不思議数との出会いの覚書 II

ハンティング帽を被りパイプをくゆらせ
学問を愛する人間を探している神様

44

5 人の気心が知れた仲間のクリスマスイブのパーティは、心のこもったプレゼント交換から始まる。「何をあげたら喜ぶだろう」と悩み選んだ一品。イブはみんながハッピーでありますように。持ち寄ったプレゼントをテーブルに集める。おや、包装紙はイブということもあり、サンタとトナカイがプリントされた同じような物ばかり。見分けがつかない。うーん、私、コレにする。ワクワクしながら丁寧に包装紙を剥がしプレゼントをみる。「えっ、コレって」……。周りでは、「わぁ、私これ欲しかったんだ」、「誰が選んだの、センスいいね」、嬉しそうな声が飛び交う。笑顔のひとつが「ねぇ、あなたは何をもらったの」と無遠慮に話しかけてくる。「うん、すごくいいものだよ」……。和やかに話が弾むイブの夜。私だけ窓の外の暗闇のように心が沈んでいく。

5 人がプレゼント交換をするとき、そのもらい方は、$5!=120$ 通りあります。この中で、誰も自分の持ってきたプレゼントを選ばない場合の数は **44** 通りになります。44 は日本では 4(死)を連想するから不吉な数なのかもしれませんが、実は、みんなが自分以外の誰かのプレゼントを受け取ることのできるハッピーな数なのです。

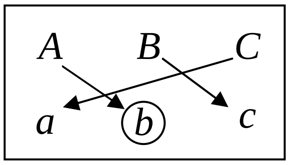
自分以外のプレゼントを貰うことは、1 から n までの数字を左から順に並べたとき、左から k 番目に置かれている数字が k でないように並べることに対応できます。この順列を完全順列といい、完全順列の総数をフランスの数学者モンモール(*montmort*)の名にちなんで、モンモール数とも呼びます。

さて、$n=1,2,3,4,\cdots\cdots$ のモンモール数が何なのかを調べてみましょう。

数でみると味気ないので、プレゼント交換で話を進めましょう。$A,B,C,D,\cdots$ が選んだプレゼントをそれぞれ、$a,b,c,d,\cdots$ として、n 人のモンモール数を a_n とします。

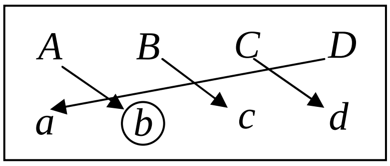
$n=1$ のときは、自分一人だけの寂しいイブ。みんな用事ができて誰も集まらない。「こんなプレゼント」と放り投げて $a_1=0$。

$n=2$ のときは、2 人だけのプレゼント交換。最高にハッピーな夜で、$a_2=1$。



$n=3$ のときは、自分を A とすると、A が受け取るプレゼントは b または c。b を選んだとしたら、残りの 2 人は、$B-c$、$C-a$ とただひと通りに決まるから、$a_3={}_2C_1=2$。

$n=4$ になると、人間関係もだんだん複雑になってくるけどまだ頑張れる。自分 A は、b のプレゼントを受け取るとする。そのとき B は、B が選んだプレゼントは A が貰ったから、残りの 3 人の誰のプレゼントを貰ってもいいことになる。仮に C のプレゼントをもらったら、残りの 2 人は、$C-d,D-a$ とただひと通りに決まるから、$a_4={}_3C_1\times{}_3C_1=9$。これも嫌な数字。



$n=5$ になると、もうお手上げ。自分 A が b を貰って B は c で C は……。こんな面倒なことを考えるくらいならみんな不幸になってしまえ。人の不幸は蜜の味がするっていうし。そこで、誰か一人だけが不幸になる場合は、残り 3 人は他の人のプレゼントを受け取るから、$a_4=9$。2 人だけが不幸の場合は、残り 3 人に対して $a_3=2$。3 人だけが、不幸になる場合、残り一人は他人のプレゼントを受け取らなければならないけどそんなことありえないから 0 通り。全員が不幸になる場合はみんな自分のプレゼントを持ち帰ってみんなアンハッピー、「ざまあみろ」で 1 通り。だから結局

$$5!-({}_5C_1a_4+{}_5C_2a_3+{}_5C_3a_2+{}_5C_4a_1+1)=44$$

こうやってアンラッキーになる場合を考えていくとラッキーかもしれない。だから、

$n=6$ の場合は、

$$6!-({}_6C_1a_5+{}_6C_2a_4+{}_6C_3a_3+{}_6C_4a_2+{}_6C_5a_1+1)=265$$

表にしてみよう。

人数 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
順列の総数	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
a_n の値	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961

n が大きくなるとハッピーの確率が低くなっていくような。

あれ、表をみると、$a_2+a_3=3$ 　3 倍して $a_4=9$ 　$a_3+a_4=11$ 　4 倍して $a_5=44$

ためしに、$a_7+a_8=16687$ 　8 倍して $a_9=8\times16687=a_6=133496$ 　どうやら

$$a_{n+1}=n(a_n+a_{n-1})$$

が成り立っているようだ。

さて、イブの夜に話しを戻すとしよう。5 人みんながハッピーになる確率は、$\dfrac{a_5}{5!}=\dfrac{11}{30}=0.37$

そんなに高い割合ではないから、ちょっと安心。

では、私だけがアンラッキーである確率はというと、$\dfrac{a_4}{5!}=\dfrac{3}{40}=0.075$

8%にも満たない。やっぱり私って不幸なんだ……。

※ちなみに、$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ で作られる数列をフィボナッチ数列といいますが、モンモール数の並びとなんか似てますね。

123

……9 を生み出す数

123 の数の並びを適当に入れ替えて、2 つの数の差をとってください。

$321-123=198=9\times 11\times 2$

9 の倍数になっています。実は、どのように各位の数字の並びを入れ替えて差をとっても必ず 9 の倍数になります。

$312-123=189=9\times 21$ 、$231-123=108=9\times 12$

原理は簡単です。3 桁の数 abc を

$abc=100a+10b+c$

と表し、a,b,c を別の位に移します。百と一の位を入れ替えるとその差は $100a-a=99a$

百の位と十の位を入れ替えるとその差は $100a-10a=90a$

十の位と一の位を入れ替えるとその差は $10b-b=9b$

どのように入れ替えてもその差は必ず 9 の倍数になります。

だから、123 と 321 だけが特別な性質を持っている数という訳ではありません。

すべての数が持っている性質なのですが、数達がみんな、私も私もと主張すると大変なことになってしまいますので、何事も始まりは、イチ、ニー、サンからということで、123 を代表の数とさせていただきました。

もちろん、この性質は、3 桁の数だけに成立するものではありません。

n 桁の数で、s 桁の数 p を t 桁 $(n\geqq s>t>1)$ に移すと、その差は、

$$p\times 10^{s-1}-p10^{t-1}=p\times 10^{t-1}(10^{s-t}-1)$$

$10^{s-t}-1$ は明らかに 9 の倍数ですから、どんな桁の数にも共通して言える性質なのです。

例えば、

$513624-123456=390168=9\times 43352$

となります。

では、2 つの数の差をとるのではなく、和をとるとどうなるでしょう。

先程の n 桁の数で、s 桁の数 p を t 桁 $(n\geqq s>t>1)$ に移すと、その和は、

$$p\times 10^{s-1}+p10^{t-1}=p\times 10^{t-1}(10^{s-t}+1)$$

カッコの中の数は、s と t の桁数の開きを考えると、

11,　101,　1001,　10001,　100001,……

と変化していきます。

さてこれらの数で、1 と 1 の間に 0 が偶数個あるものは、

$10^{2k-1}+1$

と表されますが、この数は

$10^{2k-1}+1=(10+1)(10^{2k-2}-10^{2k-3}+10^{2k-4}\cdots\cdots+1)$

と変形でき、11 の倍数になります。すなわち、一の位と十の位、一の位と千の位、十の位と万の位といった、2 つの数の間に偶数個の数字があるように、すべての数字を並び替えた数ともとの数との和は 11 の倍数になります。

この性質を用いると、4 桁の数に、その数字の並びを右から読んだ数を加えると、

$2634+4362=6996=11\times 636$

11 の倍数になりますが、これは、千の位と一の位、そして百の位と十の位の入れ替えをするからです。6 桁、8 桁の数についても同様に 11 の倍数になるような操作が可能です。

さて、この差と和の性質を用いて簡単な数当てゲームをしてみましょう。

> 一の位と十の位が異なる 2 桁の数を考えてください。
> 次に、一の位と十の位を入れ替えた数を求め、
> ①最初の数から引いた値
> ②最初の数に加えた値
> を教えてください。最初に考えた数を当ててみましょう。

例えば、

①36　②88

であれば、もとの数は 62 です。

最初の数を $ab=10a+b$ $(a>b)$ とすると、入れ替えた数は $ba=10b+a$ より、

その差は $9(a-b)$ 、その和は $11(a+b)$ ですから、

$(a+b)+(a-b)=2a,\ (a+b)-(a-b)=2b$

となります。したがって①を 9 で割った数と、②を 11 で割った数を求め、

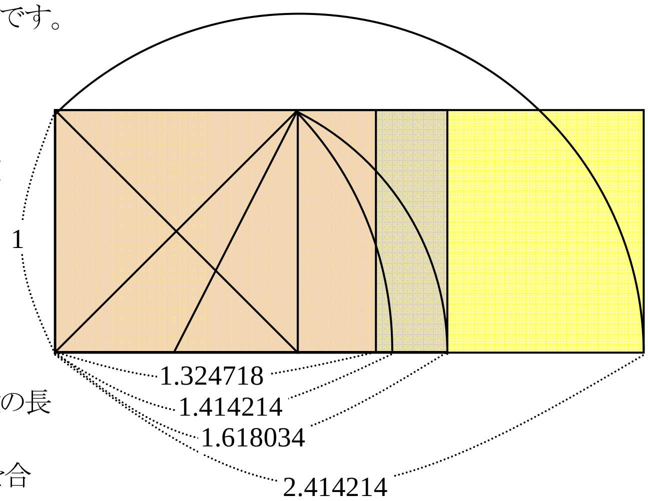
和の半分、差の半分が a,b となります。①の値が負のときは、正になおし、a と b を入れ替えればいいわけです。

あなたも、別の数字当てゲーム、つくってみませんか。

1.324718

……次世代の美を表現する比

長～い小数の近似値の最初の部分の値です。「遺産にしないや」とでも唱えましょうか。
黄金数(Golden−Number)、白銀数(Silver−Number)は、数の世界及び自然界に君臨する超有名数ですが、ここに紹介する数は最近脚光を浴びているプラスチック数(Plastic Number)と呼ばれるものです。



黄金数は、$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり、約1.6180339887……の値。

1と黄金数の比は黄金比といい、もっとも自然界の中では美しい比とされ、パルテノン神殿のような建造物、絵画、彫刻などのその比の値をみることができます。

白銀数は、$1+\sqrt{2}$ であり、約2.41421356……の値。

正方形の1辺のその対角線の比$1:\sqrt{2}$を白銀比といい、日本人が好んだ比であり大和比とも呼ばれ、五重塔、銀閣寺といった歴史的建造物の中にみることができます。

では、プラスチック数はというと、右図はその長さを黄金数、白銀数の長さと比較したものですが、どのように得られた数か以下示しましょう。

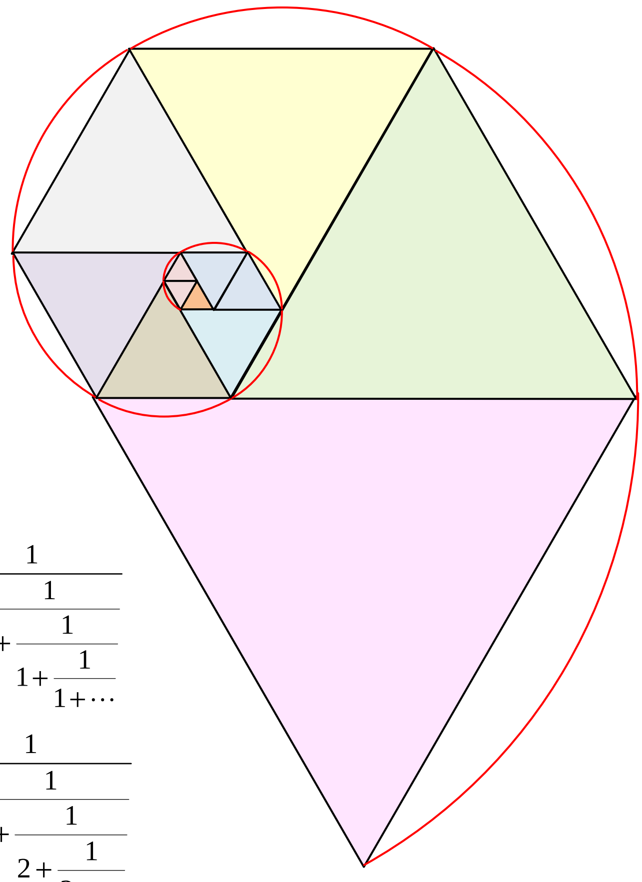
正三角形を右下図のように60°ずつ回転、拡大させていったものを合わせたとき、三角形の1辺の長さをみると、

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, ……

フィボナッチ数列とよく似た数列が生成されます。階差をとると、

0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, ……

5項めからもとの数列がまた出現し、これもまたフィボナッチ数列の性質に似ています。そして、各三角形の頂点を中心とし辺の長さを半径とする円弧を描き、繋いでいくと、図のような螺旋が出現します。フィボナッチ数列では正方形を90°回転・拡大していくと同様に描かれる対数螺旋に似ています。そして、隣り合う二項の比の極限を求めるとフィボナッチ数列から黄金比が求められると同様に、プラスチック数が得られます。ではこの数が何の役に立つかというと実は分かりません。黄金比と同様に作られるから多分これから意味をもってくるのだろうという推測から得られた数なのです。



さて、黄金比や白銀比は連分数展開ができることが知られています。

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}=\cdots=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

$$1+\sqrt{2}=2+\left(\sqrt{2}-1\right)=2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=\cdots=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

では、プラスチック数はというとできません。
円周率だって連分数展開ができるのに無理なのです。
他に黄金比、白銀比と共通した性質はないかというと、、方程式の解として考えると、

黄金比は、$x^2-x-1=0$ の解であり、$x=\sqrt{x+1}$ 　これから、 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$

白銀比は、$x^2-2x-1=0$ の解であり、$x=\sqrt{2x+1}$ 　これから、 $1+\sqrt{2}=\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\cdots}}}}}$

プラスチック数は、$x^3-x-1=0$ の解であり、$x=\sqrt[3]{x+1}$ 　これから、 $p=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}}}$

3乗根で表されるのをみても幾何的な数字ではないハイテクな色合いを感じさせます。未来のテクノ世代は、この比の値を美しいと感じて、プラスチック数の比で作られた家屋で生活し、プラスチック数の比で裁合わせた衣服を身にまとうのかも知れません。

$\frac{11}{12}$

…………比を操る数

実家に行ったＳ氏は、母親から「このお金を適当な割合に分けて、3 人の孫にお小遣いをあげて」、と千円札 12 枚を貰った。

S 氏は、最近金欠ぎみだったので、ちょっと心に悪が芽生えた。家に戻ってから、3 人の息子を呼んで、「おばあちゃんがお小遣いをくれたぞ。これを 3 人に分配するようにとのことだ」といって、12 枚から 1 枚くすねて、残り 11 枚を長男に渡した。

S 氏は続けて曰く。「年齢に合わせて分配するようにとのことだ。長男には全体の$\frac{1}{2}$、次男には$\frac{1}{4}$、そして三男には$\frac{1}{6}$のお金をあげなさいとお祖母ちゃんはいっていた」。お金を受け取った長男は、「うーん」と考え込んでしまった。「お父さん、11 枚をおばあちゃんがいったように分けることはできないよ」、「そうか、困ったな。よし、お父さんが 1 枚上乗せしよう」といって、ポケットから千円札を長男に渡した。「うん、今度は分けられるよ、お父さん」といって長男は次のように分配した。

まず、僕は$\frac{1}{2}$だから、　$12{,}000\times\frac{1}{2}=6{,}000$（円）

次に、弟は$\frac{1}{4}$だから、　$12{,}000\times\frac{1}{4}=3{,}000$（円）

最後にチビは$\frac{1}{6}$だから、$12{,}000\times\frac{1}{6}=2{,}000$（円）

$6{,}000+3{,}000+2{,}000=11{,}000$（円）。「お父さん、千円札が 1 枚残ったよ」。お父さん、シメシメ「そうか、うまく分けられて良かったな、それじゃ、その千円、お父さんに返してもらおう」。「1 枚加えただけで、分けられなかったお金がうまく分配できちゃうんだ。お父さん凄い」。子供たちの尊敬の眼差しにちょっと心が温まり、懐も温まったＳ氏だった。

