, y, z の組は

$$(x, y, z) = (1,0,2), (1,1,2), (1,2,2), (1,0,3), (1,1,3), (1,2,3), (2,0,3), (2,1,3), (2,2,3)$$

この中に求める数があります。そこで実際に、平方を計算すると、

M	102	103	112	113	122
M²	10404	10609	12544	12769	14884

5 つの数が見つかりました。

同様に、もっと大きな数について調べてみると、4 桁は 18 個、5 桁は 41 個、6 桁は 102 個あります。

そして、これらの各位の数は 0,1,2,3 のいずれかであり、その 4 つの数字がすべて用いられることはありません(たぶん)。

6 桁の数を例として挙げましょう。

$$111211 = 12367886521 \Leftrightarrow 12568876321 = 112111$$

さて、この面白い性質の最初に登場する数が、$12^2 = 144$ と $21^2 = 441$ であったわけです。

その 144 と 441 は他にも面白いパフォーマンスを披露してくれます。

$$144 = (1+4+4) \times (1 \times 4 \times 4) = 12^2$$

$$441 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 21^2$$

さらに 12 と同じ性質をもつ $13^2 = 169$ 、$31^2 = 961$ も巻き込んで、

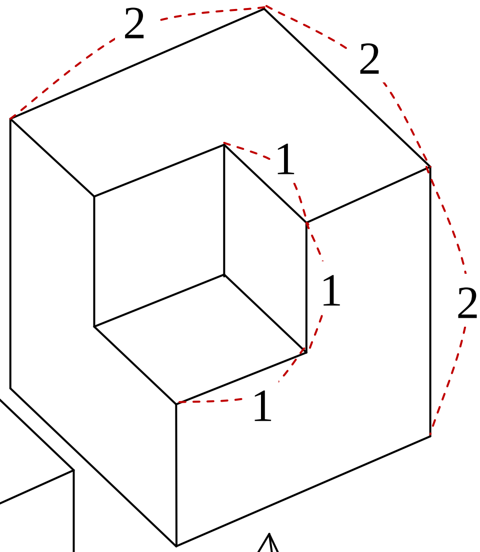
$$\frac{13 \times 10^2 - 31}{9} = 141 \qquad \frac{13 \times 10^3 - 31}{9} = 1441 \qquad \frac{13 \times 10^4 - 31}{9} = 14441 \qquad \frac{13 \times 10^{13} - 31}{9} = 14444444444441$$

左辺の分子の値が $1299999 \cdots 9999969$ と表されることがこのパフォーマンスを演出しており、数 1 と 4 の対称に配置される規則性は無限に続いていくのです。

このように数 12 は、数とその平方数がまるで鏡を立てたときにお互いに鏡像としてみえる性質をもち、144 の振る舞いは、まるでその予告編を演じているようにも思えるのです。

$\dfrac{26}{3}$

………安定視点を好む数



右図の立体の体積を求めてください。

図の立体は、「1 辺の長さが 2 の立方体から、1 辺の長さが 1 の立方体をくり抜いた図形」ですから、その体積V は、

$$V = 2^3 - 1^3 = 7$$

となりそうです。でも本当にそうでしょうか。もう一度、よ〜く、図をみてください。

気が付きましたか。実はこの図は次のようにも見えるのです。

1 辺の長さ 2 の立方体の 1 つのカドに 1 辺の長さ 1 の立方体をめり込ませた図形

小さな立方体が目の前に飛び出してきましたか。

では、この場合の体積を求めてみましょう。
大きい立方体と小さい立方体が共有する面は正三角形になりますが、この正三角形の面に沿って 2 つの立方体を切り離してみます。

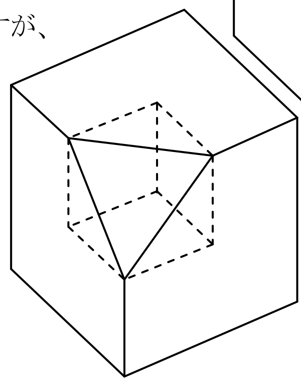
そうすると大きい立方体は、右図のようにカドを切り落とした立体になりますが、切り落としたカドは三角錐で体積V_1 は、

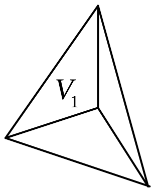
$$V_1 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1 = \frac{1}{6}$$

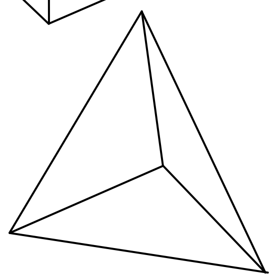
で与えられます。これより、

$$V = 2^3 - V_1 + 1^3 - V_1 = \frac{26}{3}$$

となります。







この問題は、人間の視覚認知は如何にあやふやであるかを教えてくれます。

さきほど切り抜いたカドの図形である右図のV_1 についても、もう一度よく見て下さい。

この図形はあなたの目にはどのように映っていますか。

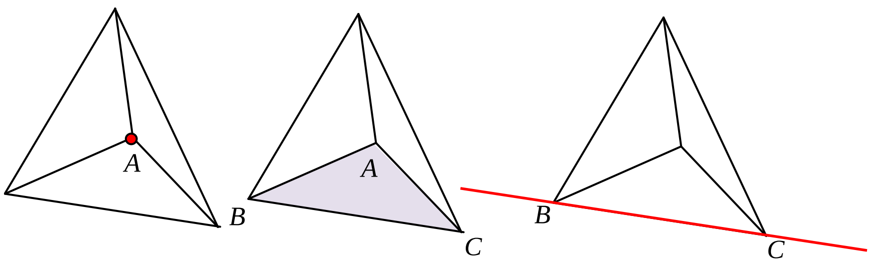
点線で表現されている辺はないので、この図形の 3 つの面はすべて見えていることになりますが、あなたの視線はそれを 2 つの視点で捉えているはずです。

「視線が頂点A にあるならば、あなたは三角錐を上から見下ろす鳥観的な視点で図形を捉えています。」

「視線が三角形ABC にあるならば、あなたは三角錐の面を下から見上げる俯瞰的な視点で図形を捉えています。」

ほとんどの人の視点はこの 2 つかと思いますが、さらに、次のように見ることもできます。

「視線が辺BC にあるならば、あなたは辺BC が床にある不安定な状態の三角錐を横から見る虫瞰的な視点で図形を捉えています。」



たぶん、この3つめの視点を意識して見ようとする人はいないと思います。それは人の視点は「安定を好む」からなのです。人は意識の中で、図形が理想の配置になるように再構築しているのでしょう(実はさらにもうひとつの視点がありますが分かりますか)。

さて、この不安定な視点ということでいえば、
先ほどの立方体についても、もう一つの見え方があります。分かるでしょうか。

目を凝らすというより、視線をおぼろげにしてみると

「天井の隅に張り付いている立方体」

が浮かんでくるはずです。まだ見えませんか。よほどあなたの目は不安定である状態を拒否しているんですね。
そういう人はこのページを逆さまにしてみてください。どうです、安定した図形が見えてきましたね。

そして、この場合の立体の体積は 1 になります。

ところで、このような立体の見え方は、大きい立方体と小さい立方体がそれぞれどう捉えているかに依ります。

大きい立方体は出っ張り、小さい立方体は引っ込む
大きい立方体は出っ張り、小さい立方体は出っ張る
大きい立方体は引っ込み、小さい立方体は出っ張る

そう捉えることで、視点の切り替えスイッチが入り、3 つの図形が見えてくるのです。

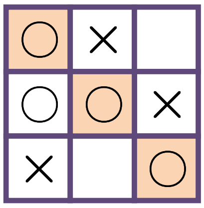
では、スイッチを

大きい立体は引っ込み、小さい立体は引っ込む

とするとどうなるでしょう……、これはまだ人が認知することのできない進化の視点なのでしょうか。

3

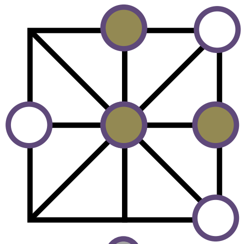
………最善の選択を模索する数



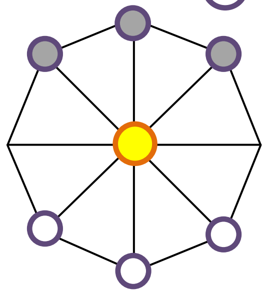
小さい頃、3 目並べ(Tic Tac Toe)にハマった人は多いことでしょう。
ルールは、図のような 3×3 の 9 つのマス目がある盤にプレイヤーである 2 人が〇と×を交互に書き込みます。最初に、縦横斜めのいずれかに自分が書く記号(〇,×)を書き並べた方が勝者になります。
このゲームは盤など用意しなくても紙と鉛筆(あるいは地面と棒)があればいつでもできます。さらに先攻と後攻が書く〇×の数は最大でそれぞれ 5 手、4 手ですから勝敗までに要する時間は 1 分足らずであり、手軽にできるゲームとして昔から世界中で遊ばれています。

イギリスのモリス、フィリピンのタパタン、ケニアのシシマ、中国の三子棋などがそうですが、面白いことに「一直線上にコマを並べると勝ち」とすることは、それぞれの国が独自に考案したルールなのです。このゲームの最古のものは、古代エジプト時代のボードゲーム「ナインメンズモリス」といわれ、「真夏の夜の夢」(シェークスピア)の第二幕第二場にも登場します。

【タパタンの遊び方】
2 人がそれぞれ 3 つのコマを持ち、順に好きな格子点に置く。
置き終えたら、順に自分のコマを線で結ばれた隣の格子点に動かす。ただし、すでにコマのある格子点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。



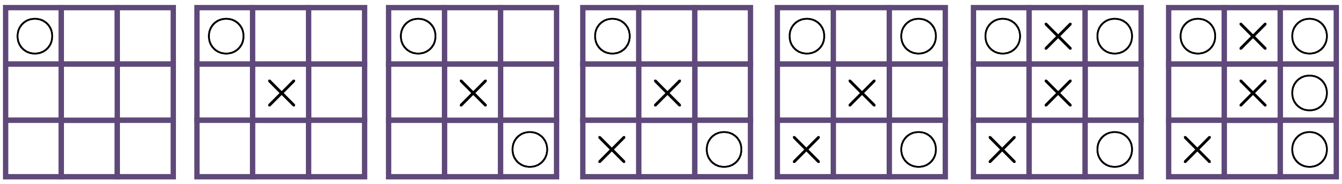
【シシマの遊び方】
2 人が〇か●のコマを決め、図のように置く。2 人が順に、コマを線に沿って空いている点に動かす。中央のシシマにも動かすことはできるがすでにコマのある点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。



さてゲームの勝敗は、先攻と後攻どちらが有利であるかは気になるところですが、置ける最大コマ数から先手が有利であることは明らかです。では後攻は不利かというとそうでもないのです。このゲームは、先攻と後攻が「最善の置き方」に従いゲームを進めると、、常に引き分けに持ち込めることが知られています。
その「最善の置き方」は次のとおりです。

① 2 つ並んでいれば、3 つめのマスに置く。
② 相手が 2 つ並んでいれば、その 3 つめのマスに置く。
③ 2 段目の中央のマスに置く。
④ 隅のマスに置く。

①は勝つために攻めること、②は負けないために守ることであり、当たり前のことです。③、④のマス目が確保できるどうかが勝敗の鍵を握りますが、「最善の置き方」で攻め凌ぎ合いを進めると 9 つのマスがすべて埋まり引き分けになるのです。ただこれはあくまで双方が「最善の置き方」をした場合です。先攻が③ではなく④を置き、後攻が「最善の置き方」をすると、先手が勝ってしまうこともあります。ただその場合も、後攻は「注意深く最善の置き方」をすると引き分けに持ち込めます。



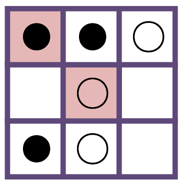
このように三目並べは引き分けになる確率が高いため、1 回のゲームで勝敗が決まることは稀です。「最善の置き方」を心がけゲームの回数を重ね、集中力が切れてどちらがミスを犯すときに決着がつくのです。お手軽ではあるけど持久戦ゲームでもあるのです。そこで、三目並べの改良ゲームも作成されています。例えば、三目並べのルールを次のように変更します。

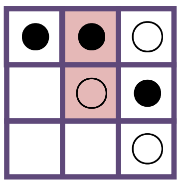
2 人がそれぞれ 3 つの〇と●をもち、三目並べの要領に交互に並べます。3 つとも並べて勝敗が着かない場合は、交互に盤上に置かれた〇と●を空いている上下、左右のマスに移動させ、一直線上に並べた方を勝ちとする。

この三目並べをオヴィディウスのゲームといいます。日本では「みつならべ」として知られており、タパタン、シシマは盤を改良したものであり、さらにルールを複雑にし難易度を高くしたものがナインメンズモリスなのです。
そして、このオヴィディウスのゲームは、先攻〇の第 1 手を、盤上の 2 段目中央におくことで先手必勝になります。後攻●の第 1 手は、上段の左隅か上段の中央として考えると、先攻の第 2 手の置き方で右番の配置になるように後攻の手を操作することが可能になります。
〇と●が 3 個ずつ右図のように置かれた後は、上下と左右にコマを 1 マス移動し、ゲームを進めますが、先攻〇は残り 2 手で勝つことができます。

後攻 1 手め 上段の左隅

後攻 1 手め 上段の中央





このゲームは、最初の〇●の 3 つずつの置き方についてもルールが必要なのです。
1983 年公開の映画「WarGames」(米)は、大きな話題となりました。仮想空間での世界戦争シミュレートゲームが、パソコンの暴走により現実の核戦争の危機を引き起こしそうになるという内容でしたが、そのラストで、クラッカーである主人公は米ソのコンピュータにアクセスし、三目並べのゲームを組み込みます。対戦を始めた両国のコンピュータシステムは、「最善の置き方」で応酬し、引き分けを繰り返すうちにやがて「勝者はいない」ことを学ぶのです。
数 3 は、社会を作る数と言われます。夫婦 2 人に生まれる一粒種は家族を平和にします。2 人の後の 3 人目の子どもの誕生は、こどもたち 3 人の情緒と生活を安定させます。3 本足の椅子がガタつくことなく床に固定されるように、三位一体を表す数 3 は、いつでも最善の方法を模索し選択しているのです。

7

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

毎月 22 日は何の日か知っていますか。

正解は、「ショートケーキの日」。ショートケーキが日本で初めて売られた記念日かというとそうではありません。カレンダーで 22 日の上(前週の同じ曜日)に位置するのは 15 日。だから「イチゴが上に載っている日」なのだそうで、ケーキ屋さんが考えたちょっとしたウィットある美味しい日なのです。

カレンダーの日にちは週 7 日を 1 行として配置されるため、曜日を表す各列の中の日にちは、公差 7 の等差数列になります。

この性質を用いた簡単なカレンダー・マジックを紹介しましょう。

> カレンダーのある月から、縦 3 列、横 3 行を選びます。選んだ正方形の中には 9 つの日にちがありますが、その和を 9 つの中から一番小さい日にちだけを知ることで求めることができるでしょうか。

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

8	9	10
15	16	17
22	23	24

-8	-7	-6
-1	0	1
6	7	8

例えば、右図の正方形を選ぶときの和はどうなるでしょう。すべてを足さなくとも、最小数である 8 をみるだけで瞬時に 144 になることを知ることができるのです。まず正方形内の中央にある日にち 16 に注目します。この日数を 9 つの日にちから引いてみましょう。数の配置のしくみがみえてきます。正方形内の日にちの和が 0 になることが簡単に分かるでしょう。ということは、もともとの日にちの和は、減じた 16 日の 9 つ分ですから $9\times16=144$ になります。では、中央の数 16 と一番小さい日にち 8 との関係はどうなっているのでしょうか。16 日は、8 日を 1 日進め、その 1 週間後ですから、$8+1+7=16$

すなわち、一番小さい日にちに対して中央にある日にちは 8 を加えたものということになります。以上のことから、「最小数に 8 を加え 9 倍」を計算することで和が簡単に求められるのです。例えば、一番小さな日にちが 3 日であれば、作られる正方形内の日にちの和は、$(3+8)\times9=99$ となります。

次に、この原理を用いてもう少し複雑なマジックを考えてみましょう。

> カレンダーのある月の日にちを、縦 4 列、横 4 行になるように囲み 16 個選びます。一番上の行の中から適当な日にちを選び、その日にちと同じ行(週)と同じ列(曜日)にある日にちすべてに×をつけます。次に 2 行目の週では、×のついていない日にちを選び、同様に、同じ行と列にある日にちに×をつけます。3 行目、4 行目についても同じルールで日にちを選びます。結局、各週から 4 つの日にちを選んだことになりますが、この 4 つの数の総和を最初に囲んだ 16 個の日にちを見るだけで瞬時に求めることができるでしょうか。

各週の日にちはどう選ばれるか分からないわけですからその和を予測することは難しいように思われます。そこで実際に下図のように選んでみましょう。この場合、8 日、13 日、23 日、28 日の順に選ぶので、和は、$8+13+23+28=72$ となります。

さて、一見するとバラバラに日にちを選んでいるような見えたのが、書き抜いてみると、同じ行と同じ列を消すことにより、実は各週から選ばれる曜日はみな異なっていることが分かります。

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	14	~~15~~	16
20	21	~~22~~	23
27	28	~~29~~	30

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	21	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	30

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	~~30~~

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	~~30~~

6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9

その関係を見やすくするために、2 行目、3 行目、4 行目の各週の日にちから、それぞれ 7,14,21 を減じてみましょう。右図のように、各週の日にちはすべて 1 週目と同じになり、和は、各週からどのように日にちを選んでも必ず $6+7+8+9=30$ になることが理解できます。これに先ほど減じた日数の和、$7+14+21=42$ を加えればいいわけですが、これでは直接選んだ 4 つの数を足した方が計算は速いわけで、瞬時というわけにはいきませんね。でもよく考えてください。各週からどのように日にちを選んでもいいのであれば、正方形の左上の隅から右下の隅の対角線方向に選んでもいいのです。このとき、ある週の翌週の日にちは、1 日進め、さらに 1 週進めた位置にあることより 8 を加えた日にちになります。これから、対角線上に並ぶ数は、公差 8 の等差数列になり、その和は

「対角線の両端にある最小数と最大数を加えたものの 2 倍」

になります。すなわち、$(6+30)\times2=72$。これででたらめに選ばれているように思える和が瞬時に求められるのです。

1 年 365 日は、7 で割ると、$365=7\times52+1$ であり、52 週と 1 日分になります。7 で割り切れればすっきりするように思えますが、そうすると毎年元旦は同じ曜日になってしまい、何か 1 年間がマンネリ化してしまいそうです。1 日分ずれるからこそ曜日の変化を楽しめ、一年の計は元旦にありと決意し、新年に気持ちを新たにすることができるのかもしれません。数 7 は、人間の背中をほんのちょっと押してくれているようです。

216

……フェルマーに愛されなかった数

216 は 6 の立方数ですがこれといって面白い性質はないように思えます。でも

$$6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$$

と連続する整数の立方数の和として分解できる凄い奴なのです。

同じような関係は $5^2 = 4^2 + 3^2$ にみることができますが、連続した整数 x, y, z, w で、$x^n + y^n + z^n = w^n$ と分解できるは 216 だけなのです。このように、ある数の n 乗が幾つかの n 乗した整数の和になる性質としてはピュタゴラスの定理があります。

ピュタゴラスの定理を満たす 3 つの整数の組は、奇数 $2k-1$ を平方した数を連続する 2 整数に分ける方法が有名です。

$$(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = (2k^2 - 2k) + (2^2 - 2k + 1) \quad \Rightarrow \quad (2k-1)^2 + (2k^2 - 2k)^2 = (2k^2 - 2k + 1)^2$$

たとえば、$5^2 = 25 = 12 + 13$ より、$5^2 + 12^2 = 13^2$。さらに、$3^2 = 9 = 4 + 5$ であることより、$13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$ 3 つの平方数の和として表すことも可能です。一般に、円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = mx - 1$ の交点の x, y 座標は有理数であることより、ピュタゴラスの定理を満たす 3 整数 x, y, z (ピュタゴラス数)は、

$$x = 2m\ ,\ y = m^2 - 1\ ,\ z = m^2 + 1 \ \Rightarrow\ (2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$$

となります。この関係を 3 次元としてみると、球と直線の交点を求めることにより、$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ を満たす整数の組は、

$$x = 2s\ ,\ y = 2t\ ,\ z = s^2 + t^2 - 1\ ,\ w = s^2 + t^2 + 1 \ \Rightarrow\ (2s)^2 + (2t)^2 + (s^2 + t^2 - 1)^2 = (s^2 + t^2 + 1)^2$$

3 次元ピュタゴラス数が得られます。例えば、

$s = 2, t = 3$ のとき、$4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2$ より $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$s = 2, t = 5$ のとき、$4^2 + 10^2 + 28^2 = 30^2$ より $2^2 + 5^2 + 14^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2 = 15^2$

4 つの平方数の和も表現できますが、実は、曲線と直線の交点から有理数解を得る方法は、n 次元に対しても有用です。

$$x_1 = 2s_1,\ x_2 = 2s_2,\ x_3 = 2s_3,\ \cdots,\ x_{n-1} = 2s_{n-1},\ x_n = {s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + s_{n-1}^2 - 1,\ x_{n+1} = {s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + s_{n-1}^2 + 1$$

とすると、

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2$$

が成立し、n 次元ピュタゴラス数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$ が得られます。例えば、

$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 3,\ s_4 = 5$ のとき、 $2^2 + 4^2 + 6^2 + 10^2 + 38^2 = 40^2$ より、 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 19^2 = 20^2$

$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 3,\ s_4 = 4,\ s_5 = 5,\ s_6 = 6,\ s_7 = 7$ のとき、 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 45^2 = 46^2$

それでは、3 乗数を 3 つの 3 乗数の和で表現するにはどうすればいいでしょう。次の関係式を用います。

$$x(x - 2y)^3 + y(2x - y)^3 + y(x + y)^3 = x(x + y)^3$$

この式で、x, y 自体を 3 乗数とすればよいのです。

例えば、$x = 3^3,\ y = 1^3$ として代入すると、

$3^3 \times 25^3 + 1^3 \times 53^3 + 1^3 \times 28^3 = 3^3 \times 28^3$ より、$28^3 + 53^3 + 75^3 = 84^3$

また、$x = 2^3,\ y = 1^3$ とすると、

$2^3 \times 6^3 + 1^3 \times 15^3 + 1^3 \times 9^3 = 2^3 \times 9^3$ より、$12^3 + 15^3 + 9^3 = 18^3$。ここで両辺を 3^3 で割ると、

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

数 216 の美しい関係式が得られました。では次の関係式を満たす整数の組はあると思いますか。

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad \cdots ① \qquad x^4 + y^4 + z^4 = w^4 \quad \cdots ② \qquad v^5 + w^5 + x^5 + y^5 = z^5 \quad \cdots ③$$

②はその存在はまだ証明されてはいません。①はスイスの数学者オイラー(Leonhard Euler)が存在しないことを証明しました。オイラーは①を拡張し、n 乗数は、$(n-1)$ 個の n 乗数の和として表せないことを予想しました。しかし、近年、③は、

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

がコンピュータ計算により見つけられています。しかし、②についてはまだ解決されてはいないのです(4 つの 4 乗数で表される唯一の 4 乗数は、$353^4 = 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4$ が見つけられています)。

ところで、オイラーが存在しないことを証明した①は、オイラーより 100 年前のフランスの数学者フェルマー(Pierre de Fermat)の次の予想に端を発しています。

「3 以上の自然数 n に対して、$x^n + y^n = z^n$ を満たす、自然数の組 (x, y, z) は存在しない」

フェルマーは、この証明に関して

「私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを記すには狭すぎる」

と遺稿の蔵書に書いています。定理の単純さとフェルマーの挑発とも思える書き置きは、数世紀にわたり、「フェルマーの最終定理」として、数学者の心を魅了し続けました。そして、ついに、360 年後の 1995 年、イギリスのワイルズ(Andrew John Wiles)により、「フェルマー・ワイルズの定理」として予想が正しかったことが証明されたのです。そのことは、同時に整数の組の存在を信じたアマチュア数学者の淡い夢が潰えた瞬間でもあります。

立方数 216 のもつ性質は、フェルマー予想のひとつの過程の中で導かれたものですが、フェルマーの非存在の整数組に対して、その存在は美しいものです。「確かにここにいるよ」。私達にまだ信じることの希望を残してくれているのです。

18

　18 の約数 1,2,3,6,9,18 の積は、

$$1\times2\times3\times6\times9\times18=18^3$$

ここで、

$$18^3=5832$$

ですが、各位の数の和を求めると、

$$5+8+3+2=18$$

18 に戻ってしまいます。18 は過剰数でその約数が多いことがこんな演出をしているのでしょうか。
18 の累乗で、同じように 18 に戻ってしまうものがないか調べてみましょう。
まず、18 の 5 乗です。

$$18^5=1889568$$

桁の中に 18 がちょっと顔を出します。ここでは和でなく各位の数の積を求めてみます。

$$1\times8\times8\times9\times5\times6\times8=138240$$

そして各位の数の和を計算すると、

$$1+3+8+2+4+0=18$$

18 に戻ることができました。6 乗はどうでしょうか。

$$18^6=34012224$$

今度は、各位の数の和を求めてみます。

$$3+4+1+2+2+2+4=18$$

簡単に 18 に戻りました。7 乗についても、

$$18^7=612220032$$

各位の数の和は、

$$6+1+2+2+2+0+0+3+2=18$$

　このように、18 の累乗で、3 乗、6 乗、7 乗は各位の和が元の数 18 に一致しますが、このように「累乗した各位の数の和が元の数に等しい」性質を有する数はそれほど多いわけではありません。1 を除けば、