みなさんはＳ氏のトリック、見抜けましたね。3 つの比を足してみましょう。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2}{12}=\frac{11}{12}$$

比は、全体が 1 に対する割合のことですから、この計算では$\frac{1}{12}$、すなわち千円分足りないのです。そのことが「不思議な錯覚」を引き起こします。また、分母の 12 の約数が、1,2,3,4,6 と多いことにも計算をするとき、心理的に騙されてしまいます。

分数を 2 つ以上の分数に分解することを「部分分数分解」といいますが、この考え方は、古代エジプトでも用いられリンドパピルスの中にも記されています。原理は簡単です。

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}\quad \text{より、}\ \frac{1}{ab}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\quad \text{となります。}$$

これは、分母が 2 数の積abであるとき、2 数の差$(b-a)$で割れば分解ができることを表しています。例えば、

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\text{、}\quad \frac{1}{15}=\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

となります。では、分母が 2 数の積に分解できないときはどうすればいいでしょう。

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\ \text{であることから、}\ \frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

同様に、部分分数分解できます。例えば、

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

となるわけです。これを用いて、1 を分解してみましょう。

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

このように分ければ問題なかったわけです。それを知っていたであろうＳ氏のお母さんは凄い、それに引き換え……。
さて、Ｓ氏は 1 ヶ月後、実家にいったときに、また母親から千円札で 12 枚、孫のお小遣いを貰いました。
前回で味を占めたＳ氏。今度は三男に千円札 11 枚と、マイポケットから 1 枚加えた 12 枚を渡し、分配するようにいいました。

えーっと、お兄ちゃんは、$\frac{1}{2}$だから 6,000 円。次のお兄ちゃんは$\frac{1}{3}$だから 4,000 円。僕は$\frac{1}{4}$で 3,000 円。

6,000+4,000+3,000=13,000 円。あれ、お父さん、あと千円足りないよ。

S 氏は、財布からさらに 1,000 円を渡すべきでしょうか。それとも比を誤って理解してしまった子どもたちに原理を説明し、前回の不正を明らかにし、親の威厳を失うべきでしょうか。

11

11 のお茶目な悪戯にはいままでずいぶん驚かされました。ここでは速算をサポートする 11 の活躍をお見せしましょう。
下のような表を用意します。さて、適当な数を思い浮かべ、表の値の欄の 1 回目、2 回目に書いてください。表は 12 と 31 の場合です。その 2 数の和を 3 回目の値の欄に書きます。次の値の欄には、2 つ左手前、1 つ左手前の数の和を書き、以下続けていきます。結構計算は大変ですね。でもまたまだ序の口。本当の計算はこれからです。今度はその下の和の欄に、値の和を計算します。記入する欄の左の数と上の数を足すと和は求められます。下の表は、10 回繰り返したものです。
さてこの表の中で、7 回目の 2 段目の数 308 で、10 回目の 3 段目の数 3388 を割ってみましょう。

$\dfrac{3388}{308}=11$　隠れていた 11 が姿を表しました。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
値	12	31	43	74	117	191	308	499	807	1306
和	12	43	86	160	277	468	776	1275	2082	3388

このしくみを最初の 2 数を a,b として、同様に表を作って調べてみましょう。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
値	a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$
和	a	$a+b$	$2a+2b$	$3a+4b$	$5a+7b$	$8a+12b$	$13a+20b$	$21a+33b$	$34a+54b$	$55a+88b$

表から、7 回目の値は $5a+8b$ 、10 回目の和は $55a+88b$ になります。

$$55a+88b=11(5a+8b)$$

これから、7 回目の値を 11 倍すると 10 回目の和が得られるわけです。
この性質は、数当てゲームに応用できます。
適当な 2 数を選び各回の値を計算させます。さんざん計算をさせてから、「大変でたね」といって労をねぎらい、追い打ちを掛けるように

「さあ、では 10 回目までの値の和を求めてください。」

あなたは 7 回目の値が $n=5a+8b$ になることは知っているわけですから、相手が途中で計算ミスをしていたら、指摘して訂正させてください。計算が終了したら、おろむろに、n と n の桁をひと桁ずらしたものを足し、「その値は〇〇ですね」と答えるのです。周りの人はあなたの速算力に舌を巻くことでしょう。実際に偉いのは数 11 なんですけど。
この 11 が次に現れるのは何回目か調べてみましょう。右表は、各回の値と和の a,b の係数をそれぞれ書き抜いたものです。20 回目、30 回目の和は、

$$6765a+10945b=11(615a+995b)$$

$$832040a+1346268b=11(75640a+122388b)$$

いずれも 11 の倍数であり、どうやら 10 回ごとに悪戯を仕掛けているようです。
ただし、この 2 つの回については、対応する値はなく、数当てゲームにすることはできません。

No.	値の a,b の係数		和の a,b の係数	
	a	b	a	b
1	1	0	1	0
2	0	1	1	1
3	1	1	2	2
4	1	2	3	4
5	2	3	5	7
6	3	5	8	12
7	5	8	13	20
8	8	13	21	33
9	13	21	34	54
10	21	34	55	88
11	34	55	89	143
12	55	89	144	232
13	89	144	233	376
14	144	233	377	609
15	233	377	610	986
16	377	610	987	1596
17	610	987	1597	2583
18	987	1597	2584	4180
19	1597	2584	4181	6764
20	2584	4181	6765	10945
21	4181	6765	10946	17710
22	6765	10946	17711	28656
23	10946	17711	28657	46367
24	17711	28657	46368	75024
25	28657	46368	75025	121392
26	46368	75025	121393	196417
27	75025	121393	196418	317810
28	121393	196418	317811	514228
29	196418	317811	514229	832039
30	317811	514229	832040	1346268

ところで、右表をみると、同じ数字が何度も登場していることが分かるでしょうか。

n 回目の値の a の係数は $(n-1)$ 回目の値の b の係数に等しく、
$(n-1)$ 回目の値の b の係数は $(n-2)$ 回目の和の a の係数に等しく、
$(n-2)$ 回目の和の a の係数は $(n-3)$ 回目の和の b の係数＋1 に等しく

なっています。値や和の生成法を考えればそのことは理解できると思います。
ところでちょっと値の a の係数を 3 回目以降、抜き出してみましょう。

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$

この数列の一般項を $F(n)$ とし、n 回目の値を $P(n)$ 、和を $S(n)$ とすれば、

$$P(n)=F(n-2)a+F(n-1)b \qquad S(n)=F(n)a+\{F(n+1)-1\}b \qquad (n\geqq 3)$$

$P(n)$ 、$S(n)$ は $F(n)$ を用いて表すことができます。
この $F(n)$ 、どこから会ったことがありませんか。
そう、フィボナッチ数列です。上の関係式は実はフィボナッチ数列の性質を示しているのです。フィボナッチ数列の隣り合う 2 数の比の極限は、自然界の美と調和の頂点に君臨する黄金比を表します。だから 11 は、大胆にも美の女王に悪戯を仕掛けているのです。王女様の愛着のドレスを等間隔にかじって穴を空けてしまったネズミのように。

4

…………自然数の終着にある数

4 は陽の目をみない数です。1 は根源を表す神性の象徴、2 は偶数で唯一の素数である極性を示し、3 はあらゆる現象の背後に常に伏在し 9 を従えています。では 4 はどういった性質を持つのでしょう。一番小さな合成数であり、「物質界を秩序づける数」と言われ、座標により平面を 4 分割することで世界を統合しているといいながら、3 点で決定する平面に、4 つめを加えることでバランスを失い平面を壊してしまうこともあります。他の数の活躍に比べると何となく疎まれている印象はあります。

でも 4 にはとても不思議な性質が潜んでいます。

4 を平方した数 16 の各位の数の平方の和を求めてみましょう。

$$1^2+6^2=37$$

次に 37 についても同様に各位の数の平方の和を求め、この操作を値が 4 以下になるまで続けていきます。

$$3^2+7^2=58 \Rightarrow 5^2+8^2=89 \Rightarrow 8^2+9^2=145 \Rightarrow 1^2+4^2+5^2=42$$

$$\Rightarrow 4^2+2^2=20 \Rightarrow 2^2+0^2=4$$

8 回の操作で 4 に戻りました。では、他の数はこの操作でどんな数に収束するでしょうか。

5 は平方して 25。以降は次の通り。

$$2^2+5^2=29 \Rightarrow 2^2+9^2=85 \Rightarrow 8^2+5^2=89 \Rightarrow 8^2+9^2=145$$

$$\Rightarrow 1^2+4^2+5^2=42 \Rightarrow 4^2+2^2=20 \Rightarrow 2^2+0^2=4$$

これも 8 回目に 4 に収束します。これを、100 以下の自然数について調べてみた結果が右表になります。大半が 4 に収束し、次が 1,2,3 と続きます。ただし、2 の平方は 4 ですから実際には 2 の欄にある 2,11,78,87 は 4 に収束します。また、3 についてもさらに平方して 9 とみると、右表から 9 は 4 に収束することが分かります。

結局 100 以下の数で 1 に収束するものは 20 個。そして 4 に収束するものは 80 個であり、この 2 数以外の収束値はないのです。

では、1000 以下の自然数はどうなっているか調べてみると、857 個が 4 に収束します。100 以下の 80%から 85.7%に増えました。10,000 以下で 4 は 8558 個。ちょっと 1 が巻き返しました。100,000 以下では 4 は 85,623 個。1,000,000 以下では、856,929 個。どうやら 85%の値で落ち着いてきそうです。また、収束するまでの最高回数をみると、

100 以下　14 回　1,000 以下 15 回　10,000 以下 15 回　100,000 以下　16 回

そして、1,000,000 以下でも僅か 16 回で収束してしまいます。

なお、3 は平方することで収束値を 4 とみることができましたが、3 のままでみると、1000 以下で収束するのは、3 と 111 しかありません。111 は、

$$1^2+1^2+1^2=3$$

で 1 回で収束してしまうのですが、これ意外にないのも驚きです。ところが 10,000 以下になると一気に 69 個に増えてしまいます(これでも少ない個数ではありますが)。

さて、それでは計算のルールを「平方の和」から「立法の和」に変えるとどうなるでしょう。

4 の立法数 64 に対して、

$$6^3+4^3=280 \Rightarrow 2^3+8^3+0^3=520 \Rightarrow 5^3+2^3+0^3=133$$

$$\Rightarrow 1^3+3^3+3^3=55 \Rightarrow 5^3+5^3=250 \Rightarrow 2^3+5^3+0^3=133$$

分数を小数展開したときに循環節 3 で繰り返されるように、無限ループに入ります。

また、2,3,5 はそれぞれ、371,153,371 になるとそれ以降は無限小数のように繰り返されます。すなわち、これから、

$$3^3+7^3+1^3=371$$

$$1^3+5^3+3^3=153$$

という面白い結果が得られます。

ついでに 1～10 について 4 乗も調べてみましょう。

1 と 10 はもちろん 1 に収束しますが、ところが、2 から 9 までは、

……,13139,6725,4338,4514,1138,4179,9219,……

1 以外のすべての一桁の数でこの循環節 7 のループになります。いったい何が起こっているのでしょう。

No.	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	50
2	7	11	(111)	5	51
3	10	78		6	52
4	13	87		8	53
5	19			9	54
6	23			12	55
7	28			14	56
8	31			15	57
9	32			16	58
10	44			17	59
11	49			18	60
12	68			20	61
13	70			21	62
14	79			22	63
15	82			24	64
16	86			25	65
17	91			26	66
18	94			27	67
19	97			29	69
20	100			30	71
21				33	72
22				34	73
23				35	74
24				36	75
25				37	76
26				38	77
27				39	80
28				40	81
29				41	83
30				42	84
31				43	85
32				45	88
33				46	89
34				47	90
35				48	92
36					93
37					95
38					96
39					98
40					99

「平方の和」だけが、1 と 4 に収束することは驚きです。1,3,9 といった多くの数が、合成数の中に内存し潜んでいるのに対して、4 はもっと先にある到達の数ではないでしょうか。日本では 4 は「死」に繋がり敬遠されますが、その「死」は終焉であるけど、来世を意味するものと考えれば、4 は崇高な数といえるのです。

1

数４の話題では、自然数の各桁の数の平方の和を繰り返すと、ほとんどの数は４に収束することをみました。このようにある操作の繰り返しで収束する有名なものにコラッツ−角谷の予想と言われるものがあります。

> 自然数nに対して、
> ①偶数ならば２で割る。
> ②奇数ならば３倍して１を加える
> この操作を繰り返し行うとき、自然数nは最終的に１になる。

例えば、数３は、　$3 \overset{②}{\Rightarrow} 10 \overset{①}{\Rightarrow} 5 \overset{②}{\Rightarrow} 16 \overset{①}{\Rightarrow} 8 \overset{①}{\Rightarrow} 4 \overset{①}{\Rightarrow} 2 \overset{①}{\Rightarrow} 1$

このように１にたどり着きます(1に収束と表現します)。他の１桁の数も、7のように繰り返し操作が16回と多いものもありますが、最終的にはすべて１に収束します。2桁の数では１桁に対して繰り返し回数は増え、平均で34回であり、一番多いものは数54,55がどちらも112回で収束します。3桁は62.5回の平均で、数871の178回が最高回数です(871と178という面白い関係)。4桁は平均87.7回、最高は53個の数字が199回で収束します。このように回数は異なってもどんな自然数も１に収束しそうなのです(なお、386から391までの連続する6つの自然数は、すべて回数120で収束します。この操作では同じ回数で収束する連続する自然数が多いことも特徴です)。

ではどうして１に収束すると予想できるのでしょうか。①と②の操作をみてみると、①の２で割る操作は合成数から２の倍数をそぎ落とし、スリム化することであり、次の操作に言い換えることができます。

> ① 2^m（$m \geqq 1$)を因数にもつとき、2^mで割る(奇数化)

これに対して②は、奇数を$2k+1$と置くと、3倍して１を加えることより、$3(2k+1)+1=6k+4=2(3k+2)$

結局、この操作で奇数は偶数に変換され、①によりさらに$3k+2$に変換されます。②は偶数化の操作なのです。

数７でその過程を見てみると、

$$7 \overset{②}{\Rightarrow} 22 \overset{①}{\Rightarrow} 11 \overset{②}{\Rightarrow} 34 \overset{①}{\Rightarrow} 17 \overset{②}{\Rightarrow} 52 \overset{①}{\Rightarrow} 13 \overset{②}{\Rightarrow} 40 \overset{①}{\Rightarrow} 5 \overset{②}{\Rightarrow} 16 \overset{①}{\Rightarrow} 1$$

操作は①と②が交互に繰り返されることが分かります。だからこの操作は奇数を偶数に変えてから２のべき乗でそぎ落としていき、4⇒2⇒1 とスリム変換をしているわけです。でも偶数化するための操作はなぜ②でなければいけないのでしょうか。例えば、②の奇数を偶数にするには1を加えれば終わりですが、この場合はもちろん必ず１に収束しますが価値のない操作といえます。それでは５倍して１を加えるとしたらどうなるでしょう。数７でみると、

$$7 \Rightarrow 36 \Rightarrow 9 \Rightarrow 46 \Rightarrow 23 \Rightarrow 116 \Rightarrow 29 \Rightarrow 146 \Rightarrow 73 \Rightarrow 366 \Rightarrow 183 \Rightarrow 916$$

奇数化した数が大きくなっていくことが分かり、あっという間に発散しオーバーフローになってしまいます。
３倍して１を加えることでどんなことが起こっているのでしょう。

nが偶数のときは$n=2k$とすると２で割ると操作後kになります。これから自然数nは$\dfrac{n}{2}$の値になります。

nが奇数のときは$n=2k+1$とすると3倍して１を加えると操作後は偶数$6k+4$になり、さらに２で割り$3k+2$になります。

すなわち、$2k+1$が$3k+2$になるわけですから、自然数nは大雑把にいうと$\dfrac{3}{2}n$の値になります(ちょっと乱暴ですが)。

①の奇数化と②の偶数化は交互に起こることより、その回数は等しいと考えられます。そこで$2m$回の繰り返しをするときは、

$$n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{3}{2}\right)^m n = \left(\frac{3}{4}\right)^m n$$

回数mが増えると値が収束することが分かりますね。これが５倍のときは、$\left(\dfrac{5}{4}\right)^m$となり発散してしまうのです。

では、「3倍して１を引く」という操作は良さそうに思えます。でも数５を見てください。　5⇒14⇒7⇒20⇒5⇒14⇒7⇒…
5はループになってしまい、振動という意味で発散するものがでてくるのです。
それならば②を２倍して２を加えてみましょう。　$2(2k+1)+2=4(k+1) \Rightarrow k+1$

数nは約$\dfrac{1}{2}$になるから偶数の操作と合わせて$\left(\dfrac{1}{4}\right)^m$。この操作では１に収束しそうです。でもその収束回数は４桁の数でも最大の回数36回です。あまりに収束は速く、思わせぶりがなくストレート過ぎるため面白くないですね。このようにみていくと「3倍して１を加える」という操作はなかなかどうして奥深いものがありそうです。そのため放浪数学者エルデシュ氏は、「数学はまだこの種の問題に対する用意ができていない」といい、氏にしては破格の500ドルの懸賞金を出しています。

さて、数１はすべての始まり、根元を表す数で、４が終着数であるならその対極にある数といえます。ところで、自然数が１に収束後もさらに操作を続けていくと、1⇒4⇒1⇒4…　というループになり、根元数と終着数は振り子のように反復します。

数の振る舞いもまた、人生のように輪廻転生を繰り返すのです。

$\dfrac{12}{5}$

…………ハーモニーを奏でる数

次の 5 番目の□の中にはどんな数字が入るでしょう

$$12,\ 6,\ 4,\ 3,\ \square,\ 2,\ \cdots\cdots$$

4 番目の 3 と 6 番目の 2 の間だから、分数でしょうか、それとも……。
逆数を通分すると、規則性が見えてきます。

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \square, \frac{6}{12},$$

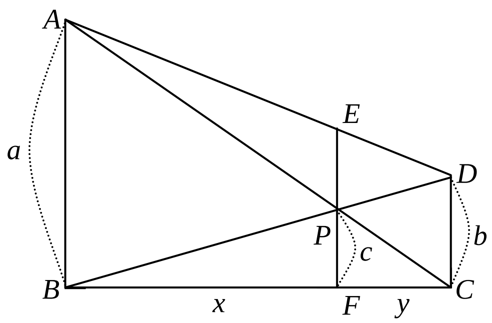
$\dfrac{5}{12}$ の逆数 $\dfrac{12}{5}$ が正解です。このように、一定数ずつ増えていく数列(等差数列)の逆数で作られる調和数列は 2 数の平均を求めるときにちょっとしたいたずらをします。

> A 市、B 市間を往復で、往路は時速 40km、復路は時速 60km で車を運転したとすると、往復の平均時速は?