3 乗 $\Rightarrow$ 8,17,18,26,27　4 乗 $\Rightarrow$ 7,22,25,28,36　5 乗 $\Rightarrow$ 28,35,36,46　6 乗 $\Rightarrow$ 18,45,54,64

僅かな個数であり、その中では 18 のように 3 乗、6 乗,7 乗で 3 回も顔を出すのは稀なのです。
　さて、ここまできたら、8 乗も計算してみましょう。

$$18^8=11019960576$$

各位の数の和は、

$$1+1+1+9+9+6+5+7+6=45$$

随分大きな値になってしまいました。さすがにこれを 18 にするにはちょっと厳しそう。では、0 を除く各位の数の積はというと、

$$1\times1\times1\times9\times9\times6\times5\times7\times6=102060$$

これを先ほどの各位の数の和 45 で割ると、$102060\div45=2268$
2268 の各位の和は、$2+2+6+8=18$
これはいくらなんでもこじつけでしょうか。
9 乗はというと、

$$18^9=198359290368$$

各位の数の和は、

$$1+9+8+3+5+9+2+9+3+6+8=63$$

63 の各位の数の積は 18 ですね。もうそろそろ終わりにしましょう。最後は 10 乗。

$$18^{10}=3570467226624$$

0 を除く各位の数の積を求めると、

$$3\times5\times7\times4\times6\times7\times2\times2\times6\times6\times2\times4=20321280$$

さらに、積の値の各位の数の和は、

$$2+0+3+2+1+2+8+0=18$$

　これでお終い…といいたいところですが、4 乗を飛ばしていましたね。

$$18^4=104976$$

　どうすれば 18 に戻るでしょうか。(各位の数の和の積と各位の積を考えてみてください)。でも 4 乗の場合は 18 に戻すことなどどうでもよくなるような不思議な性質があるのです。この各位の数の並びをみて何か気が付きませんか。18 の 3 乗の値、

$$18^3=5832$$

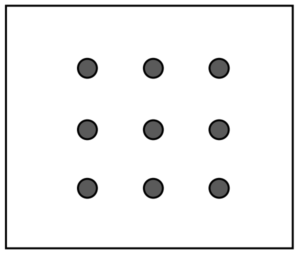
と比較してみると、凄いことが起きているのが分かるでしょうか。なんと 3 乗と 4 乗の各位の数をみると、0 から 9 までの 10 個の整数がただ 1 回だけ現れているのです。こうなると、もうこじつけや偶然と言えるでしょうか。神様のちょっとした悪戯としか思えないのです。

10

………思い込みから数学に導く数

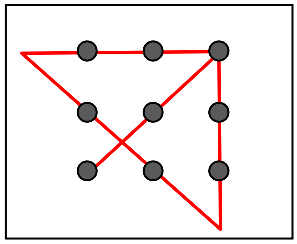
数10には多くの性質がありますが、今回の話題はその性質とはまったく関係なく、あるパズルの条件が10になるというだけです。人間社会を10進法で取仕切っている数10には甚だ失礼な話なのですが……。

そこで問題です。



> 紙の上にある9つの点を連続した折れ線で結ぶとき、少なくとも何本の直線が必要でしょうか。

有名なパズル問題ですから、挑戦したことがある人も多いことでしょう。パズルを一筆書きの問題とみると、4隅の4点は、縦横斜めの3本の直線の交点のため、奇点は4つあります。オイラーの一筆書きの定理(奇点の個数は 0,2 のときだけ一筆書きは可能)より、一筆書きは不可能であることが分かります。したがってパズルを解決するには柔らかな発想が要求されるのです(それゆえにパズルなのですが)。



では、解答を示しましょう。図のように折れ線の傘をつくると4本の直線で結べます。

パズルを解決できなかった人の多くは、結ぶ線分を9点で作られる正方形の周および内部に限定してしまったのではないでしょうか。9 つの点をみる目は、無意識に点を結び、正方形の枠を補っていまうのです。しかし、問題のどこにもそんな制限などありません。図形から直線をはみ出すことにより、奇点の数は 2 個になり、一筆書きが可能になるわけです。これから、必要な線分の本数は 4 本というのがこのパズルの一般的な解答です。解答に続き感想として「思考に思い込みという制限を設けないようにする」とコメントしているものも多いようです。でも、思い込みは、「正方形の枠に限定する」という制限だけなのでしょうか。

実は、まだ多くの思い込みがあるのです。幾つか挙げてみましょう。

◯紙の上の点は大きさがないとはいっていない。半径のある円●としてみれば直線が円の内部の通り方により3本で可能。

◯線に幅がないとはいっていない。9点を含むような太い線■を引けば1本で可能

◯紙を切ったらダメとはいっていない。横に3分割にして切り、紙をつなぐと1本で可能。

◯紙が平面上に置かれているとはいっていない。地球上にあるなら、各列の3点を経度線上に並べる。そうして、1列目を含む直線を、紙をはみ出して北極点まで結ぶ。次に北極点から 2 列目を含む直線を南極点まで結び、さらに南極点から 3 列目を含むように結ぶと3本で可能。

◯紙を巻いたらだめとはいっていない。円柱に張り、1本の糸をらせん状に巻きつけその上に9点を置けば、1本で可能。

◯紙を折ったらダメとはいっていない。1列目と3列目が2列目に重なるように紙を折れば1本で可能。

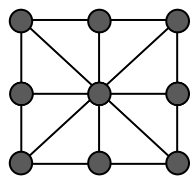
◯直線が紙の上にあるとはいっていない。9 つの点をマス目の中央になるように、紙を 9 つにたたみ、紙に垂直に直線を通せば1本で可能。

◯直線が等間隔に並んでいるとはいっていない。2列目が1列、3列めと平行でないなら、1列目と2列目、2列目と3列目を通る直線は交わるので、3本で可能。

まだこれ以外にも、リミッターの掛かっている部分があるかも知れません。考えてみてください。

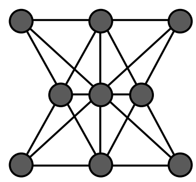
しかし、これらの解答は、点、直線、平面の定義およびその解釈を緩めたことによるものであり、「数学的」であるとはいえないでしょう。点は大きさ・面積はないもの、線は太さのないものですから、本当はユークリッド幾何学での平面や直線で問題を考えるべきなのです。そうすると上述の解答で認められるものはどれでしょうか。

そこで、この問題を「数学の問題」としてアレンジしてみましょう。



> 右図の9点は、3点を含む直線を8本用いて結んでいます。点を適当に動かすことで、直線を10本用いて結んでください。

(解答)

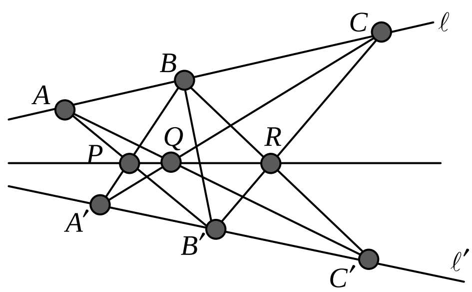


1行目の各点と3行目の各点の交点を通るように、2行目の点を移動させると、右図のように、10本の直線を引くことができます。ただ、この点の配置で2行目の3つの交点は一直線上に並んでいるかということは、疑問ですね。このことを保証しているのは「中線連結定理」であることは明らかです。

では、これ以外の解はないのでしょか。

アレキサンドリアのパップスの知恵を借りてみましょう。

> 2直線ℓ, ℓ' 上の3点をそれぞれ$A, B, C; A', B', C'$ とする。
> 線分AB' と$A'B$, BC' と$B'C$, AC' と$A'C$ との交点を
> それぞれP, Q, R とするとき,この3点は一直線上にある。



定理の証明は、メネラウスの定理の逆を用いて容易に得られます。パップスの定理により点を配置し、ℓ 上の点B を点Q が線分BB' 上にあるように動かすとパズルの一般解が得られます。

今の時代でも頭を悩ませるこのパズルは、パップスが活躍した4世紀の頃には数学の問題として既に解決されていたのです。数学って凄い学問ですね。

145

……… ロンリーナンバー

145 は、$1^2+12^2=8^2+9^2=145$ であり、2 通りの平方数の和として表される数です。また、$145=3^4+4^3$ も面白い性質かもしれません。しかし 145 の特筆すべき性質は、

$$145=1!+4!+5!$$

お分かりでしょうか。145 は、それ自身が各位の数の階乗の和として表されるのです。
このような性質の数をファクトリオン(factorion)といいます。
$n!$ は、自然数 1～n の積を表しますが、その値は

$$10!=3628800$$

10 に対してびっくりするような大きな値になるため！マークを記号にしたようで、！はファクトリアル(factorial)と読みます。日本語では、n から順に 1 ずつ階段状に減じて乗ずることから階乗といいますが、階乗の値を縦に並べてみると、階段状に配置されるとみてもいいでしょう。ファクトリアルは「ひゃくとおりある」と洒落て読むこともあります。

$1!=1$
$2!=2$
$3!=6$
$4!=24$
$5!=120$
$6!=720$
$7!=5040$
$8!=40320$
$9!=362880$
$10!=3628800$

これだけ大きく膨張する階乗の値ですから、実際の数値で示すことは難しいため、近似値で表現することがあります。オイラーと同世代であるスコットランドのスターリング(James Stirling)が考案したスターリングの公式(近似式)を紹介しましょう。

$$n!\fallingdotseq\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

証明は、両辺に自然対数をとった $\log n!=n(\log n-1)$ の左辺を積分により面積計算することで求められます。
しかし、この近似は n が大きくなると誤差も開き、精度としては高いものではありません。
そこで、スターリングの公式を、ウォリスの公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)((2n!))^2}$$

を用いることで、次のように改良します。

$$n!\fallingdotseq\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

この近似公式は、n が大きくなればより精度が高くなり、$n=100$ のときは、実際の数値との比の値は 0.999 であり、ほぼ実際のの値と一致するのです。そしてこれらの公式をみると、ウォリスの公式からは、円周率 π は階乗数により近似できることが分かり、さらにネイピア数 e は、

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

で得られるのです。
円周率 π 、ネイピア数 e のような超越数を表現できる階乗ですが、それでは、各桁の階乗の和として表されるファクトリオンはどれだけ存在するのでしょうか。
$1!=1,\ 2!=2$ ですから、この 2 数はファクトリオンですが、自明過ぎて価値のないものです。では 1,2 と 145 以外のファクトリオンはどれだけあるかというと、

$$40585=4!+0!+5!+8!+5!$$

唯一これだけなのです。数 145 は、1964 年に R.ドハーティがコンピュータ計算の検索により、見つけた最大のファクトリオンであり、これ以外には存在しないことも証明されています。
$(n+1)$ 桁の数 A を、

$$A=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+a_{n-2}\times10^{n-2}+\cdots+a_1\times10+a_0 \qquad 0\leqq a_i\leqq9,\ \ a_n\neq0$$

とします。

$$10^n\leqq a_n\times10^n\leqq A=a_n!+a_{n-1}!+\cdots+a_1!+a_0!\leqq9!(n+1)$$

ここで、$9!=362880$ であることより、

$10^n\leqq362880(n+1)$ 。これを解くと、$n\leqq6$ 。

7 桁を超えるファクトリオンは存在しないわけで、ドハーティが計算した 40 年前に比べ、いまでは、7 桁程度の演算であれば Excel の VBA では数秒で計算でき、40585 だけの出力をみることができます。ちなみに、同様に VBA を用いると、ファクトリオンより 1 不足する数は、

$$1466=(1!+4!+6!+6!)+1 \qquad 81368=(8!+1!+3!+6!+8!)+1$$

ファクトリオンより 1 過剰な数は、

$$372973=3!+7!+2!+9!+7!+3!-1$$

であることも簡単に求められます。
このようにファクトリオンに近い数もほとんど存在しないのです。超越数を表現したり、素数階乗では素数が無限個あることを証明したりと、多くの活躍の場を見出す階乗なのですが、自身を表すことは難しく、自己にも厳しい孤高の数なのです。

男A,B,Cの3人と、女Wの1人が、2人乗りのボートを借りて向島に渡ることにした。ボートを操縦できるのはAだけである。AはWに想いを寄せているので、WをBやCとは絶対に2人にしたくない。Aはどのような順番で3人を運べはいいだろうか。

当然、最初にボートに乗せるのはWであり、Aはボートの中でより2人の距離を縮めようとするでしょう。島に到着したら、一人で岸まで戻り、折り返しBを乗せて運びます。島についたら、一人で戻ってしまうとBとWが一緒にいる時間ができるため、二人を離すため、Wに「途中でイルカの群れが泳いでいたよ。見てみない。」とでもいって、ボートに乗せ、一緒に岸まで戻ります。岸についたら、Wを降ろし、Cを乗せて島まで運んだら、全速力で岸に戻り、最後にWを乗せてからゆっくりとデート気分で遊覧をすればいいのです。

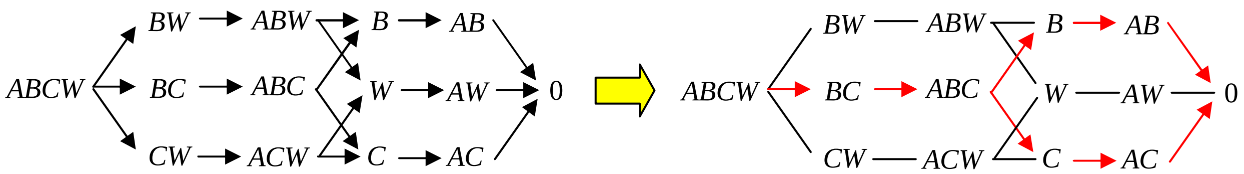
この問題の出典は古く、8世紀の頃に「ある農夫がオオカミとヤギとキャベツを川向うまで舟で運ぶにはどうすればいいか」(オオカミはヤギを食べ、ヤギはキャベツを食べる)という内容で当時の大帝への娯楽用問題としてお抱えの数学者が考えたものであり、川渡り問題と呼ばれています。

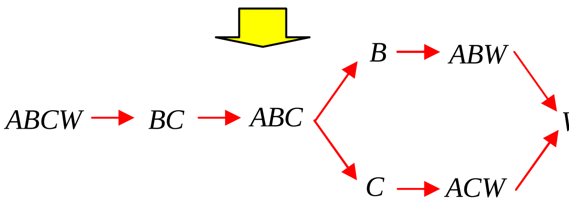
古典的な問題ではあるのですが、題材として近代数学の一分野に関わる重要な概念が含まれています。

4人の男女を点、ボートの行き来を線とみなすと、この問題は岸に残る男女の組合せである点をどのように線で結ぶかということになります。点の組合せは、2^4から、Aのみの場合を除くと15通りあり、ABCD⇒0にすることができれば完成です。

一番最初に渡るのは4人のうちでAとあと一人ですから、岸に残る人の組合せは3通りあります。Aが戻ってきたあと、2回目は、Aとさらに1人が減るため3通り。このように組合せを考え0に導きます。その経路の中からBWおよびCWの組合せは認められないため、関係する点および線を削除し、Wの位置を考慮すればよいのです。

このように、点(node)と線(edge)をつないでできる図形を「グラフ」といい、グラフを用いて種々の問題を解く数学の分野を「グラフ理論」といいます。グラフ理論は、「ケーニヒスベルクの橋の問題」をオイラーが一筆書きで解いたことを起源として研究が続けられたものです。

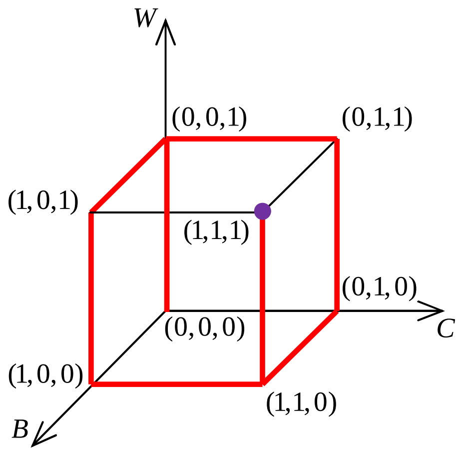




ところで、この問題は、点と線の配置を空間的に捉えることで、鮮やかな解答を用意することができます。

点Aは、常に線の上を移動しているため考える必要はないので、残りのB,C,Wを成分とする空間(B,C,W)を作ります。各成分が0のときは手前の岸に、1のときは向こう岸にいるとしましょう。例えば、(0,1,1)は、Bが手前の岸、C,Wが向こう岸にいることを意味します。そうすると問題は、(0,0,0)→(1,1,1)の経路を図の立方体の辺の移動で求めればいいことになります。なおこの中で、条件に反する経路は除きます。例えば、(1,0,1)→(1,1,1)は、Cが向こう岸に移動する間、BとWは一緒にいることになるため認められないということです。すなわち、AWまたはBWの行き来の端点の数0,1が一致している辺は通れないことになります。そうして作った経路が右図であり、これから容易に移動方法を読み取ることが可能なのです。

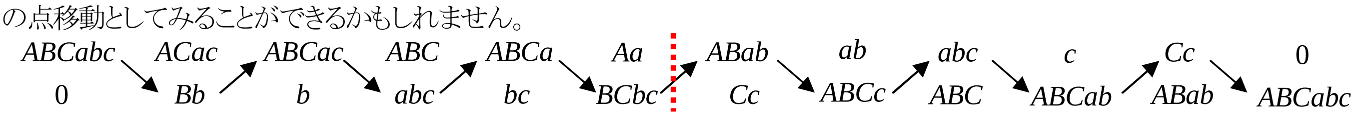
ただ、この方法は、BCWの3人に対し3次元空間を張るわけですから、さらに人数が増えると 応用することはできません。



3組の男女のカップルA-a,B-b,C-cが2人乗りのボートで向こう岸まで渡りたい。ボートは6人全員が漕ぐことができるものとする。ただし、どの彼氏もみなヤキモチであるため、自分がいないときに彼女が他の男と一緒にいることは絶対に認めない。このわがままな要求を満たし、全員が川向うまで渡るためにはどのようにボートに乗り移動すればいいだろうか。

この問題は前述の川渡り問題から遡ること50年前にパズル誌に掲載されたものです。こちらの問題の方が先に考案されたことになるのです。前述の問題はこの問題を皇帝のために初級レベル用にアレンジしたということでしょうか。

さて、条件としては人数が増えたばかりでなく人間関係も複雑になっています。これも点と線を結び経路を作ると解答が浮かび上がってきます。その1つが次に示す経路であり11回の行き来で全員が川向うに渡ることができます。ただ、この経路をよくみると、$Aa-BCbc$から$ABab-Cc$へと変わる箇所で対称的な移動に転じていることが分かります。ちょっと工夫すると空間の点移動としてみることができるかもしれません。



666

………ビーストナンバー

「オーメン」(リチャード・ドナー監督)は、35 年前に公開されたオカルトブームに火をつけた映画。6 月 6 日 6 時に頭に 666 の数字を刻まれて誕生した悪魔の子ダミアンの物語です。666 は、新約聖書の最終巻である「ヨハネの黙示録」(アポカリプス)の中の 13 章 18 節に記載される海よりいでた第二の獣に従うモノたち(人間)に刻印された数字であり、この数字は数秘術ゲマトリアでは「獣の数字」といわれています。人の存在そのものに悪魔の刻印を押しているのです。

6 は神が完全な数と考える 7 より 1 少ない不完全な数であり、それを 3 つ連ねて、666 は甚だ不完全な数(人間)という意味をもたせており、反キリスト教の象徴数として扱われます。キリスト教を迫害したネロ皇帝の名前をヘブライ語で表した数値は 666 になります。マルチン・ルター、アドルフ・ヒトラーなどもラテン語、ローマ数字などで読み替えていくと数値 666 になるようですが、読み替えは、どうにでも関連付けることは可能であるため、「都合のいい解釈」ともいえます。

666 を構成している 6 は、自身を除く約数の和は、$6=1+2+3$ であり、最小の完全数です。6 は数としては完全でありながら、不完全な数の一部として嫌われ、相矛盾している有様が、如何にその解釈が適当であるかを語っています。

したがって、666 の数の性質についても、適当な理由をつけることで、みつけだすことも可能ということです。

例えば、べき乗数との関係をみてみましょう。

自然数の和では、　$666=1+2+3+4+5+6+\cdots+(6\times6)$

2 乗数の和では、　$666=\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots(6\times6)^2}{1+6+66}$

3 乗数の和では、　$666=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3$

その一部をみると、　$6\times6\times6=6^3=5^3+4^3+3^3$

さらに、6 乗数では、　$666=1^6-2^6+3^6$

このように 666 はべき乗和として表すことができますが、そのべき乗数の配置はあまりにも美しいのです。

さらに、素数を小さい順に 7 つ抜き出し、その平方の和を求めてみましょう。

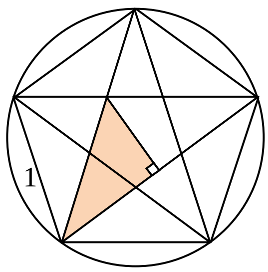
$$666=2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$$

ここまでくると、こじつけであるとは言いがたくなります。

次に、666 を 6 進数で表してみましょう。$666=3030_{(6)}$　これから、

$$666=3\times6^3+3\times6=6^3+6^3+6^3+6+6+6$$

$666°$ の三角比の値はもっと驚くべき結果を導きます。$666°=7\times90°+36°$ ですが、$36°$ は円に内接する正五角形の対角線を結んでできる五芒星形(ペンタグランマ)の頂角の大きさです。正五角形の一辺の長さを 1 とするとき、対角線の長さは、自然界でもっとも美しいと言われる黄金数 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ で与えられます(対角線の長さを x とし、トレミーの定理を用いると、$x^2-x-1=0$ の解として得られます)。右図の直角三角形に三角比を考えると、



$$\sin 666°=-\cos 36°=-\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$666°$ の正弦の値は黄金数の $-\dfrac{1}{2}$ 倍。地上界と悪魔界の出入口であるペンタグランマから黄金数が生まれ、獣の数 666 の中に封じ込められているのです。三角比は円周率 π と深い関わりをもちますが、円周率の小数点以下の 144 桁までの各桁の数の和は 666 になります。3 つの 6 で示される 666 は、神の左手、悪魔の右手、どちらなのでしょうか。

次に 666 の平方を計算してみましょう。$666\times666=443556$

なにも起こっていないように思えますが、6 を連ねた $666\cdots666$ の平方した結果を並べて書いてみると、右のような数のピラミッドが作られます。どの数も偶数桁になりますが、半分に分け上位桁と下位桁の和を求めてみます。例えば、

$$444443555556\Rightarrow 444443+555556=999999$$

6 をひっくり返した 9 が連なるのです。なお、この性質は、9 についてもみることができます。

$$66\times66=4356$$
$$666\times666=443556$$
$$6666\times6666=44435556$$
$$66666\times66666=4444355556$$
$$666666\times666666=444443555556$$
$$6666666\times6666666=44444435555556$$
$$66666666\times66666666=4444444355555556$$

$$9999^2=(10000-1)^2=100000000-20000+1=99980001\Rightarrow 9998+0001=9999$$

このような 666 の不思議さ、不可思議さに魅入られた数学者クリフォード・A・ピッツバーク氏は、著書「オズの数学」で、2 種類のレギオン数(Legion's Number)を命名しました。レギオンはローマ軍団転じて、軍団の意であり、666 は悪魔の軍団の数ということになります。第一種レギオン数は 666^{666} ですが、多倍長計算ソフトで実行させると、

$$666^{666}=27154\cdots\cdots\cdots98016$$

1881 桁の大きな数が得られます。第二種レギオン数は $666!^{666!}$。同様に多倍長計算ソフトの実行ボタンを押すと、画面上に砂時計が回り始め、パソコンがフリーズしてしまいました。フリーズが融けるとき、いったい何が画面に現れるのでしょうか。恐ろしいものを呼び出してしまったのかも知れません。

(パソコンを現代文明の野獣であると主張する人もいます。アルファベット A ～ Z を 6 の倍数 $6n(n=1,2,3,\cdots26)$ に対応させます。そして、Computer のアルファベットを数字に置き換えると、文字に対応する数の和は…………)

$\frac{12}{5}$ (2)

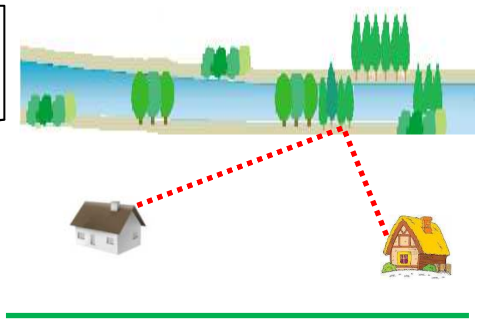
…調和から最短経路を導く数

2 数、2 と 3 の平均には

$$A=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}=2.5 \quad G=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}\fallingdotseq 2.449 \qquad H=\frac{2\times2\times3}{2+3}=\frac{12}{5}=2.4$$

などがあり、左から順に、相加平均(A)、相乗平均(G)、調和平均(H)といい、$A\geqq G\geqq H$ という関係が成立しています。
調和平均は、経路を往復したときの速度の平均や、音の高さの平均などに用いられますが、最短経路を求める次のような問題にも応用することができます。

> みつる君は、週に 1 回、お祖母ちゃんの家に行く。ロバを連れて近くの川岸で水を汲み、水袋をロバの背にくくりつけて、お祖母ちゃんの家まで運んでいるのだ。みつる君はどこの川岸で水を汲むのが一番いいだろうか。