相加平均を考えて、$\dfrac{40+60}{2}=50(km/h)$ としてしまうと、罠にはまったことになります。A 市と B 市間の距離を h 、往路、復路で要した時間をそれぞれ s,t 時間として、計算すると、$h=40s=60t$ ですから、$s=\dfrac{h}{40}, t=\dfrac{h}{60}$ となります。これから、移動した距離 $2h$ に対して要した時間は $s+t$ から、その平均時速は、$\dfrac{2h}{s+t}=\dfrac{2h}{\dfrac{h}{40}+\dfrac{h}{60}}=48$ (km/h)。相加平均よりちょっと小さめの値になっています。この値は、2 数の「逆数の相加平均の逆数」であり、これを 2 数の調和平均といいます。

2 数 a,b の調和平均は、$\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)}=\dfrac{2ab}{a+b}$ で与えられます。これから、2 と 3 の調和平均は $\dfrac{2\cdot 3\cdot 2}{3+2}=\dfrac{12}{5}$ になります。

> 右図で EF の長さは?



これも上の平均時速と同じように考えてみましょう。
$BF=x, FC=y, PF=c$ とします。

$\Delta ABC \backsim \Delta PFC$ より、$\dfrac{x+y}{a}=\dfrac{y}{c}$。$\Delta DBC \backsim \Delta PDF$ より、$\dfrac{x+y}{b}=\dfrac{x}{c}$

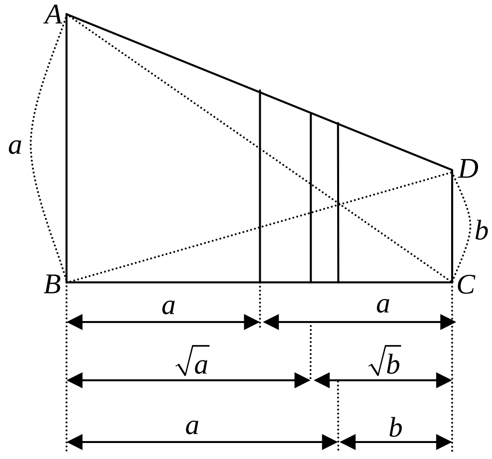
2 式を辺々加えて、$(x+y)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{x+y}{c}$。これから、$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$

すなわち、$c=\dfrac{ac}{a+b}$ ですから、$EF=2c=\dfrac{2ab}{a+b}$。EF の長さは調和平均になっています。

なお、この図で相加平均は、BC の中点を通り BC に垂直な線分になります。相乗平均は、台形 $ABCD$ を相似な 2 つの台形に分けるような、BC に垂直な線分になります。このそれぞれの平均により、線分 BC は右図の比に分けられ、相加平均 A、相乗平均 G、調和平均 H の長さは、それぞれ、

$$A=\frac{a+b}{2}\text{、}G=\sqrt{ab}\text{、}H=\frac{2ab}{a+b}$$

で表されます。



そしてこれらの 3 つの平均には、関係式 $A \geqq G \geqq H$ (等号成立は $a=b$ のとき)が成り立っています。さて、調和平均はその名が表すように、Harmony を奏でる平均でもあり、2 音の平均から新たな音が響きます。

ピタゴラスは、ある長さの弦をドとして音を出すとき、$\dfrac{2}{3}$ の長さの位置で押さえると、ソの音が、半分の長さの位置で押さえると、1 オクターブ高いドの音がでることを知り、音階を作ったといわれます。面白いことに、その 1 オクターブ違いの 2 つのドの長さの相加平均がファ、調和平均がソの音になっているのです。

音　　階	ド	ファ	ソ	ド
弦の長さの比	1	3/4	2/3	1/2

$$\frac{355}{113}$$

…………神に憧れた数

分子は5×71の合成数です。分母は素数であり各位の数を入れ替えて作られる数131,311もまた素数になる性質をもちますが、だからといってそれほど特徴のある分数には見えません。連続する奇数を2つずつ並べた113355の並びを真ん中から分割して分母・分子にしたとみると面白いとはいえますが。ところが、この分数を小数にしてみると……

3.1415929203539823008849557522123893805309……

3.14159292035398………
−3.14159265358979………
＝0.00000026676419………

もうお分かりですね。この数は3桁の自然数の比としてはもっとも精度の高い円周率の近似を表し、なんと小数第6位まで値が一致しているのです。もう一度、円周率πと比較し、2数の差をとった値を右に示しましょう。

小数第7位以下からはズレが生じますが､その差は微小であることが分かります。

円周率πは、「神が作った数」（数学者:藤原正彦）といわれ、円という完全無欠な図形の中にありながら円周から得られる円周率は無限でしか表現できないことに多くの数学者は魅了されました。

πの近似計算は、その神秘性に取り付かれた人たちによって先を争い競いあうように求められていきます。

紀元前3世紀ごろに活躍したアルキメデスは、初めて円周率を数学的に計算したといわれ、円に内接、外接する正九十六角形の辺の長さから近似しました。

$$3.140 < \frac{231}{71} < \pi < \frac{22}{7} < 3.14286$$

これからアルキメデスは、$\pi = 3.14$ と決めたようです。当時の正n角形から近似するのは2桁(小数第n位をn桁と表します)までが限界だったようです。紀元2世紀には、ギリシアの天文学者プトレマイオスは、

$$\pi = \frac{377}{120} = 3.141666\cdots$$

として計算に用いていたと言われますが、これも3桁までの一致です。そしてその後、16世紀に入りオランダのルドルフは正2^{62}角形というとてつもない辺の長さの和を求めることで35桁まで計算することに成功しました(ドイツでは円周率をルドルフ数といいます)。ただ、アルキメデスから2000年近くの年月を経てまだ35桁であり、神々の山稜までの道のりはそれほどに遠いものだったのです。

さて、$\frac{355}{113}$ ですが、この分数の発見も16世紀になってからのものです。メティウスが、円周率を分数$\frac{333}{106}$と$\frac{377}{120}$の間にあると考え、分子同士、分母同士の和をとって、その比を求めたといわれます。

$$\frac{333+377}{106+120} = \frac{710}{226} = \frac{355}{113}$$

しかし、16世紀の後半、オットーとアンソニスゾーンは、アルキメデスとプトレマイオスの近似数の、分母、分子同士を引いて得られることを知ります。

$$\frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$$

紀元2世紀の時代からこの数はプトレマイオスが求めた分数の中に潜み、1400年の時の流れに漂い人間を嘲笑っていたのです。ところが、古代中国の南朝の宋の数学者、祖沖之はこの数を1000年以上前に既に発見していました。これもこの分数が仕掛けた悪戯でしょうか。(祖沖之は22/7を約率、355/113を密率と称しました)。

さて、円周率は、整数の比で表すことができない超越数ですが、正n角形での近似が限界になった後、18世紀に入ってからは、連分数で表現することが考えられました。右がその展開です。この展開の中で一際目立つ大きな数292。何か違和感があります。そこでこの数で展開に一区切りをつけ、右の□で囲った部分はほぼ0と考えてみます。

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \boxed{\cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15+1}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{113}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$$

また、$\frac{355}{113}$ が目を覚ますのです。

神のお側に仕えたいと切望し円周率に近づこうとしたこの数は、受け入れられなかった苛立たしさを、円周率計算に躍起になっている人間たちにぶつけるかのように歴史の中に顔をのぞかせるのです。この数は残念ながら7桁で神に見放されますが、その循環節を調べると驚くべきことが分かります。すべての分数は循環節のある小数で表されますが、この数ではなかなかその繰り返しが現れません。繰り返しが現れるのはなんと112桁め。素数pの逆数の循環節の長さは最大で$p-1$桁であることが知られ、この数の分母113も素数です。すなわち、この数は7桁でπとのズレが起きても、超越数であるπに近づくことを諦めないで、循環節の最大の長さになるまで追い続け、焦がれ続けるのです。その有り様は太陽に近づきすぎて失墜したイカロスにも似ています。

70

…………本当の不思議数

ある数nのそれ自身を除く約数で、その和がnよりも大きくなるものを考えてみましょう。例えば20はそれ自身を除く約数は1, 2, 4, 5,10であり、和は$1+2+4+5+10=22$になります。このとき、この約数から幾つかを選んで、その和がもとの数になるようにすることができるでしょうか。20については、

$$1+4+5+10=20$$

できましたね。では他の数でも同様にできるか挑戦してみてください。といってもそれ自身を除く和がもとの数より大きなものを探すのは大変ですね。そこで、100 以下の自然数でこの条件を満たすものを右に示しました。実は 22 個しかありません。ではこの中から適当な数を選んでその数を約数の和で表してください。

数	約数の和	それ自身を除く約数
12	16	1 2 3 4 6
18	21	1 2 3 6 9
20	22	1 2 4 5 10
24	36	1 2 3 4 6 8 12
30	42	1 2 3 5 6 10 15
36	55	1 2 3 4 6 9 12 18
40	50	1 2 4 5 8 10 20
42	54	1 2 3 6 7 14 21
48	76	1 2 3 4 6 8 12 16 24
54	66	1 2 3 6 9 18 27
56	64	1 2 4 7 8 14 28
60	108	1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30
66	78	1 2 3 6 11 22 33
70	74	1 2 5 7 10 14 35
72	123	1 2 3 4 6 8 9 12 18 24 36
78	90	1 2 3 6 13 26 39
80	106	1 2 4 5 8 10 16 20 40
84	140	1 2 3 4 6 7 12 14 21 28 42
88	92	1 2 4 8 11 22 44
90	144	1 2 3 5 6 9 10 15 18 30 45
96	156	1 2 3 4 6 8 12 16 24 32 48
100	117	1 2 4 5 10 20 25 50

もうひとつ例を挙げましょう。48は右表から約数は、たくさんあり、その和は76になります。和が48になる組み合わせは、

$$48=1+2+3+4+6+8+24=8+16+24$$

不思議なことにどの数でもできそうですね。

えっ、できなかった。ひょっとしたら70を選びました。今回の不思議数が70だからといって、やっちゃいましたか?。実はこの22個の中で唯一70だけが約数の和で表すことができない数なのです。

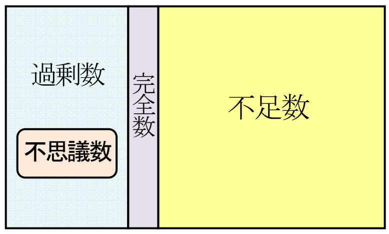
70が約数の和で表せないことは自分自身を除く約数の総和が74であることから調べられます。和を70に近づけるためには7以上の約数はすべて和の中に必ず含まれていなければなりません。それを足すと$7+10+14+35=66$。残っている約数は1と2と5だけですが、これをどのように組み合わせて足しても70にはなりません。このような数は100から1000の間では836だけ、それより大きな数は、

$$4030,\ 5830,\ 7192,\ 7912,\ 9272,\ 10430,\ 10570,\ 10792,\ 10990,\ \cdots$$

このように続いていきます。10000以下では、僅か7個しかないわけで、貴重な数といえます。

それ自身を除く総和が元の数を超えるとき、ほとんどの数は、約数の和で表現できることが本当は不思議なのですけど、そうでない数が7個しかないとそちらに目がいってしまい、なぜ?、と思ってしまうのです。さて、このような数を「不思議数」といいます。不思議という冠をいただく数は実際に存在していたんですね。

ところで、すべての自然数たちは大きくわけて3つのグループに分類できます。それ自身を除く約数の和が、その数より「小さい」「等しい」「大きい」グループであり、グループに属する数を、それぞれ、「不足数」、「完全数」、「過剰数」といいます。この中で世間でもっとも注目を集めている数は完全数で、6と28がいつも親善大使のように紹介されています。



6のそれ自身を除く約数は1,2,3で、$1+2+3=6$

28のそれ自身を除く約数は1,2,4,7,14で、$1+2+4+7+14=28$

いくらでもこのような数はありそうですが、このあとは、

$$496,\ 8128,\ 33550336,\ 8589869056,\ \cdots\cdots$$

なかなか顔を表しませんが、無数に存在することは知られています。

不思議数も稀にしか出現しない数ですが、次の性質があります。

「ある不思議数nのそれ自身を含む約数の総和を超える素数pに対して、np も不思議数」

不思議数70の約数の総和は、144です。これより大きい素数、149、151、157に対して、

$$149\times70=10430,\ 151\times70=10570,\ 157\times70=10990,\cdots$$

これらも不思議数になります。これから素数が無数にあることより不思議数も無数にあることが分かります。

さて、完全数は、*Perfect number*といい、いつも脚光を浴び、「奇数の完全数はあるか」といった問題も多くの数学者が研究をしています。その脚光の陰にいる不思議数は*Weird number*、「異様、風変わりな数」と訳され、*Weird fellow*は「変な奴」を意味します。スポットを当てられないことにちょっとすねるように、素数にちょっかいを出し、つるんだりするのです。そして、不思議数もまた完全数に当てつけるように奇数の不思議数はみつかっていません。

そんな不思議数に興味を持った数学者がいます。放浪数学者として知られるポール・エルデシュ教授は、次々に難問を考え、その問題を解いた人には懸賞金を出し、風変わりな数学者として知られていました。教授は1971年に

「奇数の不思議数の発見に10ドル、それが存在しない証明には25ドル」

の賞金をだしました。金額はともかく、発見と証明の金額の比率はどう解釈すればいいのでしょうか。教授は証明の可否のどちらの立場にいたのでしょうか。そして現在もその結論はでていません。誰も発見、証明ができないのか、それとも誰も研究していないのか……不思議な数ですね。

$\dfrac{1}{49}$

$\frac{1}{7}$の平方数である$\frac{1}{49}$にはどんな性質が潜んでいるのでしょう。$\frac{1}{7}$は循環節のロンドを演出する数としてあまりに有名ですがちょっとだけ披露すると

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7} \qquad \frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4} \qquad \frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1} \qquad \frac{4}{7}=0.\dot{5}7142\dot{8} \qquad \frac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5} \qquad \frac{6}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$$

$\frac{1}{7}$を 2〜6 倍すると、循環する数の順番が次々に入れ替わります。これ以外にも$\frac{1}{7}$は数々のパフォーマンスを披露してくれるのですが、ではこの数を平方するどうなるでしょう。$(0.142857142857\cdots)^2$、ちょっと計算したくない値ですね。その結果は、

$$(0.142857142857\cdots)^2=0.0204081632\cdots$$

何か気がつくでしょうか。小数以下の数字の並びが、$02, 04, 08, 16, 32, \cdots$ と変化していきます。2 桁毎に 2 のべき乗になっているようですが、本当にそうでしょうか。次の桁に現れる数は何だと思いますか。