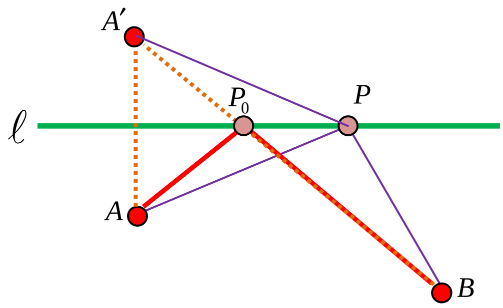


ロバで水を運ぶわけで、井戸もないずいぶん昔の話であることが分かりますね。ロバの問題といわれるこのパズルは、みつる君の家を A、お祖母ちゃんの家を B とし、水を汲む川岸の地点を P とするとき、$AP+PB$ の長さの最小値を求める最短経路問題ですが、その解答もよく知られています。

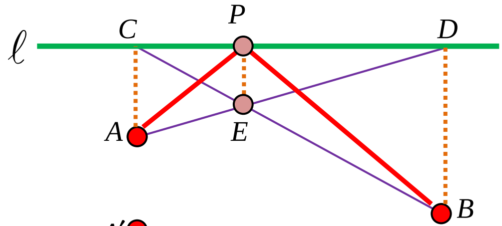
川岸である直線 ℓ に関する点 A の対称点を A' とします。
点 A' と点 B を結ぶ直線と ℓ との交点を P_0 としましょう。
すると、水を汲み適当な地点 P に対して、$AP=A'P$ であることより、

$$AP+PB=A'P+PB\geqq A'P_0+P_0B=A'B$$

点 P_0 で水を汲むときが最短距離であり、ベストということが分かりますね。



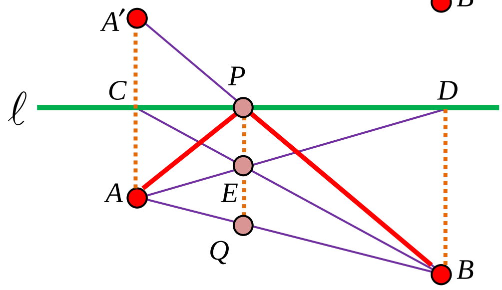
でも問題文では、最短距離を求めよとはいっていないことにも注意してください。例えば、お祖母ちゃんの家に行くまで要する時間の問題とみれば、水を背に乗せたあと、ロバはゆっくりと歩くことになるわけですから、ロバの背に水袋を乗せている時間が最小になる場合がベストとみることもできるのです。すなわち、点 B から川岸である直線 ℓ に下ろした垂線との交点を答えとしてもいいのではないでしょうか。動物愛護にもなりますし。



まあ、そんな解答のオチも考えられるのですが、ところでこの問題、最短経路を求めるにしてもちょっと首を傾げる点があるのです。それは、みつる君は川の中にある点 A' の位置をどうやって知ればいいのでしょうか。原理は分かっても実際には川の中に入らないと点 P_0 の位置はわからないのです。そこでみつる君にも理解できるように点 P_0 の位置を探してみましょう。

点 A および点 B から直線 ℓ に垂線を引き、その足をそれぞれ C, D とします。直線 AD と直線 BC との交点を E とし、点 E から直線 ℓ に下ろした垂線の足を P とするとこの点 P が川の水を汲む位置になります。

点 A を通り直線 ℓ に垂直な直線と、直線 BP との交点を A'、線分 AB と直線 PE との交点を Q とします。



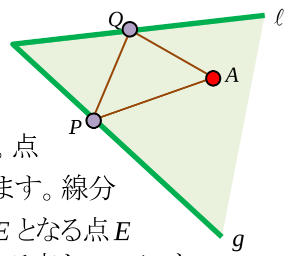
$\Delta BCA\backsim\Delta BEQ$ より、$AC=kQE$ $\quad\Delta DCA\backsim\Delta DPE$ より、$AC=kPE$

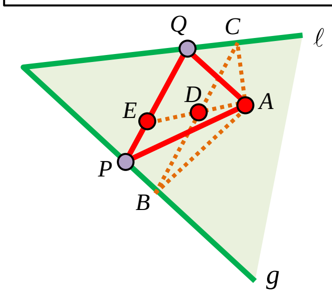
これから $PE=EQ$。また、$\Delta BCA\backsim\Delta BEQ$ より、$A'C=kPE$

以上より $AC=A'C$ となり、点 A' は直線 ℓ に関する対称点になります。

ところで、図の PQ の長さですが、線分 AC と BD の調和平均で与えられます。そして、このとき $CP:PD=AC:BD$ ですから、実は、みつる君は、点 E を求めなくても、CD 間の岸辺を歩き、$AC:BD$ の比になる地点を探せばいいだけだったのです。

> みつる君の家は、図のような中洲にあります。みつる君は毎朝、ℓ 側の川岸で洗濯をし、g 側の川岸で水を汲んで家に戻ります(洗濯した場所の川で飲料水は汲みたくないですね)。みつる君は、2 つの川岸のどこの場所で洗濯・水汲みをすればいいでしょうか。





$AP+PQ+QA$ が最小となる最短経路の問題として考えましょう。点 A から直線 g, ℓ に垂線を下ろし、その足をそれぞれ B, C とします。線分 BC 上の適当な点 D をとり、線分 AD の D の延長上に $AD=DE$ となる点 E をとります。点 E を通り、直線 BC に平行な直線が直線 ℓ, g と交わる点を P, Q にすればいいのです。その理由は、点 A の ℓ, g に関する対称点を考えてみれば分かります。

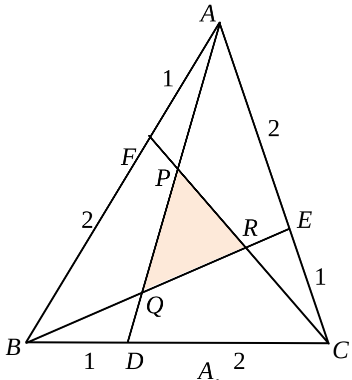
$\dfrac{1}{7}$ …三角形に隠れている循環小数

$\dfrac{1}{7}=0.142857142857142857\cdots$ であり、循環節の長さ 6 の循環小数です。

循環節の数 142857 に、1 から 6 までの数字を掛けると各位の数の順番が入れ替わり、数字たちがポルカを踊り出します。

$\dfrac{1}{7}$ を 22 倍した値は $\dfrac{22}{7}=3+\dfrac{1}{7}=3.142857\cdots$ であり、円周率の良い近似を与えます。

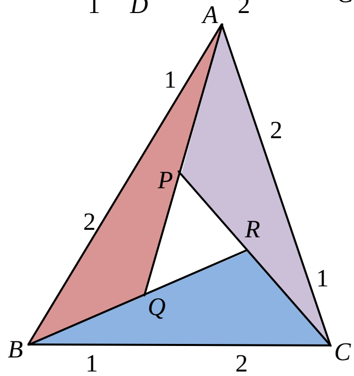
$\dfrac{1}{7}$ を 24 倍した値 $\dfrac{24}{7}=3.4285714285\ 7142857142\cdots$ にも、142857 が現れますが、スラングでは 24hours/7 days a week」の略語でもあり、24 時間(1 日)と 7 日(1 週間)、常に(always)、いつも(anytime)の意味になります。セブン・イレブンは本当は、7/24 ということになるのでしょうか。



さて、今回の話題ですが、その $\dfrac{1}{7}$ の面積を作り出す比の値についてです。

> 三角形 ABC の各辺 BC, DA, AB を $2:1$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とする。このとき、線分 AD, DE, CF によって囲まれてできる三角形の面積は、もとの三角形 ABC の面積の何倍になるか。

$\dfrac{1}{7}$ が答えになりますが、$2:1$ の比の値からどのように得られるのかをみてみましょう。



図の三角形 PQR の面積は、三角形 ABC から、$\Delta ABQ, \Delta BCR, \Delta CAP$ を減ずると求められますから、$AQ:QD$ が分かればいいことになります。これはメネラウスの定理を用いると簡単に得られます。メネラウスの定理は、

「三角形の各辺を内分・外分する点を中継しながら、辺の両端点(頂点)の比の積を求めて一周すると、値 1 になる」

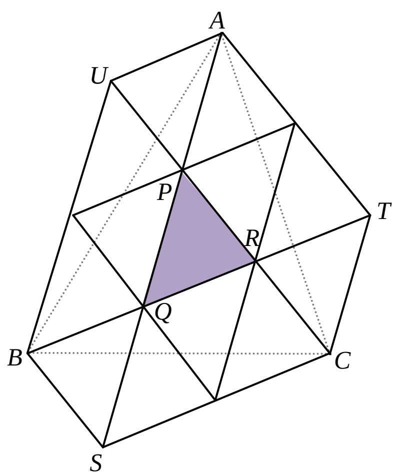
というものです。$AQ:QD$ を求めるわけですから、辺 AD の内分点が Q であるとみて、A を出発点として、移動します。点 Q を中継して点 D についたら、今度は C に行くために外分点 B を経由します。点 C から点 A に行くには内分点 E を経由します。これで最初の点 A に戻ることができました。式で表してみましょう。

$$\frac{AQ}{QD}\times\frac{DB}{BC}\times\frac{CE}{EA}=1 \quad これより、\quad \frac{AQ}{QD}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=1 \quad \therefore \quad AQ:QD=6:1$$

$$\Delta ABQ=\frac{6}{7}\Delta ABD=\frac{6}{7}\times\frac{1}{3}\Delta ABC=\frac{2}{7}S \quad (S=\Delta ABC)$$

同様に、$\Delta BCR=\Delta CAP=\Delta ABQ=\dfrac{2}{7}S$ です。$\therefore$ $\Delta PQR=\Delta ABC-(\Delta ABQ+\Delta BCR+\Delta CAP)=S-\dfrac{2}{7}S\times 3=\dfrac{1}{7}S$

求められましたね。でもメネラウスの定理は素晴らしい美しい定理なのですが慣れるまでちょっと使いにくいかもしれません。そこで、別の視覚的な方法を考えてみましょう。



頂点 A, B, C, P, Q, R を通り、三角形 PQR の各辺に平行な直線を引くと、右図のように ΔPQR と合同な 13 個の三角形ができます。そこでその面積を S とします。ここで、例えば ΔBCR は平行四辺形 $BSCR$ の面積 $4S$ の半分ですから $2S$ 。

$\Delta CAP, \Delta ABQ$ も $2S$ ですから、ΔABC の面積は $7S$ になります。

同様に考えることで、三角形 ABC の各辺を $m:n$ の分けるときにも、ΔPQR の面積と ΔABC の面積 S との比を求めることができます。実際に計算すると、

$$AQ:QB=(m+n)n:m^2$$

となることから、

$$\Delta ABQ=\frac{(m+n)n}{m^2+mn+n^2}\Delta ABD=\frac{(m+n)n}{m^2+mn+n^2}\times\frac{m}{m+n}\Delta ABC=\frac{mn}{m^2+mn+n^2}S$$

$$\Delta PQR=\left(1-\frac{3mn}{m^2+mn+n^2}\right)S=\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}S=\frac{(m-n)^3}{m^3-n^3}S$$

$\dfrac{1}{7}$ の分子、分母はそれぞれ、$(2-1)^3=1$、$2^3-1^3=7$ で与えられていたのです。

41

…素数を生成する数

$P(n)=n^2-n+41$としましょう。

$P(1)=41$、$P(2)=43$、$P(3)=47$、$P(4)=53$、$P(5)=61$、$P(6)=71$、$P(7)=83$、$P(8)=97$、……

これらの数はすべて素数を表しています。素数である41に連続する2整数の積$(n-1)n$を加えると新たな素数が生成されるのです。もう少し調べてみましょう。

$P(31)=971$、$P(32)=1033$、$P(33)=1097$、$P(34)=1163$、$P(35)=1231$、……

確かに素数です。でも、すべての素数を生成しているわけではないようです。$P(4)=53$と$P(5)=61$の間には59がありますし、いくつも素数が抜け落ちています。さらに、この式は$P(41)$で破綻してしまうことは明らかです。

なぜなら、$P(41)=41\times41-41+41=41^2$になるからです。

この式$P(n)$は、オイラーがみつけたものですが、もちろんオイラーも素数を生成する万能式とは思っているはずもなく、同様の式はオイラーが好んだ数 17 を用いたn^2-n+17でも$n=16$まで成立します。さらに多項式$n^2-81n+1681$は$n=80$まで素数を生成することができるのです。素数全体を1変数の2次の多項式として表現することは不可能なのですが、1970年にユーリ・マチャセヴィッチは正の値をとるものが必ず素数になる 19 変数の多項式を見つけています。しかしその多項式もすべての素数のみを生み出す式ではないのです。

素数の研究の歴史は、紀元前 300 年ごろのユークリッドの時代から始まり、素数が無限に存在することの証明はユークリッド原論に示され、デュドネは「ギリシアの数論でもっとも美しい定理」と賞賛しています。

素数の個数が有限個であるとし、そのすべてを$p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$とします。このとき、$p=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots\cdots p_n+1$なる数$p$を作ると、$p$は、$p_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$で割ると余り 1 になりますから割り切れなく、$p$も素数ということになります。これから素数は無限個存在することになります。

またユークリッドは、$M_p=2^p-1$が素数であるとき、$\dfrac{M_p(M_p+1)}{2}=(2^p-1)\times2^{p-1}$は完全数であることも証明しています。

$$(1+M_p)(1+2+2^2+\cdots+2^{p-1})-M_p\times2^{p-1}=2^p\times\frac{2^p-1}{2-1}=2^p(2^p-1)-2^{p-1}(2^p-1)=2^{p-1}(2^p-1)$$

このように、素数が無数にあることや素数の一部が完全数であることは、紀元前にユークリッドが証明したために、後世は、素数と完全数の関係、自然数の中での素数の散らばり具合といったことが研究対象となっっていきます。

M_pが素数であるpについては、1664 年にフランスの数学者メルセンヌは、$19<p\leqq257$のときは、$p=31,67,127,257$であることを予想します(素数であるM_pをメルセンヌ数といいます)。1772年、$p=31$について、スイスの数学者オイラーは、その証明をしますが$p=257$についてはさらに100年の時を経てリュカ(フランス)の成果(反例)まで待たなければなりません。

なお、オイラーから遡ること 100 年前、フェルマー(仏)は、$F_n=2^{2^n}+1$は素数であると予想しましたが、オイラーは$F_5=641\times6700417$の反例をみつけています。また、オイラーは偶数の完全数は$2^{p-1}(2^p-1)$で与えられることも証明しています。新たな素数の発見は完全数の発見にもつながっていくのです。

また、素数のでたらめのように配置されるその散らばりの分布について、ガウス(独)やル・ジャンドル(仏)は、素数の個数$\pi(n)$は、nが大きくなると、$\dfrac{n}{\log n}$に近づくことを予想します(素数定理)。この証明に取り組んだ末に、1859年、リーマンは数学史上もっとも重要な未解決問題といわれる「リーマン予想」にたどり着くのです。一方、素数定理については、1896 年、アダマール(仏)やプサン(ベルギー)により、解析的な方法を用いて解決されています。

このように人間は2300年以上の間、素数の秘密に近づこうと研究を続けていますが、ユークリッドの頃からそれほど大きな進展があるとはいえないのです。北アメリカには13年あるいは17年周期で、大量発生する蝉がいます。その周期が素数であるため「素数ゼミ」ともいわれますが、その体内時計は素数の時間を刻み、周期を守りその最小公倍数を大きくすることで交雑をなくし、大量発生します。その圧倒的な量をもって天敵の攻撃による絶滅を防いでいるのです。自然は人間ではなく蝉というちっぽけな虫に素数の秘密を解き明かしたのかも知れません。

41 に話を戻しましょう。スタニスラフ・ウラム(ポーランド)は自然数を四角いらせん状に配置していくと、素数の多くは対角線上に現れることを発見しました。ウラムの螺旋において中心を 41 にして以降の自然数を螺旋に配置してみましょう。$p(n)=n^2-n+41$の値は、対角線上に次々と現れてきます。オイラーは$P(n)$に素数の秘密の一旦を垣間見たのでしょうか。オイラーが見つけた美しい素数の関係式があります。

$$\frac{2^2}{2^2-1}\times\frac{3^2}{3^2-1}\times\frac{5^2}{5^2-1}\times\frac{7^2}{7^2-1}\times\frac{11^2}{11^2-1}\times\frac{13^2}{13^2-1}\times\frac{17^2}{17^2-1}\times\frac{19^2}{19^2-1}\times\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

素数により、宇宙の深淵に横たわる究極数πが表現されるのです。オイラーは、宇宙の秘密を解明する鍵は素数であると信じ、宇宙に向かって無限に伸びる素数階段を渡そうとしたのです。

140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
105	104	103	102	101	100	99	98	97	130
106	77	76	75	74	73	72	71	96	129
107	78	57	56	55	54	53	70	95	128
108	79	58	45	44	43	52	69	94	127
109	80	59	46	41	42	51	68	93	126
110	81	60	47	48	49	50	67	92	125
111	82	61	62	63	64	65	66	91	124
112	83	84	85	86	87	88	89	90	123
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122

220

…井戸端会議に出席したある数

■世の中(数の世界では)、それ自身を除く約数の和がそれ自身になる 6 のような完全数がもてはやされるけど、オレ 220 だって凄いんだぜ。素因数分解すると$220 = 2^5 \cdot 5 \cdot 11$だから、オレを除いた約数の和は、

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5)(1+11)-220=284$$

になる。だからどうしたって?。オレのマブダチの 284 は、$284 = 2^2 \cdot 71$だから、 $(1+2+2^2)(1+71)-284=220$

どうだい。俺達は互いに認め合う仲で、自分自身も和の中に含めると、約数の和が 504 で等しくなる。オレたちはこんなに強い絆で結ばれている。完全数なんて所詮、自分を自分でしか評価できないナルシストだろ。オレ達「友愛数」グループは聖書にも「ヤコブが兄のエサウに友愛のしるしに贈った羊の数が 220」といったように取り上げられる由緒ある数なんだ。オレのメンバーは、$(1184,1210)$ 、$(2620,2924)$ 、$(12,285,14,595)$ を始めとして 1000 組以上あるんだぞ。

■わたし 12496 ですけど、「友愛数」は「完全数」をひとりよがりの数みたいな言い方するけど、私にいわせればどっちもどっちよ。1000 組以上仲間がいるっていったって、お互い交流はまったくないでしょ。それだったら完全数と大した違いはないわ。ちなみに私が所属する「社交数」グループでは、私達の自分自身を除く約数の和は、お互いを表し友達の輪を作っているの。

$$12496 \to 14288 \to 15472 \to 14536 \to 14246 \to \ (12496)$$

私たちはまだ 212 グループしかないけど、数 14316 なんかは 28 の社交鎖をもった大所帯なのよ。構成する総数なら友愛数なんかとは比べ物にならないわ。

■それもまた、どっちもどっちだな。僕は 103340640。友愛数は無二の親友というけど、それってお互いの意見を言い合ったら終わってしまうだろ。一方、社交数のように人数が多すぎると収集がつかなくなり、集団も群れになってしまう。「社交数」グループは 28 の社交鎖を自慢するけどまだ 1 組しかないよな。ほとんどが 4 社交鎖の組ばかりで、3 つの社交鎖の組って入会者がだれもいないって聞いている。だから「架空の鎖」(crowds:存在しない)なんて揶揄されてしまう。やっぱり、一番理想的なのは 3 つの数で構成されている場合だと思う。3 つの数は三位一体、お互いが理解でき、バランスのいい社会を作ることができる。僕の親友は、123228768 と 124015008 だけど、僕達の一つの数の約数の和は、残り 2 数の和に一致するんだ。例えば、僕の約数の和 247243776 は、

$$247243776=123228768+124015008$$

となっている。僕たちほど、深い信頼関係で結ばれている数は他にはないと思うよ。

■それはどうでしょう。あなたたちグループの大きな欠点をわたしは知っている。あなたたちってみんな偶数同士、奇数同士の組ばかりでしょ。男組とか女子会とか、そりゃ仲間内でワイワイやるのは楽しいかもしれないけど、それで終わってしまうのは不健全だわ。やはり数(人)として、偶数と奇数の間にも友情を育まなければいけないと思う。自己紹介が遅れましたが私は 48。 $48 = 2^4 \times 3$ であることから、私の約数の和から 1 と私自身を除いたものは、

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)-(1+48)=75$$

私の連れ合い 75 を紹介するわ。 $75 = 3 \times 5^2$ より、同じように和を求めると、$(1+3)(1+5+5^2)-(1+75)=48$

約数の和は友愛数と同じで等しく互いに相手を表現しているけど、私は偶数で、彼は奇数。私たちは友愛数から孤独な 1 を除いたことで、生涯の伴侶を見つけることができたの。私たちのグループは「婚約数」といいますが、仲間には、

$(140,195)$ 、$(1575,1648)$ 、$(1050,1925)$ 、$(2024,2295)$

みんな異性同士の組よ。でもね、わたしたちと似ているグループで自分自身を除いた数にさらに 1 を加えた数が相手を表している「拡大友愛数」って集団もあるのよね。

$(6,160,11,697)$、$(12,220,16,005)$、$(23,500,28,917)$、$(68,908,76,245)$

といったメンバーなんだけど、新たに 1 を加えていつでも自我を主張するなんておかしい。そんな不倫集団と一緒にはしないでね。

■そんなに、偶数とか奇数とか種類に拘ることが大事なことなんだろうか。「婚約数」にしても、まだ偶数同士、奇数同士の組が入会していないだけということだろ。いまのご時世、同性同士のカップルが誕生したっていいじゃないか。大事なのはお互いを信じ尊重する気持ちではないだろうか。私達は 714 と 715。「ルース=アーロン・ペア」と 2 数で 1 つのニックネームで呼ばれる。私達はそれぞれ、$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$ 、$715 = 5 \times 11 \times 13$ と素因数分解できるけど、1 と自分自身を除く約数の和は、$2+3+7+17=5+11+13$、等しくなる連続する 2 数なんだ。ちなみにニックネームは、人間界のベースボールというゲームで、ベーブ・ルースという選手が 1935 年に作ったホームラン記録 714 本を 1974 年にハンク・アーロンが 715 本を打って塗り替えたことに由来している。私達は連続する 2 数だから必ず偶数と奇数の組合せになるけどそんなことは気にしていない。お互い支えあって何か結果を残すことに価値を見出している。例えば、私達 2 数を掛けると、 $714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510510$

連続する 7 つの素数の積(素数階乗)になる。きみたちの中でそんなことができる奴はいるか。

■でも、その 7 つの素数の平方の和は、$2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2=666$ 。それにベースボールで 700 本以上打っているのは 3 人で、残りの 1 人であるホームラン王のバリー・ボンズは 6 試合で連続してホームランをうち 666 本になったということだろ。オタクらには黒い噂もあるって聞いている。えっ、僕の名前は何かって。僕は………。

数たちの自慢話はまだまだ続きそうです。

$128\sqrt{e980}$

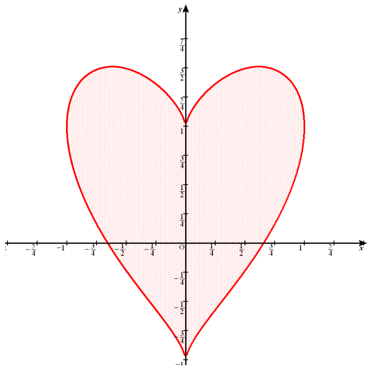
…愛を告白する数

計算しようとは思わないでしょうが、その値は

$128\sqrt{e980} = 6606.4818843256\cdots$　　（e はネイピア数）

となります。この計算結果が何を表すかというと、値に意味は何もありません。しかしこの数は「愛を告白する数」としてインターネット上では話題になっているのです。値に意味はないのになぜ？、ということは後ほど触れるとして、愛を表現している方程式としてよく知られているものはあります。

$$x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$$

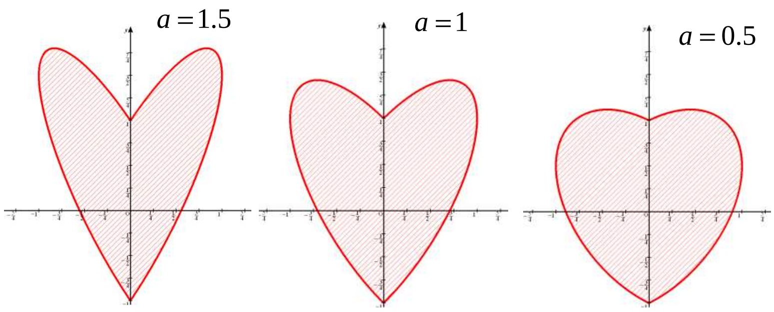


この方程式をグラフとして描画するとどんな図形が現れるか予想できますか。
右が描画したものです。ハートマーク、数式があなたに代わり愛を語ってくれましたね。
この方程式は「愛の方程式」(The Love Formula)と言われています。
なお、右図のグラフは方程式の等号(=)を不等号(≦)に変えています。この場合、「愛の不等式」になってしまい、愛が壊れそうな予感がします。ハートの内部は塗らないほうがいいかもしれませんね。

数式を用いて愛を表現することは、愛が人間という種族の最大の感心事であるため、いろいろと試みられているようです。

$$y = \sqrt{1-x^2} + a|x| \qquad y = -\sqrt{1-x^2} + a|x|$$

今度は２つの式ですが、先ほどよりは分かりやすく、式の中には円の方程式 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ が含まれています。



さらに変数 a の値を変えることにより、ハートの形(丸み)が変化します。$a=1$ のときは、理想的なハートマークであり、$a>1$ のときは尖った愛、$a<1$ のときは愛が丸く膨らんでいきます。
そして、$a=0$ のときは円(満)になるのです。

この変化は、まるで、男女を表している二人の愛の方程式が、寄り添い愛を紡いでいく様にみえないでしょうか。
なお、２つの方程式は、

$$x^2 + \left(y - a|x|\right)^2 = 1$$

と一つにまとめられますが、野暮というものでしょう。

このようなグラフはハート形曲線といい、その式表現も様々です。ちなみに google ではお茶目な微笑ましいサービスを提供しています。検索画面で次の式を入力し、検索ボタンを押してください。

sqrt(cos(x))*cos(300x)+sqrt(abs(x))-0.7)*(4-x*x)^0.01, sqrt(6-x^2), -sqrt(6-x^2) from -4.5 to 4.5