2 の 6 乗で 64 ですか。残念、違います。65 になります。2 のべき乗の予想が間違っていたのかというとそうではありません。64 が続くことには間違いはないのですが、その後の数を考えてみてください。次は 2 の 7 乗ですから 128、すなわち 3 桁になってしまうため 1 の値が 1 桁前の数と重複してしまい、64+1=65 となります。それ以降も重複が次々とおこり規則性が崩れているように見えますが、しっかり保存されているのです。このように表現される理由を考えてみましょう。

```
 1
―― = 0.020408163265306122448979
49   0.02
         04
           08
             16
               32
                 64
                  128
                    256
                      512
                       1024
                         2048
```

小数展開の値をmとすると、

$$\begin{aligned} m &= \frac{2}{100}+\frac{4}{10000}+\frac{8}{1000000}+\frac{16}{100000000}+\cdots \\ &= \frac{2}{100}+\left(\frac{2}{100}\right)^2+\left(\frac{2}{100}\right)^3+\left(\frac{2}{100}\right)^4+\cdots \\ &= \frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{2}{100}}=\frac{1}{50}\times\frac{50}{49}=\frac{1}{49} \end{aligned}$$

予想が正しいことが示されました。このことから、一般に$\frac{p}{100}$のべき乗の和は小数にすると同様のことが起こります。

このときの分数は、

$$n=\frac{\frac{p}{100}}{1-\frac{p}{100}}=\frac{p}{100-p}$$

であり、例えば　$p=3$の場合は、$\frac{3}{97}=0309278350515\cdots$。

重なる部分が多すぎて規則性を見ることは難しいですね。

そこで$\frac{p}{10000}$とすると、$n=\frac{p}{10000-p}$となることより、

$n=2$のときは、$\frac{1}{4999}=0.0002\ 0004\ 0008\ 0016\ 0032\ 0064\ 0128\ 0256\ 0512\ 1024\ 2048\ 4096\ 81\cdots\cdots$

$n=3$のときは、$\frac{3}{9997}=0.0003\ 0009\ 0027\ 0081\ 0243\ 0729\ 2187\ 6562\cdots$

よさそうですね。規則性が分かるようになりました。

ところで、先ほど$\frac{1}{49}$の規則性が途中から分からなくなった理由はもう一つあります。それは、分数を小数に変換すると循環小数になりますが、2 のべき乗で桁数が増えていくとそのことに矛盾してしまうのです。$\frac{1}{49}$の循環節の長さはなんと42 桁です。

一般に素数nに対して$\frac{1}{n^2}$の循環節の長さは最大でn^2-nですからもっとも長い循環節になっています。

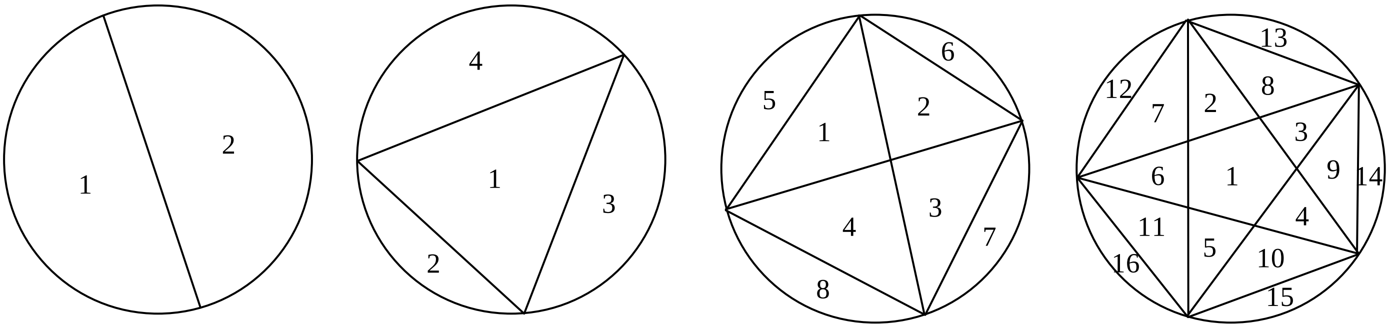
だから$\frac{1}{49}$は2 桁毎にべき乗の値を配置しながらも少しずつその値を補正し循環節の長さに収まるように頑張っているのです。

問　円周上の n $(n \geqq 2)$ 個の点を結んでできる弦により、円の内部が分割されてできる領域の最大個数を求めなさい。

具体的に図を描き、分割数を予測してみるのが一番いいでしょう。下図は、$n=2$ から $n=5$ について示したものです。では $n=6$ の場合は最大分割数は何だと思いますか。 n 個の場合の最大分割数を $D(n)$ とすると、下の図より、

$$D(2)=2,\ D(3)=4,\ D(4)=8,\ D(5)=16$$

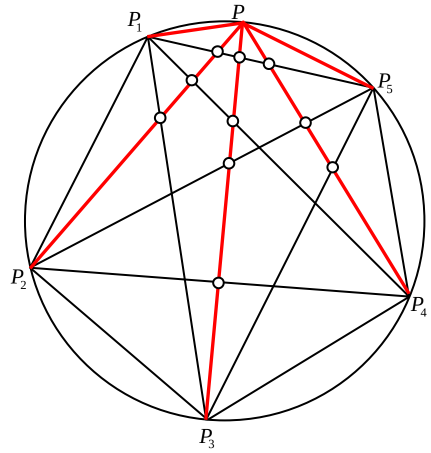
となっています。分割数は2倍されて増えていっているようですね。だから、 $D(6)=2\times D(5)=32$
そう答えると、表題の今回の数31は憮然として、あなたに一瞥を与えることでしょう。
正解はもちろん $D(6)=31$ です。



確かに、$n=5$ までは、 $D(n)=2^{n-1}$ と予想できるような変化の仕方です。実際、描いてみると $n=5$ のときには図も結構複雑になり、苦労して16分割という答えがでてくるため、この辺で結論を出していいのかなと思い、先程の誤答に走ってしまうのです。でも、もう少し注意深く見ると、仮に $n=1$ のときは1個となるはずですから、予想の一般項に代入すると、$D(1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ となり「おかしいぞ」と思うはずなのです。だいたい、すべての n に対して成立することを高々4つぐらいの図の検証で判断することは無謀であり、例えば

$$D(n)=2^{n-1}+(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

のようにいくらでも、ある n までは成立する式を作ることは可能なのです。「思慮が浅く、安易に妥協する」ことに対して数31はしかめっ面をするのです。



では、$n=6$ についても図で調べてみましょう。 $n=5$ のときの頂点 $P_1\sim P_5$ に、もう一点 P を $\overset{\frown}{P_5P_1}$ 上にとります。弦 PP_3 は、4本の弦と交わり、5つの線分に分割されます。その線分により、線分を含む領域はそれぞれ2分割され、新たに5つの領域が作られます。同じように、弦 PP_1 と PP_5 では1つずつ、弦 PP_2 と PP_4 では4つずつ作られます。したがって、その最大分割数は、

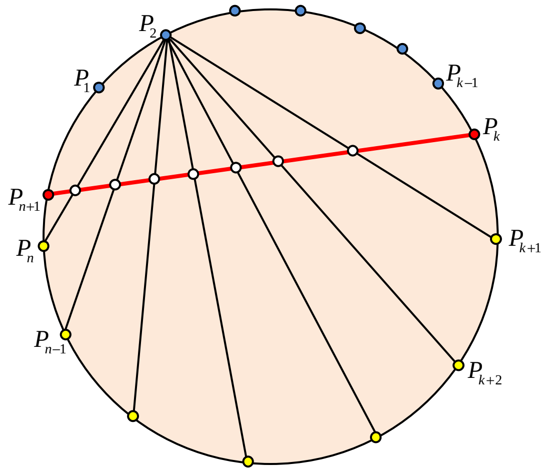
$$D(6)=D(5)+2\times(1+4)+5=31$$

になるのです。そしてこのような考え方から、 $D(n)$ についても求めることが、本来あるべき一般化といえるでしょう。やってみましょう。

$P_1\sim P_n$ の n 個の点に対して、 $\overset{\frown}{P_nP_1}$ の間に点 P_{n+1} をとり、弦 $P_{n+1}P_k$ を考えます。このとき、 $\overset{\frown}{P_1P_k}$ の $P_1\sim P_{k-1}$ を含む側の $k-1$ 個の点と、$P_{k+1}\sim P_n$ を含む側の $n-k$ 個の点を結んでできる $(k-1)(n-k)$ 個の弦により、弦 $P_{n+1}P_k$ は、

$$(k-1)(n-k)+1 \text{ 個の線分}$$

に分割され、その分割線分だけ新たに領域が作られます。これより、



$$D(n+1)=D(n)+\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)(n-k)+1\}=D(n)+\frac{1}{6}n(n^2-3n+8)$$

これから $D(n)$ を求めると、

$$D(n)=\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$$

数31の憤りが理解できるようなすごい式が現れるのです。

※　一般項については、

$$D(n)={}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+{}_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4$$

としても表されます。この式から $n\geqq 6$ では推測が崩れることが分かります。

$\dfrac{63}{42}$

分子と分母の数の一の位、十の位を入れ替えた分数ともとの分数の値を比較してみましょう。

$$\frac{63}{42}=\frac{21\times 3}{21\times 2}=\frac{3}{2} \qquad \frac{36}{24}=\frac{12\times 3}{12\times 2}=\frac{3}{2}$$

これから、$\dfrac{63}{42}=\dfrac{36}{24}$

分子・分母の各位の桁数を交換しても同じ分数の値になってしまいます。
どのようなときにこんなことが起こるのか調べてみましょう。

分数$\dfrac{c\circ d}{a\circ b}$に対して、分母・分子をそれぞれ、$a\circ b=10a+b$、$c\circ d=10c+d$ $(1\leqq a,b,c,d\leqq 9)$ と定義します

$\dfrac{c\circ d}{a\circ b}=\dfrac{d\circ c}{b\circ a}$より、$\dfrac{10c+d}{10a+b}=\dfrac{10d+c}{10b+a}$

$$\therefore \quad (10c+d)(10b+a)=(10a+b)(10d+c)$$

これを展開して整理をすると、 $ad=bc$

ずいぶんすっきりした関係式が得られました。これから、

$$a:b=c:d$$

すなわち、分子と分母の一の位の数と十の位の数の比が等しい分数は、一の位と十の位を入れ替えても分数の値は変わらないことが分かります。

$$\frac{69}{23}=\frac{96}{32} \qquad \frac{43}{86}=\frac{34}{68} \qquad \frac{31}{93}=\frac{13}{39}$$

他の仲間をみつけることができますね。では3桁の数ではどうでしょう。

(百位の数)⇒(十位の数)⇒(一位の数)⇒(百位の数)

このように入れ替えるとします。すなわち、

$$\frac{b_1\circ b_2\circ b_3}{a_1\circ a_2\circ a_3}=\frac{b_3\circ b_1\circ b_2}{a_3\circ a_1\circ a_2} \qquad (1\leqq a_i,b_i\leqq 9 \quad i=1,2,3)$$

となればいいわけです。これから、

$$\frac{10^2 b_1+10b_2+b_3}{10^2 a_1+10a_2+a_3}=\frac{10^2 b_3+10b_1+b_2}{10^2 a_3+10a_1+a_2}$$

これを整理すると、

$10a_3a_1+a_3b_2=10a_1b_3+a_2b_3$ より、 $(10b_1+b_2)a_3=(10a_1+a_2)b_3$

すなわち $(10a_1+a_2):a_3=(10b_1+b_2):b_3$

これは、分子、分母において、百位と十位の数から作られる2桁の数と一位の数の比が等しいことを表します。

例えば、$42:6=63:9$ $(=7:1)$ ですから、 $\dfrac{426}{639}=\dfrac{642}{963}$

ところがここで、$96:3=64:2$ $(=32:1)$ から、さらに、$\dfrac{426}{639}=\dfrac{642}{963}=\dfrac{264}{396}$

結局、(百位の数)⇔(一位の数) としても変わらないことになります。

式をよくみると、各位の桁数の比が等しく、比により各位の桁数が繰り上がらない場合は、どのように入れ替えても分数の値は等しくなるのです。

例えば、 $1:2:3:4=2:4:6:8$ であることより、

$$\frac{2468}{1234}=\frac{2486}{1243}=\frac{2648}{1324}=\frac{2684}{1342}=\frac{2846}{1423}=\frac{2864}{1432}=\cdots=\frac{8642}{4321}$$

分かってしまえばなんのことはないですね。
ということは、5桁以上になると各位の数がみな異なる場合は必ず位は繰り上がり、もう成立しないことになります。

$$1:2:3:4:5=2:4:6:8:10$$

このとき (分母)=12345 とすると、(分子)$=2468+10=24690$ になります。これから、

$\dfrac{24690}{12345}=\dfrac{69024}{34512}$ となりますが、$\dfrac{24690}{12345}=\dfrac{27048}{13524}=\dfrac{108642}{54321}$

繰り上がった数字が桁数を入れ替えるときに茶々を入れ、潜り込んでくるのです。

34

…………方陣に散りばめられた魔法数

　魔方陣を知っているでしょうか。正方形を n 行 n 列に仕切った升目に縦横斜めのそれぞれの和がみな等しくなるように数を書いたものです。右図は3行3列(以下 3×3 と表します)の魔方陣で、縦横斜めの和は 15 になっています。今流に言えば、マンションに数が仲良く秩序を保ち居住しているようなものですが、昔は、和が一致するように並べられることが神秘的であると考えられ、占いなどの呪術にも利用され、「魔の数」として欧州、中国そして日本と古今東西、この魔法数の秩序は世界を駆け巡ったのです。 その中でも特に異彩を放つのが 4 行 4 列の魔方陣です。この場合の行や列の総和は

8	1	6
3	5	7
4	9	2

$$\frac{1+2+3+\cdots+15+16}{4}=34$$

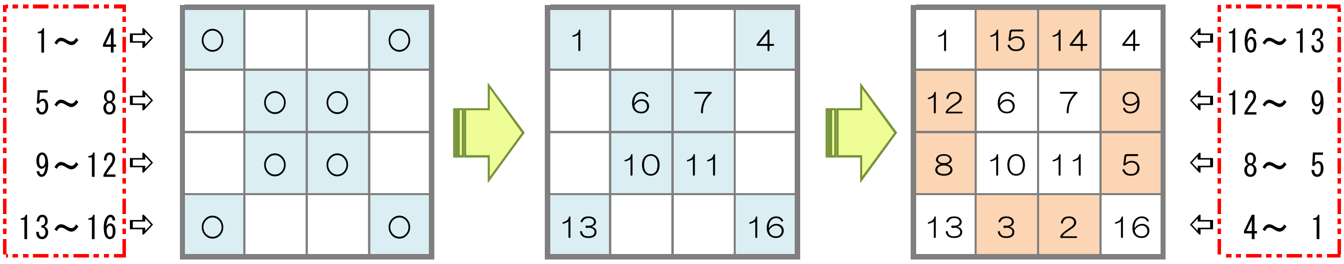
となります。この魔方陣の簡単な作成方法としては 14 世紀にモスコプロスが発見した次のものが知られています。

　①対角線上のマス目をチェックする。

　②上の行から順番に左から 1～16 の数字を当てていき、チェックのあるマス目にその数字を書き込む。

　③下の行から順番に右から 1～16 の数字を当てていき、空欄のマス目にその数字を書き込む。

以上の作業で、4×4 方陣が完成します。



　ただ、この 4×4 方陣は 1 つの作成方法に過ぎず、作成可能な方陣の総数はなんと 880 通りもあるのです。

　こうして作られた 4×4 方陣には、ある行や列を入れ替えてもまた魔方陣になるという不思議な性質があります。例えば、上図の方陣で 2 行と 3 行を入れ替えても $6+11=7+10$ であることから、別の魔方陣が作られます。2 列と 3 列、1 行と 2 行、いろいろ入れ替えてください。すべて魔方陣になっていることが分かるとはずです。

　そしてこれらの魔方陣の中にはさらに完全方陣と呼ばれる特別なものが 48 通り存在しています(右下図)。

　完全方陣は、縦横斜めだけでなく、次のマス目の総和も 34 になります。

　　①方陣を表す正方形の各辺に同じ方陣を並べたときの対角線上の 4 つのマス目の和
　　　　(右図のような斜め方向の和になります)