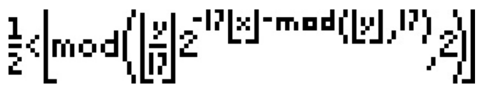
何が現れるかは実際にやってみてのお楽しみ。古風ゆかしき恋文も、IT 時代ではサプライズの告白になるようです。

さて、次のように愛の形を表す式もあります。

$$\frac{1}{2} < \left\lfloor \mathrm{mod}\left(\left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17\lfloor x \rfloor - \mathrm{mod}(\lfloor y \rfloor, 17)}, 2 \right) \right\rfloor$$

$\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す関数であり、floor function(床関数)といいます。日本では $[x]$ (ガウス記号)として用いられます。

この数式は、Jeff Tupper(トロント大学の教授)が考案したもので、Tupper's Self-Referential Formula といいます。日本語に訳すと「再帰公式」となりますが、関数を表示させると、そのグラフの一部にこの数式自体が描画されるのです。右図は、Wolfram MathWorld で公開している実際の画像です。数式が自らを表現してしまうって驚くべきことではないでしょうか。



このことから Self-Referential Formula は、言い換えればナルシストの数式であり、Self-Love(自己愛)とみなすこともできるでしょう。人は自らを愛せなければ他人も愛せないものです。この数式は無限に広がり描画されたグラフの中に再帰的に自己を再現するのです。そう捉えると、グラフそのものが愛そのものを表していると考えてもいいのではないでしょうか。

それでは最後に表題の数がどうして「愛を告白」しているのかお教えしましょう。白紙の紙を用意してください。その紙で数の上半分を覆ってみます。ルートの中の e(ネイピア数)が隠れてしまわないようにしましょう。よくみてください。英語で綴られた「愛の告白」が浮かび上がっていませんか？

91

…ちょっと頑張る半人前の素数

$91 = 7 \times 13$ であり7も13も素数です。このように2つの素数の積で表される数を半素数(semiprime number)といいます。
半素数は簡単に作れますし、不思議でもなく、珍しくもないでしょう。そういった神秘的な性質はすべて素数がいいとこどりしてしまっています。$1309 = 7 \times 11 \times 17$ だから、このように3つの素数の積で表される数を楔数(sphenic number)、といっても「だからなにに」といわれてしまうかもしれません。ちなみに、91を和で表現すると、

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=91$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$$

$$3^3+4^3=91$$

こんなに羅列しても、これも「まあ、面白いね」で終わってしまいそうです。このようなべき乗の性質は666がもっと神秘的に力強く主張していました。数91ひとつでは力不足のようなので、それなら91,93,95と、連続する3つの奇数を並べてみましょう。

$$93=3\times31 \qquad 95=5\times19$$

数93,95も、半素数です。3つの半素数が並んで、3人(数)寄れば…となりますが、さて何を意味するでしょうか。
実は、この3数は、連続する3つの奇数ですべて「素数でない数」の最初の3組を表しています(さらに、3つとも半素数)。
奇数を小さい順に並べると、

1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,…

となりますが、なかなか「素数でない連続する3数」は登場しません。ところが一旦、91からの3つがその姿をみせると、次は、

115,117,119,121,123,125

いっぺんに堰を切ったように6つの数が連続して現れます。なお、この中で半素数で3連続するのは119,121,123です。
そして、次に現れるのは、

141,143,145,147

半素数であり連続するのは141,143,145です。このように、素数でない奇数はどんどん勢力を増し、5つの連続する奇数であり、さらにすべてが半素数である

213,215,217,219,221

といったものまで調子に乗って振る舞い始めます。
これに対して、素数で3連続するもの(当然、奇数で)は、どうかというと、3,5,7の1組しかありません。
前述した奇数を小さい順に並べた数の列をみてください。3から始めて2つ置きに3の倍数が現れることが分かります。これから、3,5,4の1組以外で、3数(以上)が連続して現れることはないのです。
では「連続する素数でない3つの奇数」はどれだけあるのでしょうか。
実は、無数に存在しますが、その証明は簡単にできます。nを奇数($n \geqq 3$)として、次の3数を考えます。

$$2n(n+2)(n+4)+n$$

$$2n(n+2)(n+4)+(n+2)$$

$$2n(n+2)(n+4)+(n+4)$$

$2n(n+2)(n+4)$ は偶数で、$n, n+2, n+4$ はみな奇数よりこの3数は奇数であり、順に共通因数$n, n+2, n+4$をもつことより素数ではありません。すなわちこれから素数でなく連続する3奇数が作れます。
例えば$n=3$とすると、213,215,217という具合です。同じように、4つ連続する場合は、

$2n(n+2)(n+4)(n+6)$ に、$n,\ n+2,\ n+4,\ n+6$ を加えた4数

であり、m個連続する場合は、

$2n(n+2)(n+4)(n+6)\cdots\{n+2(m-1)\}$ に、$n,\ n+2,\ n+4,\ n+6,\ \cdots, 2(m-1)$ を加えたm数

とすると得られます。
また、

$2n(n+2)(n+4)$ に対して、$n,\ n+2,\ n+4$ を引いた3数

とすると、さらに小さな「連続する素数でない 3 つの奇数」がみつかり、$n=3$とすると、203,205,207 であり、このような方法で得られる連続する3奇数は、加減のそれぞれにより、(203,205,207)と(213,215,217)のようにpairで現れることになります。
このように見ていくと、「連続する素数でない3つの奇数」と大上段に構えた割には、どんどん萎んでいき、その希少価値も薄れていくようです。
では、数91は、このような方法で作ることは可能かというと、

$4n(n+2)(n+4)$ に対して、$n,\ n+2,\ n+4$ を加えた3数

を考えて、$n=1$とすることで得られます。実際に代入すると、

$$90 = 4\cdot1\cdot3\cdot5+1,\ 93 = 4\cdot1\cdot3\cdot5+3,\ 95 = 4\cdot1\cdot3\cdot5+5$$

これから、93と95については、その式から素数でないことは分かりますが、91は式だけからは判別できません。
そう考えると、素数でない連続する3つの奇数である最初の数91は、なかなかどうして、頑張っているのではないでしょうか。
半素数と、まるで半人前の素数のように言われながら、虎視眈々と活躍の機会を伺いながら、一気に攻勢に転じているのです。
なお、半素数は、近年、RSA暗号の公開鍵として、注目を浴びてきています。陽の目をみるまでは諦めてはいけないということなのでしょう。

13

数 13 は忌み数であり、嫌われ者です。

北欧神話では、13 人目は招かれざる神ロキ、キリスト教神話では、13 人目は天使(であったころの)サタン、そして、「最後の晩餐」では、13 番目の席についたのはユダであり、このように 13 番目に登場する人や神は異端者として扱われます。ただ、それは 13 番目に位置する神や人に問題があるのであって、数 13 に罪があるわけではありません。それにも関わらず、例えば旅行する場合を考えてみると、空港へ着くと 13 ゲートはなく、飛行機に乗ると座席番号 13 番はなく、ホテルへ泊まると 12 階の上は 14 階で、13 号室は使われず、旅行日を 13 日の金曜日にして湖に出かけようなんてことは避けたいところでしょう。このように人間社会は 13 を排除しようとする傾向にあり、「それ、イジメだろ」とさえ疑いたくなります。確かに 60 進法時間のこの世界では、私達は、24 時間、12 ヶ月といったように数 12 を基準にして生活を送っているため、その次の数 13 は非調和的で馴染まないとはいえます。13 が素数であることも馴染まない理由ですが、素数の積が数 12 を形成しているわけでもあります。7 も素数ですが、こちらは、13 とは対称的なナイスガイとして扱われ厚遇されています。結局、人間が安易に自然数の序列から数 13 に 13 番目というレッテルを貼ってしまったことに問題があるのでしょう。正の奇数やフィボナッチ数列「1,1,2,3,5,8,13,21…」の序列では数 13 は、7 番目のラッキーな位置にあります。そう考えれば自然数の序列の 7 番目の数 7 がラッキー数である根拠も 13 と同様に脆いといえます。

実は、ラッキー数(幸運数:lucky Number)と命名されている数のグループは存在しています。

正の奇数列の 2 番目の 3 に対して、奇数列から 3 の倍数に位置にある数を取り除きます(下図②)。次にこの列から 3 番目にある数 7 に対して、7 の倍数の位置にある数を取り除きます(下図③)。同様に次には 4 番目の数 9 に対して、9 の倍数の位置にある数を取り除くことを続けていくことで生成される数列の項の値を、数学者スタニスワフ・ウラム(ポーランド)はラッキー数と命名しました。何がラッキーかというと、ヨセフスの生き残り問題(日本では継子立て)の抽出法に似ているからなのですが、それよりも素数列を求めるエラトステネスの抽出法に近いといえます。エラトステネスは数列の第 n 項の数の倍数がある項をふるいにかけたのに対して、ウラムは第 n 項の数の倍数である項をふるいにかけたのです。なお、ラッキー数の分布は素数に近いものが得られることが知られています。そしてこの序列では数 13 は、5 番目に位置するのです。

①	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	…
②	1	3		7	9		13	15		19	21		25	27		31	33		37	39		43	45		49	51		55	57		61	63		67	69	…
③	1	3		7	9		13	15			21		25	27		31	33		37			43	45		49	51		55	57			63		67	69	…
④	1	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43	45		49	51		55				63		67	69	…
⑤	1	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43			49	51		55				63		67	69	…
⑥	1	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43			49	51						63		67	69	…

幸運はフォーチュン(fortune)の英訳でもありますが、フォーチュン数(運命数:Fortunate Number)といわれる数もあります。それは、素数を小さい順に並べるとき、n 番目までの素数 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ の積 $p(n) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$ に対して $p(n)+m$ が素数になるような最小の自然数 m ($m \geqq 2$) で生成される数のことです。

例えば、$n=1$ のときは、$p(1)=2$ であり、$2+m$ が素数になるような最小の m は、4,5,6,7,…を考えると 5 が素数より、$m=3$。これが最初のフォーチュン数です。$p(2)=2\cdot 3=6$ では、8,9,10,11,12,…だから、11 が素数より $m=5$。以下このように続けて抽出していきます。なお、$m \leqq p_n$ のとき、m は $p_k\ (k=1,2,\cdots n)$ の積で表されることより、$p(n)+m$ は素数ではありません。すなわち $m > p_n$ に対して考えばいいことになります。

例えば $n=4$ のときは、$p(4)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$ だから、$m \geqq 8$ を調べると、218,219,220,221,222,223,…。223 が素数より、$m=13$。数 13 は 4 番目のフォーチュン数なのです。同様に抽出を続けると、次の数列が得られます。

3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 37, 47, 59, 61, 67, 71, 79, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 151, 157, 163, 167, 191,…

さて、この抽出方法ですが、ユークリッド原論の中にある「素数は無数に存在する」ことの証明に似ています。素数の個数が有限個であり n 個であるとすると、$p(n)+1$ は新たな素数であり矛盾が生じ背理法により証明できるわけですが、フォーチュン数は、その次に現れる素数までの個数を示しているのです。なお、フォーチュン数はすべて素数であることが予想されています。このように、数の序列の規則性により、数 13 は、

4 番目のフォーチュン数、5 番目のラッキー数、6 番目の素数、7 番目のフィボナッチ数

であり、不吉というよりむしろ幸運な数の序列に含まれる数なのです。

60 進法の中で数 13 は非調和であると述べましたが、1 年は 52 週であり、これを 4×13=52 とみれば、13 週を節目に春夏秋冬が移り変わるわけです。数 13 は、四季の彩りを変える数であり、非調和どころか、調和を演出しているとも言えるのです。(トランプは、4 つの種類のカードがそれぞれ 13 枚あり、4×13=52 枚で 1 組ですが、これから対等性のある無数のゲームが生み出されることも面白いのではないでしょうか)。

また、1 週は 7 日ですから、52×7=364。すなわち 52 週は 364 日で、1 年 365 日より 1 日足りません。1 日を陽が照っている時間とするならば、その間の夜の日数は 13×4×7=364 日ということになります。この夜が漆黒の闇の世界か、それとも月明かりに浮かぶ淡い光を湛える世界とみるかで数 13 はガラリとその装いを変えます。

月光を弦にアルペジオを奏でたくなる夜、ピーター・パンやティンカー・ベルが点滅する星の光の間を縫い飛翔しているようなロマンチックな寓話の世界の住人が数 13 であることを願いたいものです。