　　②隣接する 4 つのマス目(2×2)の和

　さらに、②は 2×2 と同様に、

　　③3×3 の正方形の四隅の和

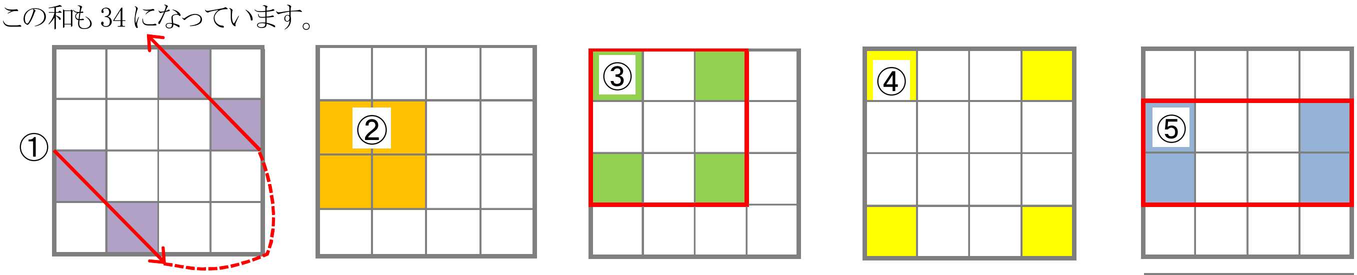
　　④4×4 の正方形の四隅の和

　とみてもまた、和は 34 になります。では長方形の場合はどうでしょうか。

　　⑤2×4 または 4×2 の長方形の四隅の和

　この和も 34 になっています。

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7



　完全方陣の中にはこれだけ和 34 が潜んでいます。和が 34 になる場合の数を調べてみましょう。

　縦と横はそれぞれ 4 通りで計 8 通り。

　斜めは①含めて、右上方向、左下方向それぞれ 4 通りで計 8 通り。

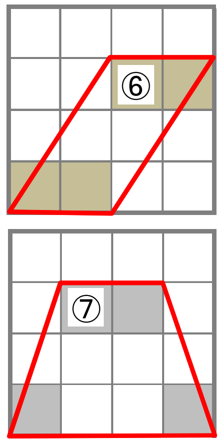
　正方形の四隅は(②③④)は、2×2 は 9 通り、3×3 は 4 通り、1×1 は 1 通りで計 14 通り。

　そして長方形の四隅(⑤)は 6 通り。

　以上合わせると36通りです。また、右図の⑦⑧のように平行四辺形、台形の四隅も和が 34 になります。それぞれ 8 通りありますから、これも含めるとその総数は 52 通りになります。ちなみに 1～16 から 4 つの数を選んだ場合、その和が 34 になる組み合わせは全部で 86 通りあります。

　ということは、和 34 がきれいに配置されていないものの数は全部で $86-52=34$ 通り。

　あれっ、この 34 って……。



184

ただの合成数であり、それといって特徴のあるものではありません。ただ、物理学では原子核が安定する中性子の個数のひとつで魔法数と呼ばれているようです(これ以外の魔法数は、2,8,20,28,50,82,126)。

今回の 184 はそれとは関係ありません。この数は電話の非通知発信ナンバーであり、「通知するのはイヤヨ」。この数字はオヤジギャグレベルのダジャレの語呂合わせから決まったという嘘のような本当の話です。

でもひょっとしたらこのダジャレ、魔法数と同じぐらい価値はあるかもしれません。

さて、この非通知番号 184 を逆手にとった面白い計算があります。184 を 6 回続けるとどうなるでしょうか。

$$184+184+184+184+184+184=184\times 6=1104$$

計算結果の 1184 は「イイわよ」と読みます。「嫌よ」と断り続けられても何回もアプローチすると「イイわよ」になるのです。でもこれはあくまでジョークで、実際にやったらストーカーまがいの行為。そういう人には、次の数で応えます。

18782、これは「嫌な奴」と読みますが、もう一回同じ数を足してみましょう。

$$18782+18782=37564$$

どんな結果になるか分かりますか。「皆殺し」になります。

このように数を語呂合わせで表現できる言語は日本語ぐらいではないでしょうか。日本語と数字は相性抜群なのです。昔から日本人は計算力に優れていると言われてきましたが、誰もが掛け算の「九九」を唱えることができたからでしょう(過去のことかもしれませんが)。欧州では、電卓のない昔は九九の代わりにネイピアが考案した「計算棒」という 0～9 を表す棒を用い掛け算を求めています(インドでも「正方形の法」という表が用いられました)。それを日本人はソラで覚えた九九で計算していたわけで、計算力に差がでてくるのは当然かもしれません。

九九もまた語呂合わせであり、日本語に馴染むように意味をもたせることで、数字という無意単語が有意単語になってしまうのです。例えば円周率π は、

産医師(314)、異国に向かう(159265)、産後厄なく(358979)、産婦みやしろに(3238462)、虫散々闇になく(643383279)

歌にして語呂合わせで暗記するのに対し、英語では、

Yes , I know a number　(3.1416)

単語の文字数に対応させます。英語は単語そのものが数を意味するわけではないので日本語の語呂合わせに比べると暗記はできても利用はし難いのです。もっとも、上の円周率の語呂合わせも昔考えられた有名な歌ですが、当世に合うわけではありません。「みやしろ」は「御社」でしょうが歌全体が「いにしえ」のものであり、やはり「今流」の語呂合わせを考案する必要はあるでしょう。現代は IT の発達により覚えることが不要になったからか、残念ながら新作は耳にしたことはありません。平方根、常用対数、ネイピア数、数々の有名数を日本人は歌にしてきましたが、みな過去のものなのです。

さて、数字の語呂合わせは速算マジックにも用いられています。

例えば「239×4649」を計算するとどうなるでしょうか。

$$239\times 4649=1111111$$

となります。これを知っていれば周りに一目置かれると思いませんか。さてこの掛け算は「兄さん、急だ、よろしく」と覚えます。

これは 1 が 6 個連なる結果になる計算ですが、では 1 が 7 個の場合は、

$$7373\times 1507=1111111$$

これは、「なみなみと、いこうな」と覚えます。

また、数学以外でも、歴史の年号の暗記など語呂合わせが活躍することは周知のことでしょう。なお、最初に紹介した、安定中性子の一つである魔法数 184 についても残りの魔法数も含めて、次の語呂合わせがあるようです。

ふたば風呂にはいずれの部屋にもいい風呂癒し

2　8　20　28　50　82　126　184

「ふたば」は双葉温泉のことでしょうか。それとも作った本人にとって有意単語の何かでしょうか。語呂合わせは自分にとって、もっとも価値があり印象のあるものを考えればよく、例えば「2 ,8」は「二人は」としてもいいわけです。こういう体験・経験を反映させることができるのも日本語だからこそといえます。

このように、語呂合わせは日本文化の「知識」領域を支えてきたものといえるのです。そしてその真骨頂は和歌にみることができます。次は和歌を数字で示したものです。

7080　8783910100　80029　700　3700　10 32　7910　9849

なんのことかわかりませんね。実は日本人は算用数字をそのまま語呂合わせしているわけではないのです。数字を多義の意味をもつ漢数字に変えて、日本語に変換しているのです。数を活きたものとして捉えていることは凄いと思いませんか。

七十八十　八七八三九十百　八万二九七百　　三七一十三二　七九十九八四九

こう読みます。

七重八重　花は咲くとも山吹の　　みのひとつだに　なきぞくやしき

室町時代の武将であり歌人でもあった太田道灌の歌です。「七百」は「の」と読ませています。

ワンパターンの語呂合わせオヤジギャグを連発し、場を白けさせるお父さん。でも、日本語の語呂合わせ文化を継承している貴重な存在と思えば、虚無的で背筋が寒くなる感情も少しは和らぐのではないでしょうか。

$\frac{1}{97}$

………循環節を偽る数

100 以下の素数は 25 個ありますが、最後の素数 97 の逆数が今回の数です。素数 p の逆数 $\frac{1}{p}$ は循環小数で表すとき、循環節の長さは最大で $p-1$ ですが、$\frac{1}{97}$ も最大の長さ 96 の循環節をもっています。あなたはこれを 5 分で計算できますか?。
ちなみにエジンバラ大学のアレキサンダー・エイキトン教授は、頭の中だけで計算できたといわれています。

$$\frac{1}{97}=\frac{1}{100-3}=\frac{1}{100\left(1-\frac{3}{100}\right)}=\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{100}\right)^{n-1}$$

このようにみると公比 3 の等比数列を 2 桁ずつずらしていけば循環節は分かりますが、そのすべてを計算することはとてもできそうにありません。でもあることを理解すれば 5 分もあれば十分なのです。
さて計算との戦いの前に相手のこと、すなわちその循環節の性質を知っておくことが大事です。

まず小手調べとして数学者ガウスが愛した $\frac{1}{17}$ を展開してみましょう。

$$\frac{1}{17}=\frac{1}{100}\times\frac{100}{17}=\frac{1}{10^2}\left(5+\frac{15}{17}\right)=\frac{5}{10^2}+\frac{1}{10^3}\times\frac{150}{17}=\frac{5}{10^2}+\frac{1}{10^3}\left(8+\frac{14}{17}\right)=\cdots$$

$$=\frac{5}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{8}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\frac{3}{10^6}+\frac{5}{10^7}+\frac{1}{10^7}\times\frac{5}{17}$$

```
     0.0588235
17)100
    85
    150
    136
     140
     136
       40
       34
        60
        51
         90
         85
          5
```

分数の分子の値が小数展開したときの数になります。すなわち 0.0588235 と続き、一番右側にある分数 $p=\frac{1}{10^7}\times\frac{5}{17}$ の分子は余りを表し、これ以降も同様の方法で展開することができます。ところが、

$p=\frac{1}{10^6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{17}$ と変形すると、また $\frac{1}{17}$ が現れてきます。だから 0.0588235 以降は 588235 の各桁の数を半分にした値が続いていき、以後もこれが繰り返されるだけなのです。長さ 6 の 588235 を左から順番に半分の値にしていくことは暗算でもできます。割り切れないときは次の桁に 10 を加えていけばいいのです。右図がその計算です。

	0	5	8	8	2	3	5
1/2倍 ⇒		2	9	4	1	1	7
1/2倍 ⇒		6	4	7	0	5	8
1/2倍 ⇒		8	2	3	5	2	9

さて、$\frac{1}{17}$ の循環節の長さは 16 ですが、この長さ 6 の並びが本当の循環節と考えてもよく、これを純循環節と呼ぶことにしましょう。ただこのような計算ができるのは、割って余りを求めていくときに「余り 5」がでた場合だけです。100 以下の素数で余り 5 がでる場合を調べてみると、右図の 12 通りあります。この中で素数 19 の逆数の場合は特別で、同じような計算はできません。素数 59 の逆数では純循環節の長さは 33 にもなってしまいます。71 の逆数の純循環節の長さはとても短く 6 です。ガウスは 71 の逆数についてはこの方法で求めていたといわれています。
それではいよいよ 97 の逆数の小数展開を 5 分で計算してみましょう。まず純循環節を計算しますが、3 の倍数を 2 桁ずらしていくか、直接割っても桁数 10 の計算は、1 分もあれば OK でしょう。あとは、それを残り 4 分で、下の表のように順番に半分ずつしていけばいいのです。

No.	素数	循環節の長さ	長さ	純循環節
1	7	6	5	1 4 2 8 5
2	17	16	6	5 8 8 2 3 5
3	19	18	2	5
4	23	22	14	4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5
5	29	28	16	3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5
6	31	15	9	3 2 2 5 8 0 6 4 5
7	47	46	16	2 1 2 7 6 5 9 5 7 4 4 6 8 0 8 5
8	59	58	33	1 6 9 4 9 1 5 2 5 4 2 3 7 2 8 8 1 3 5 5 9 3 2 2 0 3 3 8 9 8 3 0 5
9	61	60	13	1 6 3 9 3 4 4 2 6 2 2 9 5
10	71	35	6	1 4 0 8 4 5
11	89	44	8	1 1 2 3 5 9 5 5
12	97	96	10	1 0 3 0 9 2 7 8 3 5

	0	1	0	3	0	9	2	7	8	3	5
1/2倍 ⇒		0	5	1	5	4	6	3	9	1	7
1/2倍 ⇒		5	2	5	7	7	3	1	9	5	8
1/2倍 ⇒		7	6	2	8	8	6	5	9	7	9
1/2倍 ⇒		3	8	1	4	4	3	2	9	8	9
1/2倍 ⇒		6	9	0	7	2	1	6	4	9	4
1/2倍 ⇒		8	4	5	3	6	0	8	2	4	7
1/2倍 ⇒		4	2	2	6	8	0	4	1	2	3
1/2倍 ⇒		7	1	1	3	4	0	2	0	6	1
1/2倍 ⇒		8	5	5	6	7	0	1	0	3	0

ではもう一題。素数109の逆数の循環節の長さは108で、純循環節の長さは15です。この数を7分で小数展開してください。

195

【問い】　数列　3, 9, 27, 81, ⋯　の 5 番目はどんな数が適当でしょうか。

たぶんあなたは195と答えるでしょうが、ではその数はどうやって得られるのでしょう。

似た問題は数31で話題にしています。数列{1, 2, 4, 8, 16, 31, ⋯}では、6 項目が予想と違いますが、2 倍ずつ増えていくだろうという「安易な推測」に数31は警鐘を鳴らしていた訳です。数列は一定の規則性を保ち並んだ数の列であるわけですから、では、問いの数列の規則性は何なのでしょう。

規則性を調べる有用な手段として、下左図のように隣り合う 2 項の差をとって、新たに数列(階差数列)を作る方法があります。数列{1, 2, 4, 8, 16, 31,⋯} では、実際、第 4 階差まで進むと、同じ数字の列になり、さらに第 5 階差までとると、すべて数が 0 になってしまいます。もとの数列の第 6 項目が 32 であった場合、数列は公比が 2 の等比数列であり、その階差数列はまた同じ等比数列になり、何度階差をとっても変わりません。それが第 6 項が 31 の場合は、階差をとる度にひとつ手前の項に影響を与え、各項が等しい値になるように順次変化をしていきます(下図の中央)。同様に、第 1 項の一つ手前の第 0 項目も求めることができ、その値は 1 になります(下右図)。この数列は、円周上に n 個の点をとるとき、弦により分割される円の内部の領域の個数を求めるものでしたから、$n=0$ のときは、当然円の内部だけの 1 個になり、確かに満たしていることが分かります。

1　2　4　8　16　31
1　2　4　8　15
1　2　4　7
1　2　3
1　1

第 7 項を求めると

1　2　4　8　16　31 → 57
1　2　4　8　15 → 26
1　2　4　7 → 11
1　2　3 → 4
1　1 → 1

第 0 項を求めると

1 ← 1　2　4　8　16　31
0 ← 1　2　4　8　15
1 ← 1　2　4　7
0 ← 1　2　3
1 ← 1　1

このように、階差数列を用いることで、数列の規則性をみつけることができるのです。

では階差によって求められる数列の一般項はどうなるでしょうか。

数列を $\{a_n\}$ とし、第 1 階差の数列を $\{b_n\}$ 、第 2 階差の数列を $\{c_n\}$ とし、第 3 階差で一定の値 d_1 になるとします。

このとき、$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$　　$(n \geqq 2)$

さらに b_n 、c_n についても同様にその階差を考えることで次のようになります。

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_1 + \sum_{m=1}^{k-1} c_m\right) \\
&= a_1 + b_1(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{k-1}\{c_1 + (m-1)d_1\} \\
&= a_1 + b_1(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} c_1(k-1) + \frac{d_1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)(n-2) \\
&= a_1 + b_1(n-1) + \frac{c_1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{d_1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)
\end{aligned}
$$

$D_0 \Rightarrow$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$D_1 \Rightarrow$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
$D_2 \Rightarrow$	c_1	c_2	c_3	c_4		
$D_3 \Rightarrow$	d_1	d_2	d_3			

ここで数列 $\{a_n\}$ および階差(*differences*)の最初の項をそれぞれ　$D_0 = a_1,\ D_1 = b_1,\ D_2 = c_1,\ D_3 = d_1$　とおきます。

また、　${}_{n-1}C_0 = 1,\ {}_{n-1}C_1 = n-1,\ {}_{n-1}C_2 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),\ {}_{n-1}C_3 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$　であることに注意すると、

$$a_n = D_0 \cdot {}_{n-1}C_0 + D_1 \cdot {}_{n-1}C_1 + D_2 \cdot {}_{n-1}C_2 + D_3 \cdot {}_{n-1}C_3$$

なお、上述の計算方法をみると、さらに階差を必要とする場合も同じように求められます。第 m 階差が定数となるとき、

$a_n = \sum_{k=0}^{m} D_k \cdot {}_{n-1}C_k$　　が成立するのです。

それでは、問いの数列の 5 番目およびその一般項を求めてみましょう。

第 5 項は右図のように階差から逐次的に計算できます。一般項 a_n は、

3　9　27　81 → 195
6　18　54 → 114
12　36 → 60
24 → 24

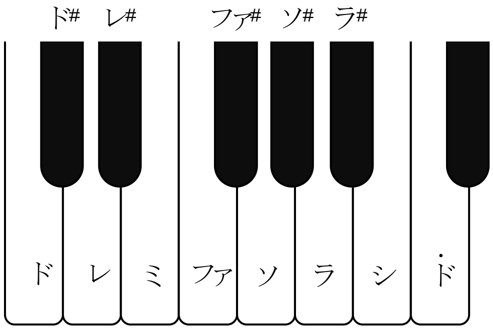
$$a_n = 3 + 6(n-1) + \frac{12}{2}(n-1)(n-2) + \frac{24}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = 4n^3 - 18n^2 + 32n - 15$$

さて、ではもう一度、聞きますが、5 番目にくる数は何でしょうか。……正解は243です。

この数列の規則性を考えるのなら3倍ずつ増えていくとみるべきです。数31の場合は「平面の分割数」というルールがありましたが、問いの数列は、数の並びだけで推測するものです。その一般項は 3^n とするのが妥当と思いませんか。今回の数のサブタイトルを見た人は間違えなかったかも知れません。数 195 はルール(規則)は曲げないけど、「別の解釈だってあるぞ」といつもブツブツと自己主張している一言居士であったわけです。

$\frac{2}{3}$ (比)

………人間の音感に翻弄された数



今回の数は、右の鍵盤をみれば分かりますね。音楽に係わる数$\frac{2}{3}$です。

毎日のように空間を振動音で埋め尽くし氾濫するミュージック。その元になる音階を考案したのはピタゴラスと言われています。彼は一弦琴(モノコード)を爪弾いたところ、弦の長さ(基音)の$\frac{1}{2}$のところで押さえると同じような音(1 オクターブ高い音)が出、弦の$\frac{2}{3}$で押さえ、長い方の弦では基音と一緒に弾くと美しく響くことを発見しました。

この基音をド、$\frac{2}{3}$で響く音をソとし、ソをドに対して完全五度といいます。

このとき、$\frac{2}{3}$で押さえた短い方の弦の音は、$\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ですから、1 オクターブ高い方のソになります。ピタゴラスはこの$\frac{2}{3}$倍の長さを繰り返すことで残りの音も創りだしたのです。例えば、ソの音を$\frac{2}{3}$倍すると 1 オクターブ上のレになるので、1 オクターブ下げて調整するために 2 倍します。これからレの音は$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 2=\frac{8}{9}$の位置で押さえればいいわけです。同様に、$\frac{2}{3}$倍を続けていくことで、次々に音を表す弦の長さが決まるのです(白い鍵盤を 5 つずつ数え、1 オクターブを超えた場合は下げる)。

ド ⇒ ソ ⇒ レ(下げて) ⇒ ラ ⇒ ミ(下げて) ⇒ シ ⇒ ファ(下げて)

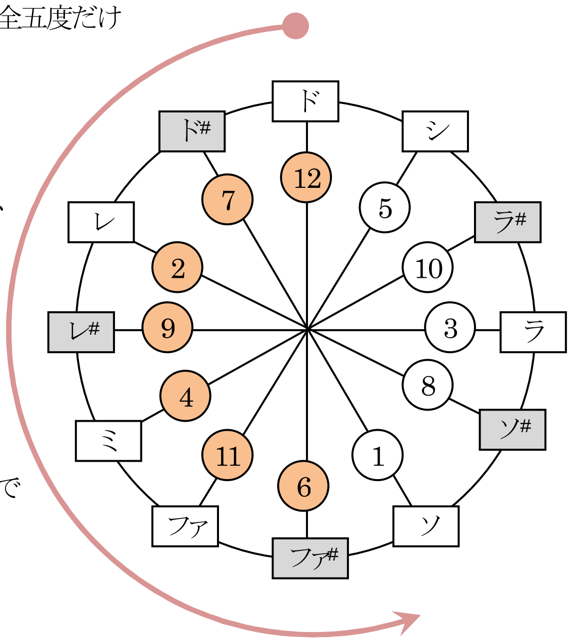
これらの隣り合う 2 音は純正五度だから美しく響くはずですね。ところがシとファを同時に弾くと耳障りな音になります。何故でしょう。その秘密は黒鍵にあります。完全五度を白鍵だけでなく黒鍵も数えてみると、白鍵 5、黒鍵 3 になり、シとファは白鍵 5 に対して黒鍵 2 でひとつ足りないのです。そこでファは 1 オクターブ高いドを完全五度だけ下げて作ることにします。すなわち$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$で弦を押さえればいいわけです。

このとき、ファの音をドの音に対して完全四度といいます(白鍵 4、黒鍵 2)。

ところで先ほどのシとファの関係は黒鍵を 1 つ加えてファ#にすると完全五度になりますね。であれば、1 オクターブを白鍵 7、黒鍵 5 の 12 音(半音)に分割し、8 音ずつ増やしていけば完全五度の音の推移が分かります。

右図は円周上に半音階順に 12 音を並べたものです。

ドから反時計回りに頂点を 8 つずつ移動させ、ドまたはドを超えた場合は 1 オクターブ下げます。その順番が図の数字で示されたもので、色が付いている番号は 1 オクターブ下げた音になり、円の左半分の 7 箇所が塗られます。



これから各音の押さえる弦の位置は$\frac{2}{3}$倍し、1 オクターブ高い場合は 2 倍して下げればいいことになります。こうしてピタゴラス音律が完成します。ところがここでおかしなことが起きます。12 回の移動でまたドに戻るわけですが、これは次の等式が成立することを意味します。 $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times 2^7=1$

変形すると、$2^{19}=3^{12}$、左辺は偶数、右辺は奇数より矛盾しています。$\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times 2^7=\frac{524288}{531441}<1$から、元のドよりちょっと高い音になり、同じドに戻ることはないのです。この微妙な音のズレ(差)をピタゴラスコンマといいます。そのため、この微妙なズレの修正、さらには和音の美しい響きを追求して、新たな音律である純正律が考案されます。しかし、純正律は転調ができない弱点があったため、今度はそれを補うためにロマン派の時代、平均律が考案されるのです。その結果、人間は純正律の美しい響きを犠牲にすることになり、人間の音感は、不協和音もハーモーニーとして受け入れてしまうのです。

赤ちゃんが生まれたときの泣き声の音の高さはラの音(440Hz)であり、人類すべてに共通しています。音の一滴である$\frac{2}{3}$を贈ったミューズ神の天の配剤の 1 つなのでしょう。ところが最近その泣き声の高さに微妙な変化が起きていることが指摘されています。音楽産業が音を配信し、売り物にするようになってから、$\frac{2}{3}$という割り切れない分数だからこそ表現できた美しい音の響きで編まれた音楽はいつの間にか砂上の楼閣になっていたのです。

196

……… リフレインを拒む数

「たけやぶやけた」、「しんぶんし」のように、逆さに読んでも(意味がある)同じ文章を回文といい、小さい頃は誰もがその奇妙な面白さに夢中になったものです。和歌では「のきさらむ虫の音のしむ紫野」といった秀作が詠まれています。そしてネット上では3163字の長い回文も紹介されており(平成23年8月4日現在)、今もたくさんの回文マニアがいるようです。

ところで、その長い回文の文字数3163に、1の位から逆に読んだ数字3613を加えてみましょう。

$3163+3613=6776$

6776 は、右から読んでも左から読んでも同じ数になります。このような数字を回文数といいます(不思議数との出会いの覚書の第1集の数1001で紹介しました。シェヘラザード数ともいいます)。日本語と違い、数字の並びは意味の有無を問わないわけですから回文数は幾らでも作れます。数字の並びを左右入れ替えたときにどのような条件のときに回文数になるのかその操作に意味があるのです。さて、先ほどの3163は1回の操作で回文数になりましたが、これは珍しいケースではありません。

例えば2桁の数は、$10a+b\,(1\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9)$と表されますから、並びを入れ替えると$10b+a$。

その和は、$10(a+b)+(a+b)$となり、$a+b$が 1 桁であれば必ず回文数になります。そして、この桁が繰り上がるかどうかで場合分けをし、$a<b$について調べていけば2桁の数はすべて回文数になることが示されます。ただ、もちろん一回の操作だけでなるとは限りません。最初から回文数になっているのは 11,22,33 のように 9 個あります。2回以上の個数は偶数ですが、これは、27 に対して 72 というように必ずペアの数があるからです。6回は79と97の1組だけ。　$79\Rightarrow 176\Rightarrow 847\Rightarrow 1595\Rightarrow 7546\Rightarrow 14003\Rightarrow 44044$

このように変化し、回文数に落ち着きます(以後、収束といいます)。

なお、2桁では右表をみると収束までの回数が異常に長いものが1組あります。89と98は、なんと24回の操作の末に、8813200023188　に収束するのです。

回数	個数	数
0	9	11, 22, …
1	49	12, 13, …
2	20	19, 28, …
3	4	59, 68, …
4	4	69, 78, …
6	2	79, 97
24	2	89, 98

では3桁の数はこの操作で回文数になるでしょうか。各位が同じ数字は回文数です。2桁の数の操作で和が3桁になるものは当然回文数になります。3 桁の数を$100a+10b+c$とすると、桁数を入れ替えた和は$100(a+c)+20b+(a+c)$ですから、$a+c, 2b$が 1 桁の場合は回文数より、あとは、$a<b$である数について調べればいいわけですがさすがに厳しいですね。大半は 23 回以下の回数で回文数に収束します。しかし次の15個の数字、

196,691,　295,592,　394,493,　259,592,　689,986,　788,887,　879,978,　790

これらについては100万回の操作でも回文数になりません(回文数に収束しないということは証明できてはいませんが)。

特に一番小さな数 196 は、その代表として取り上げられ、これを「196 問題」といい、1900 年代後半から研究されているようです。だから今回の話題の数は、回文数に収束する数ではなく、それが分かっていない、この個性的な数 196 を取り上げています(個人的には唯一ペアの存在しない790も面白いと思いますが)。

さて、それでは和ではなく、桁を入れ替えたものの差の絶対値は回文数になるでしょうか。

2桁の数は、すべて9に収束します。2桁の数を入れ替えたものの差は必ず9の倍数であり、2桁で9の倍数である回文数は99だけであることから明らかです。ではその収束の回数ですが、最大5回で面白いことにどの回数の個数もほぼ同じになります。例えば5回で収束する数13については、

$13\Rightarrow 18\Rightarrow 63\Rightarrow 27\Rightarrow 45\Rightarrow 9$　となります。

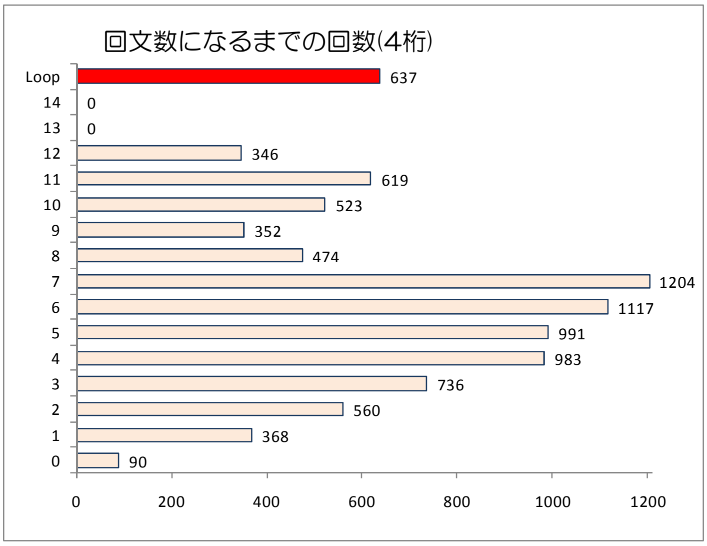
回数	個数	数
0	9	11, 22, …
1	17	12, 23, …
2	16	16, 27, …
3	16	14, 19, …
4	16	15, 18, …
5	16	13, 25, …

3桁の数では、桁数を入れ替えた数の差は、9の倍数かつ11の倍数になります。したがって収束する回文数は99であることが予想され、実際すべての数が5回以内で収束します。その個数ですが、2桁の回数の個数を10倍した回数になっています。なお和では収束しなかった196は、$196\Rightarrow 495\Rightarrow 99$ 2回で簡単に収束してしまいます。

4 桁の数はどうでしょう。収束する回文数は 9 の倍数で、99 または 999 になります。回数毎の度数分布は右グラフであり、今度はバラつきがみられます。7回の収束がもっとも多くなり、収束の最大回数は12回です。また、4桁では収束しないものも存在します。同じ数の繰り返し(ループ)に陥るケースが 637 個あり、その一番小さい数1012についてみると、

$1012\Rightarrow 1089\Rightarrow 8712\Rightarrow 6534\Rightarrow 2178\Rightarrow 6534$

以降は2178と6534が繰り返され、637個のすべてが同じループになるのです。5桁になってもこの2数の繰り返しは発生し、さらに、21978と65934のループも発生します。



では、桁数を入れ替え掛けたときは回文数に収束するでしょうか。12,122,1112,1202 といったものが該当します。例えば、

$1202\Rightarrow 2429242$

となります。各桁の数は0,1,2に限定されるようです。

このように、回文数に収束する過程には、和の196だけでなく、差、積についてもいろいろな性質を持つ数が潜んでいそうです。彼らの今後の佇まいに注目したいところですね。

(問) 適当な自然数を５つ選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、
その中には５の倍数が必ず存在します。何故でしょうか。

例えば、

314　1592　653　58　979　(円周率の並び)

を選んでみましょう。この中の幾つかの和で、５の倍数になるものが存在するということです。５の倍数は１の位の和が０または５になればいいから、そうなるような数の組合せは簡単に探せます。

左から３番目以降の和　653　58　979　　左から２番目と３番目の和　1592　653

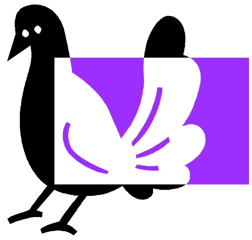
これらは５の倍数です。不思議だけど、当たり前のよう気もします。ですが条件を

適当な自然数を７個選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、
その中には７の倍数が必ず存在する。

７の倍数の判定が先ほどより優しくないことより、もう当たり前ではなく、不思議度は格段にアップしましたね。

実は、n 個に対して、n の倍数の存在が証明できるのですが、それは５の倍数の証明と何も変わりません。

その証明のコアとなるのが「鳩の巣原理」(部屋割り論法)と言われるものです。



鳩の巣原理とは、鳩の数と鳩が入る巣箱の数の関係を表す性質です。

「$n+1$ 羽の鳩が、n 個の巣箱に入るとき、どれかの巣箱には必ず２羽以上の鳩が入る」

当たり前ですね。でもこの当たり前のことから当たり前でないことが導かれるのです。

さて、(問)の証明の前に補題となる次の問題を鳩の巣原理で示してみましょう。

適当な自然数を６つ選ぶと、その中には２数の差が５の倍数になるものが存在する。

選んだ６つの自然数を５で割ると、その余りは、0,1,2,3,4 の５つの数のいずれかになります。自然数は６つあるわけですから、鳩の巣原理より、余りが等しい自然数は２つ以上存在することが分かります。その余りを r とすると、２つの自然数 a,b は、

$a=5m+r$、$b=5n+r$　$(0\leqq r\leqq 4)$

と表すことができます。これから、$a-b=5(m-n)$。よって２数の差は５の倍数になります。

この問題をみると当たり前の事実がちょっと揺らいできますね。では、これを用いて(問)の解答をしましょう。

選んだ５つの数をそれぞれ、a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 とし、この５つの数を用いて新たに次のような６つの数を作ります。

$$b_0=0,\ b_1=a_1,\ b_2=a_1+a_2,\ b_3=a_1+a_2+a_3,\ b_4=a_1+a_2+a_3+a_4,\ b_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

明らかに $b_i\,(0\leqq i\leqq 5)$ は、右の数ほど大きくなっています。ここでこれら６つの数から２数 $b_i,b_j\ (i<j)$ を選び、b_j-b_i を計算すると鳩の巣原理よりその値は５の倍数であるものが存在します。ところが、b_j-b_i は $a_k\,(1\leqq k\leqq 5)$ の幾つかの数の和の形になっています。すなわち、これから問いの証明ができたことになります。(選んだ数は、元々の数列 a_k の並びの一部であることも分かります)。そしてこの証明のプロセスをみると、

適当な自然数を n 個選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、
その中には n の倍数が必ず存在する。

同様に一般化された性質が導かれることが分かります。ただし、$n=5$ の場合と異なり具体例での検証は難しくなっています。

例えば $n=7$ のときは、(また円周率の並びを抜き出すと)

31,41,59,26,53,58,97　⇒　26+31+41=98　31+41+58+59=189

存在することは分かっていますが実際にどのような組合せか調べることは大変になっています。

だから今回の話題の数 ５ は、鳩の巣原理の具体例として分かり易い数であり、そこから具体例は分からなくとも一般化できるモデルとなる数なのです。さて、鳩の巣原理で得られる数の性質をもう一つ紹介しましょう。