19

…代数の骨を作る数

19は8番目の素数であり、その逆数は(整数nに対して)最大の循環節$n-1$をもつ小数として知られています。また、

$$19^5+19^2+19^1+19^3+19^5+19^6+19^4+19^0=52135640$$

の計算をみると、計算結果の右辺は、左辺の各指数の左からの並びに一致しているという面白い性質もあります。

でも数19を有名にしたのは次の問題でしょう。

「Aha, その全部と七分の一とで、十九になる」

ここで用いられているAha(アハ)は、わかった、なるほど、といった驚きや喜びを表す感嘆詞ではありません。「多数」「量」といった「変数」の意味であり、それをxとおいて問題を式で表せば、

$$x+\frac{x}{7}=19$$

となります。この問題は今から3700年前のエジプトのアーメスのパピルス(Papyrus)に記載されているものです。

1857年、エジプトに転地療養をしていた考古学者、ヘンリー･･リンド(スコットランド)は、ナイル湖畔のルクソールという村の店で偶然このパピルスをみつけました。リンド氏の死後、パピルスは大英博物館に寄贈され、以後、リンド数学パピルス(Rhind Mathematical Papyrus 略称RMP)と呼ばれ、世界中の数学者、考古学者の研究の中心となります。パピルスは、「算術(RMP1-40)」、「幾何(RMP41-60)」、「雑題(RMP61-87)」の3つの章からなり、上述の問題は「算術」の中にある「アハ(量)の問題」(RMP24－29)の巻頭を飾っています。そしてこの問題は、人間がその歴史の中で最初に解いた代数問題であり、この時代にすでに代数が存在していたことは驚くべきことといえるでしょう。

また、「雑題」のRMP79には次の問題が掲載されています。

7件の家では7匹ずつの猫を飼っている。
それぞれの猫は7匹ずつのネズミを捕る。
それぞれのネズミは麦の穂を7本ずつ食べる。
それぞれの麦の穂からは7ヘカット(容積単位)の麦がとれる。
では、これらの数の合計はいくらか。

(答え)

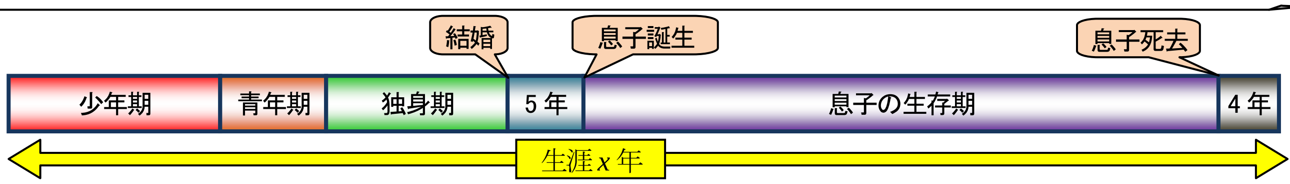
$$7+7^2+7^3+7^4+7^5=\frac{7\left(7^5-1\right)}{7-1}=19607$$

※RMPの解答は等比数列の和の公式は用いていません。

猫、ネズミ、麦の穂といった異なるモノの数の合計をとることはナンセンスかも知れません。でも、この問題が一級品のパズルであることは疑いのないことです。その発想には等比数列の概念がすでに芽生えているのです。

ところで、代数を体系的にまとめたのは、代数の父と呼ばれるディオファントス(Diophantus)といわれています。ギリシア時代の数学者で没年は不明なのですが、84歳まで生きたということは分かっています。彼の弟子の一人が記したギリシア詩歌集の1篇が生涯を詠んでいるのです。

ディオファントスは、その生涯の6分の1を少年期、12分の1を青年期として過ごした。その後、生涯の7分の1を経て結婚し、5 年後にひとり息子を授かった。しかし、その子は父の一生の半分しか生きずにこの世を去った。その悲しみの4年後にディオファントスも亡くなった。



ディオフォントスの生涯をx年として、式で表すと、

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

となり、$x=84$が得られます。これから、次のような伝記が綴られます。

少年期14年、青年期7年を過ごし、独身12年の後に結婚(33歳)し、38歳で息子が誕生するがディオファントスが80歳のときに息子は亡くなる。そして、84歳でディオフォントスもその生涯を閉じた。

この問題は、リンド・パピルスの代数問題と大した違いもない簡単な1次方程式であり、その答えも12と7の最小公倍数から容易に予想はできてしまいます。ディオファントスは、このように単純な方程式で自分の伝記を記したことに天国で憤慨しているかもしれません。彼はディオファントス方程式という複雑な不定方程式を研究したことでも知られており、その研究により、方程式は特定問題の数の関係式を導くことから、数のすべてを類別する整数論という純粋理論へと発展していくのです。

そして、17世紀、フランスのデカルトは、未知数を今日普及している記号や符号で表す記号代数学を確立し、代数は一気に花開くのです。

代数(Algebra)はal-jabr(まとめる)を語源とし、中世では、代数学者(algebraist)は「骨をまとめる人」、すなわち外科医と同意語でした。デカルトがディオファントスを、ディオファントスがリンド・パピルスを知っていたかどうかは分かりません(あまりに年代の開きがあるのです)。しかし、代数の本質の部分は、骨の中の遺伝子情報として、数千年の時の流れの中で途切れることなく脈々と受け継がれていたのかも知れません。

220

…電卓のキーナンバー

電卓で数字遊びをしてみましょう。
電卓の数字の配列は右図のようになっていますね。

7	8	9
4	5	6
1	2	3

数字のボタンを押すルールを決めて、2 桁の数を 4 つ作り、その和を求めます。
例えば、4 隅の 4 つの数字を 2 回ずつ押すルールを決めると、4 つの数 11,33,77,99 になり、その和は、

$11+33+77+99=220$ …①

になります。4 隅の各数字に対して、2 番目に押す数を 5 にすると、

$15+35+75+95=220$ …②

4 隅の次の数を上下にある数字にすると、

$14+36+74+96=220$ …③

4 隅の次の数を左右にある数にしても、

$12+32+78+98=220$ …④

最初の数を 4 隅ではなく、真中の 5 にしてみましょう。上下と左右の数を次に押すと、

$52+54+56+58=220$ …⑤

2,6,8,4 の並びをぐるぐる回してみても

$26+68+84+42=220$ …⑥

このように、あるルールを決めて 2 桁の数の和を求めると 220 になることが多いようです。
面白いと思いませんか。ではどうして 220 という数が得られるのか調べてみましょう。
各数から 5 を引いた数−4〜4 を配置してみます。
右図のようになりますね。ここで、先ほどの幾つかのルールを当てはめてみます。

2	3	4
-1	0	1
-4	-3	-2

まず、2 桁の数を十の位と一の位に分けて、それぞれの和を求めてみましょう。
①の十の位は、1,3,7,9 ですが、これは $-4,-2,2,4$ に対応するのでその和は 0 になります。
だから、一の位も 0 です。
②、③、④も十の位は同じ数なのでその和は 0 です。それぞれの一の位の和は

②$5+5+5+5 \to 0+0+0+0=0$
③$4+6+4+6 \to -1+1-1+1=0$
④$2+2+8+8 \to -3-3+3+3=0$

もう分かりましたね。⑥についても

十位　$2+6+8+4 \to -3+1+3-1=0$
一位　$6+8+4+2 \to 1+3-1-3=0$

このように、規則正しいルールを設定すると、十位、一位ともにその和は 0 になることが多いのです(その和が 0 になるようにルールを設定しているといった方がいいかもしれませんが)。
次に、元の数に戻すために、すべての数に 5 を加えると、

十位の数の和　$5\times4\times10=200$
一位の数の和　$5\times4=20$

になるので、元の数の総和は 220 ということになります。
さて、この原理は、3 桁の 4 つの数の和についても応用できることが分かると思います。
例えば、4 隅の数字をそれぞれ 3 回叩き、3 桁の数を作るとその和は、

$111+333+999+777=2220$

中央の 5 を含むように、対角線、縦、横の和を求めると、

$159+357+456+258=2220$

中央の 5 を含まないように、縦、横の和を求めると、

$123+369+987+741=2220$

その他にも、

$222+444+666+888=2220$
$111+333+999+777=2220$
$456+654+258+852=2220$

真ん中の数字 5 がルールの key になっていることが分かりますね。
4 桁の数はどうでしょうか。
2×2 の正方形の中の数を隅を起点にして反時計回りにして 4 桁の数を作り、その和を求めると、

$5412+5236+5698+5874=22220$

5 を除いた数の囲みの中から、隅の数を起点にして、反時計回りに 4 数選んで 4 桁の数を作り、その和を求めると、

$1236+3698+9874+7412=22220$

4 桁の 6 数字を加えるルールを設定すると、さらに不思議度はアップしますね。この原理は数 7 で紹介しているカレンダーマジックにも応用ができます。ルールのある数の並びは秩序をもたらす、何か人間社会と同じですね。

3912657840

10 桁である四十億近くのこの大きな数にどんな意味があるかは、数字の並びで分かるかと思います。0 から 9 までの数字を 1 つずつ並べてできる数であり、このような数を小町数といいます。

小町数の総数は 10 桁めが 0 のものを除くと、

$10!-9!=3265920$ 個

これだけたくさんある小町数の中で、表題の数にどんな特徴があるでしょう。
この数は 1 から 10 までのすべての数で割り切れるといったら驚きますか。

でも、それほど大したことではないのです。なぜならこのように割り切れる小町数は、11459 個もあります。

1 から 10 の各数を素因数分解すると、右表のようになります。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	2^2	5	$2\cdot3$	7	2^3	3^2	$2\cdot5$

このことから、1 から 10 までのすべての自然数で割り切れるためには、小町数は因数 $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ があればいいことが分かります。すべての小町数の各位の数の和は 1 から 9 までの和より 45 です。各位の数の和が 9 の倍数であればもとの数は 9 の倍数より、すべての小町数は 9 の倍数になります。また、10 で割り切れるためには 1 の位は 0 になります。

$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ から $3^2\cdot2\cdot5$ を除くと $2^2\cdot7=28$ 。すなわち、下二桁が 10 の小町数が 28 で割り切れればいいのです。

ここで、4 の倍数の判定は下 2 桁が 4 の倍数であり、7 の倍数の判定は、下位から 3 桁ずつ順に奇数番目は加え偶数番目は引いた数が 7 の倍数であることから、この条件を満たす小町数は、結構な個数になることは予想できるのです。

もっとも小町数の総数に対しては 0.35%であり、割合としては小さいのですが。

さて、その 11459 個の中でもこの小町数の性質は傑出しています。

数の並びから適当な場所の 2 桁をとってみましょう。

39, 91, 12, 26, 65, 57, 78, 84, 40

9 個の 2 桁の数が得られますが、元の小町数は、これらのどの 2 桁の数でも割り切れるのです。

小町数を素因数分解してみるとその理由が分かります。

$3912657840=2^4\times3^2\times5\times7^2\times13\times19\times449$

どの 2 桁の数も合成数であり、その因数はこの素因数分解の中にみつけることができます。

三百万個以上もある小町数には、このような個性的な数がいろいろあります。幾つか紹介しましょう。

2438195760 は、何と 1 から 18 までのすべての数で割り切れます。当然、2 倍した数もその性質を満たすことになりますが、その数は、4876391520、やはり小町数になっています。この性質をもつ小町数は他に、

4753869120,　3785942160

が知られています。

小町数にちょっと足りない(0 が使われていない)987654321 は、小町数を生みます。

$987654321\times2=1975308642$

3 の倍数以外の数 2,4,5,7,8 を掛けたものはみんな小町数になります。

小町数は素数ではありませんが、素数を誘う小町数もあります。

小町数 1234567890 に 1 を加えた数 1234567891 は素数です。そして、2 数の並びをつないだ 12345678901234567891 は素数であり、さらには 123456789123456789123456789 1 も素数といったら信じられるでしょうか。

次の 3 つの小町数は、三人小町です。

9876543210,　1234567890,　8641975320

その理由は、

$9876543210-1234567890=8641975320$

2 つの小町数の差が残りの小町数を表します。

ここで、小町数 1234567890 の末尾の 0 を先頭に移して 0123456789 としてお色直しをします。

$9876543210-0123456789=9753086421$

また新しい小町数がふらふらと寄ってきました。

数の先頭に 0 がある場合も(ネオ)小町数として許すと、0429315678 は際立った性質を披露します。

$0429315678=04926\times87153=07923\times54186=15846\times27093$

小町数が小町算により表現できるのです。

このように、いろいろな小町数が千紫万紅で咲きほこるのですが、単独の小町数の性質としては、3912657840 は凄いと思うのです。この小町数の性質は、言い換えると、「その約数が数の並びにすべて見えている」とみることができます。そのため、小町数 3912657840 はヌード小町とも名付けられているのです。そして、このようなヌード小町は、他には存在しないのです。

ちなみに、9517634280 は素因数分解すると、$9517634280=2^3\times3^2\times5\times7\times11\times17\times19\times1063$

この小町は、1 から 12 までの数で割り切れます。また、数の並びから適当な 2 桁の場所を選ぶと、下 2 桁の 80 を除いてすべての数で割り切れます。残念ながら、最後の 1 枚がめくることができないのです。命名するならばセミヌード小町ということになりましょうか。

誰ですか？、こちらの小町の方が艶かしいと思っているのは。