２の倍数でも５の倍数でもない数は、何倍かすると必ず数 111……11111(各桁の数がすべて 1)になる。

２でも５でもない数は簡単に見つけられますがその数が 111……1111 で割り切れることを示すことは大変です。
その保証は鳩の巣原理で示すことができます。

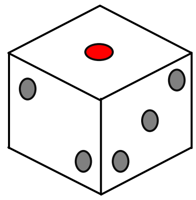
２の倍数でも５の倍数でもない数を n とし、$n+1$ 個の数を $a_m=\sum_{k=0}^{m}10^k$ $(0\leqq m\leqq n)$ とします。すなわち、$a_0=1$、$a_1=11$、$a_2=111$、…ということです。これらの $(n+1)$ 個の数を n で割ると鳩の巣原理より余りが等しい数が２個以上あります。その２個の数の差の絶対値は、111……1100……0000 の形になり、この数は n で割り切れます。ところが n は 10 の倍数ではないから、n は 111……11 の倍数になり、その存在が証明されました。

具体的なことは分からないけどその存在は確認することができる。このことは、人生において「今取り組んでいるいろいろな経験がどのような結果を生むかは分からないけど、その中には最終的には自分にとって最善のものが必ずある」、そんな教訓を数達はいっているようにも思えるのですが。

7 ………人生ゲームのルールを仕切る数

さいころを知らない人はいないと思いますが、ではさいころの目の入れ方(配置)は何通りか分かりますか。
円順列の応用問題としてよく出題されますが、さいころの目は

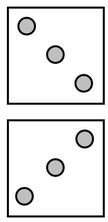
① さいころの相対する面の目の和は 7



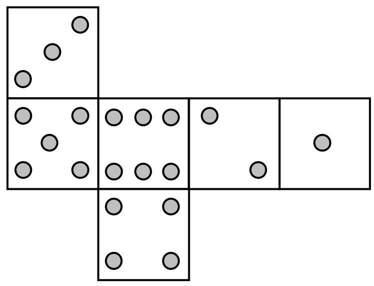
という規則で配置されていることを知らないとできない問題ですね。例えば 1 の向かいは 6 であり鏡像関係にあるわけで、この配置をマーチン・ガードナーは「7 点原理」とよんでいます。これが今回の話題の数です。さて、その配置はまず上面を 1 に固定し、サイコロが上下に回転しないようにします。このとき下面は 7 点原理より 6 ですね。次に側面に 2,3,4,5 の 4 つの数字をいれますが、今度は横回転をしないように常に正面に 2 があるようにします。その対面は 5 になります。このようにさいころを回転しないように固定することであとは正面 2 の目の左側面、右側面に 3,4 を配置することより、場合の数は 2 通りとなります。そうなりましたか?。
残念ながら間違いです。実はさいころには 7 点原理の他にもうひとつ重要な配置原理があるのです。

②さいころの目は左回り(反時計回り)に面付けされている

右上図のように 3 つの面が見えるようにみるとき、目の数字の配置は、カドを回転の中心として、反時計回りに 1⇒2⇒3 になっているのです。これから上面 1、正面 2 のとき右側面は反時計回りの配置により 3 に確定してしまいます。
したがってサイコロの目の入れ方は 1 通りとなります。今度はいいでしょうか。



残念でした。また間違いです。問いは「さいころの目の入れ方となっていますね。さいころの目は 1 を表す●を面上に数字の数だけ並べて表現しますが、他の面の目との関係で右図の 3 の目の様に 2 通りの見え方があります。このような見え方の目は 3 の他に 2,6 も同じです。したがって見え方まで考慮すると $2^3=8$ 通りが答えになります。単純に数字を入れるなら 1 通りでいいのですが、数字を目という模様で表すことでこのようなことが起きるのです。えっ、でも数字だってその書き方は 1 を逆さまにしたり、横にしたりする見え方もでてくるのではないかって。そうですね。でもそれではゲームをするときに数字が分かりにくくなり、だからこそ数字を模様である目で表現しているのです。この 2 つの原理を用いると次のことを調べることができます。



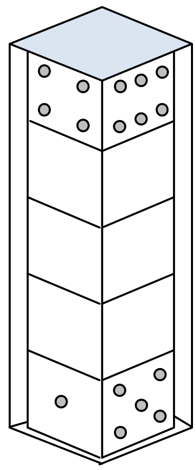
Q1 右の展開図は正しいでしょうか。

最初に 7 点原理を確認しましょう。5,6,2,1 の横一列の並びをみると対面の和が 7 であることは明らかですね。ここで反時計周りの原理を、もう少し詳しく説明しましょう。まず、1⇒2⇒3 の左回りを基本形とします。これを元に他の 3 つの目の位置関係をみることが可能になります。

○3 つの数のいずれか一つを対面の数字に替えたものは逆回りに配置

○3 つの数のうち 2 つの数字を入れ替えたものは逆回りに配置

たとえば、1,2,3 の 2 の目を対面の数 5 の目に替えた 1,5,3 は右回りになります。さらに 1 を対面の数6に替えると6,5,3は左回りに戻ります。1,2,3 に対して、2 つ目を入れ替えると2,1,3 は右回り、2,3,1 は左回りになります。1,2,3 の偶数、奇数の目を対面の目に替えることで奇数列 1,3,5 と偶数列 2,4,6 は左回りになることを覚えておくといいでしょう。
それでは展開図をみてみましょう。7 点原理は確認できているので、面付けの回転を調べます。1 つのカドの回転をみるだけで十分です。3,5,6 をみると左回りになっています。ここで 5 と 6 を対面の 2 と 1 にそれぞれ替えると、3,2,1 も左回りです。さらに 3 と 1 を交換すると 1,2,3 は右回りになり間違いであることが分かります(5 を対面の 2 に変えて 2,4,6 でみるともっと簡単)。



Q2) 箱の中に右図のように 5 つのさいころが詰められています。2 つのさいころが共有する面は 8 つありますが、それらの面の目の合計をなんでしょうか。

一番上のさいころの上面は 2 または 5 です。2,4,6 は左回りより、上面は 2 になり、下面は 5 です。
同様に一番下のさいころの上面は 3 または 4 です。1,3,5 は左回りより、下面は 3、上面は 4 です。
また、残りの 3 つのさいころの上面と下面の和は 7 点原理より 7 ですから、和は、$5+3\times7+4=30$
最後にマジックへの応用をひとつ

あなたが振った 3 個のさいころの目を当ててみましょう。1 つめのさいころの目を 3 倍し、対面の目を加えて 5 倍してください。次に 2 つめのさいころの目を加え 10 倍し、最後に 3 つめの目を加えてください。それでは計算結果を教えてください。674 ですか。さいころの目は 3 と 2 と 4 ですね。

さいころの目を a,b,c とすると、演技者が要求した計算は次のようになります。

$$10\{5(3a+7-a)+b\}+c=100a+10b+c+350$$

したがって、計算結果から 350 を引くと、各位の数が 3 つのさいころの目になります。
さいころは、古代ギリシャ、中国、日本など世界中で昔からゲームや賭け事の道具として用いられ、その目の配置はみな 7 点原理によるものでした。立方体の形状、同様の確からしさから、人は時代や場所を超えみな同じ道具と規則を生み出すのです。「*A toss of the dice*」は 偶然、運といった意味ですが、人は「*The die is cast*」といい、運命をさいころに委ねます。運命のバランスということではさいころは公平ですからこれはどんな結果でも甘んじるということになってしまいます。でも人が本当にさいころに期待するのは、「*Dice with death*」(いのちがけでやる)、最善を尽くした後の幸せなのでしょう。

105

100 個の碁石が入った袋からいくつかの碁石を残して取り出し、山になるように積んでください。山から 7 個ずつ碁石を取り除いていくと、最後に 5 個の碁石が残りました。次にもう一度山になるように積み 5 個ずつ取り除くと 3 個残りました。同様に 3 個ずつ取り除くと 2 個残りました。このことから袋に残っている碁石の個数を当ててください。

取り出した碁石の個数を N 個とすると、問題文は次のように立式できます。

$N=7a+5$ …①　$N=5b+3$ …②　$N=3c+2$ …③

これを解いてみましょう。

③×5－②×3 より、

$$5N-3N=5(3c+2)-3(5b+3)$$

$$\therefore\ 2N=15(c-b)+1 \quad \cdots④$$

①×15－④×7 より、

$$15N-14N=15(7a+5)-7\{15(c-b)+1\}$$

$$\therefore\ N=105(a+b-c)+68$$

$a+b-c$ は整数で、$0<N<100$ ですから、$a+b-c=0$ のとき、$N=68$。

以上より、袋に残っている碁石は、$100-68=32$ 個です。

この問題は、7,5,3 で割った余りをそれぞれ p,q,r とすると、解法のオートメーション化をすることができます。

$N=7a+p$ …①　$N=5b+q$ …②　$N=3c+r$ …③　より、

①×15＋②×21＋③×70　を計算すると、

$$15N+21N+70N=15(7a+p)+21(5b+q)+70(3c+r)$$

$$106N=105(a+b+2c)+15p+21q+70r$$

$$\therefore\ N=105(a+b+2c-N)+15p+21q+70r$$

$m=a+b+2c-N$ とおくと、

$$N=105m+15p+21q+70r$$

したがって、N の値は、$15p+21q+70r$ に、105 を幾つか加えるか減じた値になります。

問題文は、$p=5,\ q=3,\ r=2$ の場合より $N=105m+15p+21q+70r=105m+278$。

$N<100$ ですから、278 から 105 を 2 回減じて（$m=-2$ とすることです）、$N=68$　となります。

このように、$15p+21q+70r$ を覚えておけば、どのような余りであっても、その値を代入後、条件に合うように 105 を減ずることで元の個数を求めることができます。その操作方法からこの演算を百五減算といいます。

百五減算は、鶴亀算、旅人算と同じように江戸時代に算術として用いられていたもので、和算書「塵劫記」に記されています。もともとは中国の数学古代書「孫子算経」を出典にしています。

さて、この計算法が成立するのは、3 つの数 7,5,3(七五三)が素数であることに依ります(差が 2 である 2 つの素数の組を双子素数といいますが、3,5,7 は双子素数が 2 組ある三つ子素数といってもいいでしょう)。3 と 5 と 7 の最小公倍数は 105 であり、N が 105 以下であれば、余り p,q,r により唯一 N の値が決定します。さらに、

$$15N+21N+70N=106N=105N+N$$

となることで簡便計算法が成立するのです。他の計算として

$$15N+21N-35N=N$$

から、$15p+21q-35r$ に余りを代入することで値を求められますが、やはり引き算があるのは煩わしいかもしれません。

さて、それでは 3,5,7 の組合せを 7,11,13 で考えるとどうなるでしょうか(11,13 は双子素数)。

その積は $7\times11\times13=1001$。だからこの算術法は千一減算、あるいはシェヘラザード減算ということになりましょうか。

N を 13,11,7 で割った余りをそれぞれ p,q,r とすると、

$N=13a+p$ …①　$N=11b+q$ …②　$N=7c+r$ …③

ここで、①×924＋②×364＋③×715 を計算すると、

$$924N+364N+715N=924(13a+p)+364(11b+q)+715(7c+r)$$

$$2003N=1001(12a+4b+5c)+924p+364q+715r$$

$$\therefore\ N=1001(12a+4b+5c-2N)+924p+364q+715r$$

よって、$924p+364q+715r$ に余りを代入すればいいことになります。たださすがにこれだけ大きな数になると大変です。

そこで、この式から $1001p+1001r$ を減ずると、

$$364q-77p-286r$$

まあ、妥協できる計算かもしれません。そう考えてみると百五減算は 7,5,3 という実に扱いやすい手頃な数で構成された庶民的な匂いのする娯楽数当てゲームといえるのです。

$\dfrac{25}{24}$

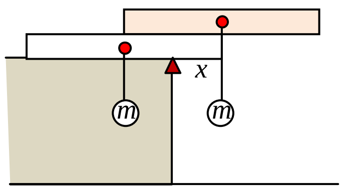
………空中浮揚をする数

雑然とした机の上に積み重ねられた書籍が机の端からはみ出し、今にも落ちそうで落ちない。そんな光景みたことありませんか。一番上に乗っている本の真下はもうほとんど机にかかっていないのに絶妙な均衡を保ち机の上の積み重なった書籍は芸術的なオブジェといってもいいでしょう。でもどこまで机の端から本を重ねてせり出すことは可能なのか気になりますね。

ただ、書籍ではサイズが違ったりしますから、ここでは、

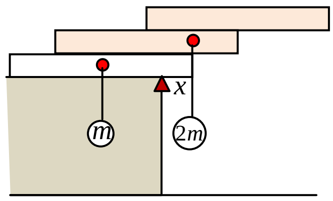
「均質な直方体の積み木を机の端から積み木がテーブルの側面と平行になるようにできるだけせり出すように重ねていく」

として調べてみましょう。1 個の場合は、積み木の真ん中が机の端にあればいいのは明らかです。2 個の場合は、まず机の真ん中に1個おきその上に半分ずらした積み木を重ねます。その2個を少しずつ机の端に移動させればいいのです。積み木 1 個の長さを 1、重さを m とします。一番下の積み木が机の端から x だけせり出して釣り合うとき、力のモーメントの関係より、$m\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=mx \quad \therefore \quad x=\dfrac{1}{4}$



もう 1 個増やしてみましょう。床の真ん中に 1 個置き、2 個目を$\dfrac{1}{4}$ずらし、3 個目を 2 個目の上に$\dfrac{1}{2}$ずらして置きます。これをずらし一番下が机の端から x せり出して釣り合うように置きます。

一番下の重み m とその上 2 個の重み $2m$ が釣り合うことより、$m\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=2mx \quad \therefore x=\dfrac{1}{6}$

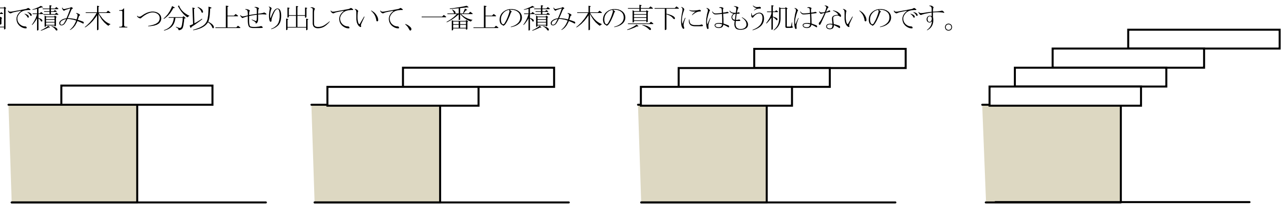


以下同じように考えていき、n 個積み重ねるとすると、一番下の重み m と、その上に $(n-1)$ 個の重み $m(n-1)$ が釣り合うことより、 $m\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=m(n-1)x \quad \therefore \quad x=\dfrac{1}{2n}$

結局、上のある積み木をその下の積み木に対して $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{10},\cdots\cdots$ だけ調和数列になるようにせり出し積み重ねていけばいいのです。したがって、机の端から一番上の積み木の端までせり出している長さは、

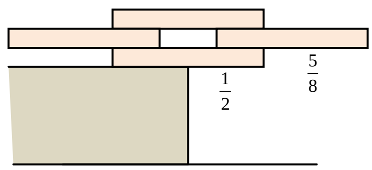
2 個のとき $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ 　3 個のとき $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{11}{12}$ 　そして 4 個のとき $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{25}{24}$

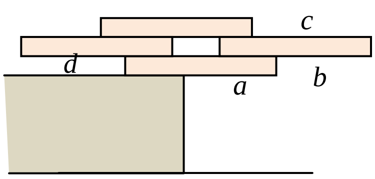
4 個で積み木 1 つ分以上せり出していて、一番上の積み木の真下にはもう机はないのです。



これは、積み上げ方を変えればもっと長くせり出すようにすることも可能です。

4 個を右図のように積み重ねると机の端からもっともせり出している積み木の端までの距離は$\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{9}{8}$ですから、先ほどの場合よりさらに$\dfrac{1}{12}$だけ長くなっています。このように 2 番目と3番目を並列におき、隙間をつくることにより、せり出す長さを伸ばせるのです。積み木4個の場合は各積み木の位置を調整することで、1956 年にサットンという人は下図のように最大 $a+b=\dfrac{15-4\sqrt{2}}{8}=1.168$ だけせり出せることを示しました。

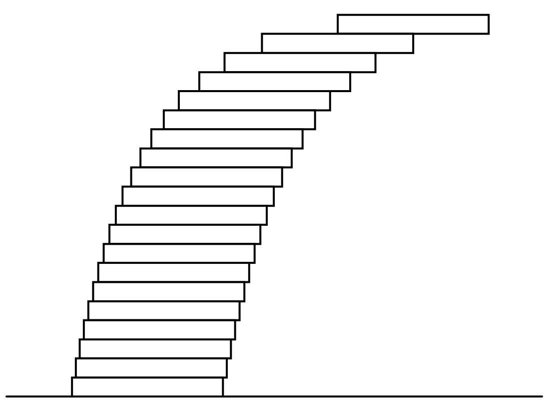




$a=\dfrac{7-2\sqrt{2}}{8}$ 　$b=\dfrac{4-\sqrt{2}}{4}$

$c=\dfrac{19-10\sqrt{2}}{7}$ 　$d=\dfrac{11-\sqrt{2}}{14}$

積み木は、子どもにとっては「積み上げていけば何かができる」という創造への興味が尽きない玩具です。そして大人にとっても忘れかけていた純粋さやひたむきさを思い出させてくれるものなのでしょう。だから、大人は机の上に雑然と本を積み上げたくなるのでしょうか(そんなことはないですね)。そしてその積み上げ方はもっと芸術的です。ルールをきめて積み上げているわけではなく 1 つ置くたびに斜めにしたり、本を開いておいたり……。そのバランスに空中浮揚をさせる数たちも唖然としてしまうばかりです。



19

自然数の倍数判定法で、7 や 11 に関しては不思議数との出会いの覚書の数「7×11×13」で紹介しました。ここでは 19 の倍数判定法を見てみましょう。よく知られている方法としては次があります。

各位の数に上位から順に 2 のべき乗をかけて加えてできた数が 19 の倍数である。

例えば、$4389 \Rightarrow 4\times2+3\times2^2+8\times2^3+9\times2^4=228$　ここで $228=12\times19$ であることより 19 の倍数になります。

なお 228 についてはさらに倍数判定法を用いて $228 \Rightarrow 2\times2+2\times2^2+8\times2^3=76=4\times19$ としてもよいでしょう。この判定法が成立する理由を示しましょう。自然数 N を、$N=\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ （a_k は $0\leqq a_k \leqq 9$ の自然数)とします。

$$2^n N = 2^n \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} a_k 20^k$$

ここで、$20^k=(19+1)^k$ ですから、20^k を 19 で割った余りは 1 です。すなわち、

$$2^n N \equiv \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} a_k \pmod{19}$$

2^n は 19 の倍数ではないことより、

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} a_k \equiv 0 \pmod{19}$$

となります。

ただこの倍数判定法は桁数が増えると 2 のべき乗の計算が大変になってきますね。そこで別の判定法を紹介しましょう。

数を十の位以上の数 a と一の位の数 b に分けるとき、$a+2b$ が 19 の倍数である。

4389 であれば、438 と 9 に分け、$438+9\times2$ を計算します。この計算も面倒なように思えますが、右のようにオートメーション化すると簡単です。計算結果から遡っていくと、19⇒57⇒456⇒4389 と順番に 19 の倍数が決定していきます。ではこの倍数判定法が成立する操作の背景を説明しましょう。

$$\begin{array}{r} 4389 \\ \underline{18} \\ 456 \\ \underline{12} \\ 57 \\ \underline{14} \\ 19 \end{array}$$

数 N は $N=10a+b$ とおけます。ここで $M=a+2b$ が 19 の倍数であるとき、N が 19 の倍数であることを示せばいいわけです。2 式より a を消去します。$10M-N=19b$ 。これから $N=10M-19b$ より、M が 19 の倍数であれば N も 19 の倍数であることが分かります。また、$10M=N+19b$ より N が 19 の倍数であるとき M は 19 の倍数も示されます。このように、1 の位の数の 2 倍と十位という桁が 19 の数字を背景で作り出していたわけです。そう考えるとその作り出し方はもっと別の方法もあることに気がつくでしょうか。

数を百の位以上の数 a と、一の位の数 b に分けるとき、$5a+b$ が 19 の倍数である。

$N=100a+b$ に対して、$M=5a+b$ を考えます。$20M-N=20(5a+b)-(100a+b)=19b$

この方法でもよさそうですが、十の位以上を 5 倍しなければならないため、計算のオートメーション化は難しいですね。

ところでこのようは倍数判定の背景は、他の数の倍数判定についても示してくれます。

数を十の位以上の数 a と、一の位の数 b に分けるとき、$a-2b$ が??の倍数である。

さあ、これは何の倍数になるか分かりますか。

$N=10a+b$ に対して、$M=a-2b$ です。$N-10M=21b$ となります。

右辺は 21 の倍数ですから、すなわち 3 または 7 の倍数です。3 の倍数については各位の数の和が 3 の倍数であれば数も 3 の倍数である判定法がありますから、これは、7 の倍数判定法と言えるのです。

$$\begin{array}{r} 21994 \\ \underline{8} \\ 2191 \\ \underline{2} \\ 217 \\ \underline{14} \\ 7 \end{array}$$

右は 21994 が 7 の倍数であることを示したものです。ただし、桁数の少ない数に対しては有効ですが、大きな数の場合には、「数を下から 3 桁ずつ区切り、偶数番目の区画の和と奇数番目の区画の和の差が 7 の倍数」という判定法の方が良さそうです。

このように 1 の位の定数倍を 2 倍、−2 倍と変えることにより、19 や 7 の倍数判定ができるということは、適当な定数倍を考えることで、他の数の倍数判定もできそうですね。

$N=10a+b$ に対して、$M=a+kb$ を考えてみましょう。a を消去して、$10M-N=(10k-1)b$ 。

$k=3$ のときは、$10M-N=29b$　すなわち、素数 29 の倍数判定

$k=4$ のときは、$10M-N=39b$　すなわち、素数 39 の倍数判定

$k=-1$ のときは、$N-10M=11b$　すなわち、素数 11 の倍数判定

$k=-3$ のときは、$N-10M=31b$　すなわち、素数 31 の倍数判定

$$\begin{array}{r} 3567 \\ \underline{21} \\ 377 \\ \underline{21} \\ 58 \\ \underline{24} \\ 29 \end{array}$$

右に数 3567 が 29 の倍数であるオートメーション計算を示しました。数を十の位以上と一の位に分割することにより、他にも素数の倍数判定を導き出せそうですね。

365

……… 1 年の計を調整する数

$365=10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$という面白い性質はありますが、数365から連想するものは多くの人は365日の1年でしょう。でも 366 としたら、うるう年 366 日を思い浮かべる人はあまりいないかもしれません。4 年に 1 度巡ってくる、うるう年から 1 年の長さは 365 に固定されたものでないことは分かりますね。現在、使用されている太陽暦はグレゴリオ暦といい、グレゴリウス 3 世により制定されたものです。それまで使用していたユリウス暦(ジュリアス・シーザーが制定)は、1 年を 365.25 日と考え、その 0.25 のズレを修正するために 4 年に 1 度のうるう年を設けていました。ところがその後、天文学者の計算の結果、約 365.2422 日であることが分かり、その僅かなズレが長い年月で積み重なり、大きなズレとなったために、1582 年 10 月 4 日(木)の翌日を 1582 年 10 月 15 日(金)としてグレゴリオ暦を採用したのです。日本では明治 6 年 1 月 1 日からの採用になります。グレゴリオ暦ではうるう年の設定をもっと厳密に次のようにしています。

> 西暦が 4 の倍数のとき、うるう年とする。
> ただし、 西暦が 100 の倍数であり 400 の倍数でないときは平年とする。

だから西暦 2000 年はうるう年ですが、西暦 2100 年はうるう年ではないのです。

ただ、調整はこの部分だけですから、それを式化することができたとしたら、指定した年月日の曜日を求めることが可能になるはずです。そして実際、ツェラーという人はそのことを考え曜日計算の公式を導いたのです。

> 西暦 Y 年 M 月 D 日の曜日は次式により求められる。
>
> $$W=Y+\left[\frac{Y}{4}\right]-\left[\frac{Y}{100}\right]+\left[\frac{Y}{400}\right]+\left[\frac{26(M+1)}{10}\right]+D$$
>
> のとき、W を 7 で割った余りが右の曜日に対応する。

余り	1	2	3	4	5	6	0
曜日	日	月	火	水	木	金	土

ガウス記号$[x]$はxを超えない最大の整数(xの小数以下を切り捨てた整数)を表し、例えば$[3.2]=3$になります。

公式を用いて 2011 年 12 月 24 日の曜日を求めてみましょう。$Y=2011$、$M=12$、$D=24$より、

$$W=2011+\left[\frac{2011}{4}\right]-\left[\frac{2011}{100}\right]+\left[\frac{2011}{400}\right]+\left[\frac{13\times 26}{10}\right]+24=2011+502-20+5+33+24=2555$$

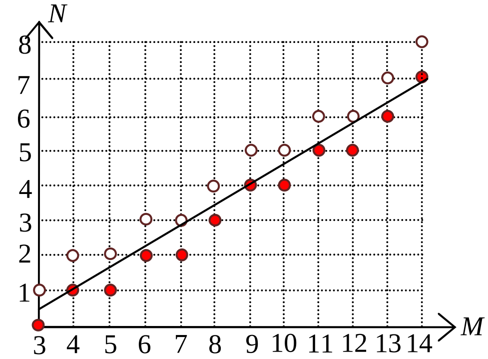
2555 は 7 で割り切れるため、余り 0 に対応する曜日をみて今年のクリスマスイブの曜日は土曜日であることが分かります。ただし、この式は、西暦 0 年 3 月 1 日を起点の日とする関係で、1 月と 2 月は、M の値はそれぞれ 13 月、14 月とします。

この公式が成立する原理は、曜日が日～土の 7 日の周期で繰り返されることにあります。ツェラーの公式は実は単純に起点からの総日数をカウントしてそれを 7 で割り、余りを曜日に対応させているだけなのです。1 年は 365 日であることを標準とすると、西暦 0 年 3 月 1 日からの西暦 Y 年 2 月 28 日までの日数はうるう年の微調整を考慮しなければ、365Y になり、非常に大きな日数になります。そこで$365Y=7\times 52Y+Y$とみて、予め 7 の倍数分だけ除いた値 Y で W は計算をしています。

Y に続く、$\left[\frac{Y}{4}\right],\left[\frac{Y}{100}\right],\left[\frac{Y}{400}\right]$は、それぞれ「うるう年を加算」、「100 の倍数のうるう年を減算」、「400 の倍数のうるう年を加算」して調整していることは明らかでしょう。W の式の最後の項 D は、西暦 Y 年 M 月 1 日から西暦 Y 年 M 月 D 日までの日数をカウントしています。そして、項$\left[\frac{26(M+1)}{10}\right]$は西暦 Y 年 3 月 1 日から西暦 Y 年(M−1)月末日までの日数を計算する部分です。

これもまず 1ヶ月をすべて 30 日として総日数$30(M-3)$を求め、これに各月の日数を調整する式を加えます。右表が微調整する日数で、4 月と 9 月を表す 2 点$(4,1)$, $(9,4)$を通る直線$N=\frac{3}{5}(M-4)+1$から微調整の式を作ります。

月	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
日数	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	28
調整	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7



そして最後に西暦 0 年 3 月 1 日の曜日を表す 4(すなわち水曜日を表す余り)を最終調整に加えます。

$$(4-1)+30(M-3)+\left[\frac{3}{5}(M-4)+1\right]=7(4M-13)+\left[(2M+4)+\frac{3}{5}M-\frac{7}{5}\right]$$
$$=7(4M-13)+\left[\frac{26(M+1)}{10}\right]$$

これを 7 で割ると、その余りの部分から目的の式がやっと得られました。

これであなたは、現在、過去、未来のいかなる日にちでもたちどころにその曜日を知ることが可能になるのです。

うるう年に対してうるう秒というのがあります。これは 1 年の秒数を 1 秒長くし 1 分を 61 秒にする調整です。近年では 2006 年と 2009 年の元旦に 8 時 59 分 59 秒の後、8 時 59 分 60 秒、9 時 00 分 00 秒とカウントされました。記憶にある人も多いでしょう。うるう秒は天体の動きによる天文時と原子時計の刻む時刻である原子秒とのズレを修正するものでうるう年の調整とは関係ありません。ただ、今までは天の動きで四季の移ろいを感じていた人の意識に新たに電子という機械が混在してきたことは確かです。アナログ的な天文時間から点滅するデジタルタイムにより人間の生活が支配される時代はもう遠くないのかもしれません。

2^{64}

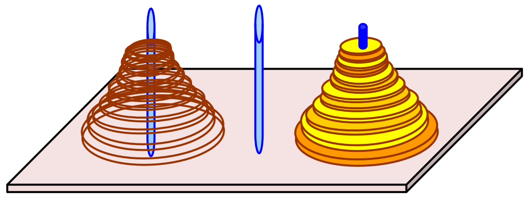
………世界の終末をカウントする数

不思議な話を紹介しましょう。

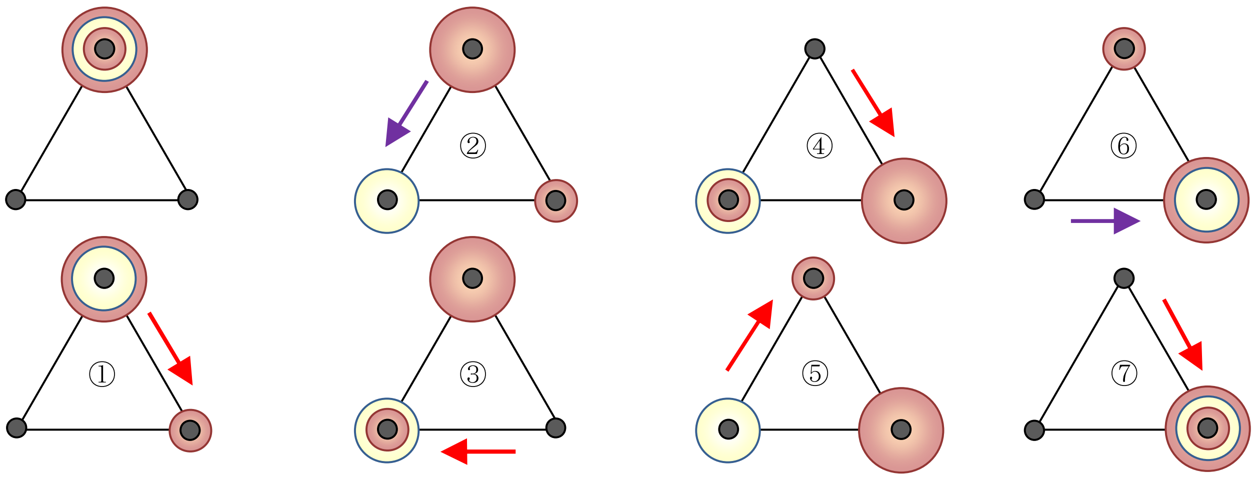
> インドのガンジス川ほとりの町ベナレスのバラモン教の寺院には、世界の中心を表すという聖堂がある。この聖堂の中には3本の大理石の柱が立っており、その1本には、大小64枚の黄金の円盤が、大きい円盤から順に重ねられている。この円盤をバラモン教の僧侶(ブラフマン)が昔から昼夜を問わず次の規則で移し換えている。バラモン教の教えでは、最初にこの円盤を1番目の柱に重ね並べたのは神であり、僧侶がすべての円盤を3番目の柱に移し換えたとき、この世は崩壊し終焉を迎えるという。僧侶は今も浄罪を求め滅びに向かってひたすら円盤を移している。

円盤の移動規則は、次のようになっています。

①1回に1枚の円盤しか移動できない
②移動した円盤は3本の棒のいずれかに必ず差し込む
③移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる



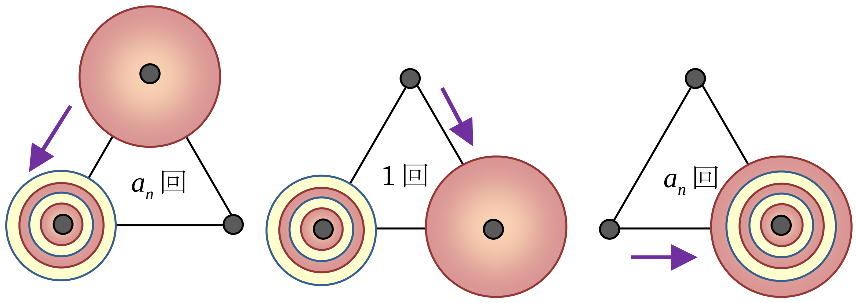
これを体験できる「ハノイの塔」いう玩具があります。1883 年に発売され、フランスの数学者リュカ教授が知り合いのクロー教授から教えてもらったものと言われていましたが、その後、クロー(Claus)はリュカ(Lucas)のアナグラム(文字の綴り換え)であり、バラモンの塔の伝説もリュカ教授の創作であったことが判明します。このゲーム「ハノイの塔」を紙上で体験してみましょう。下図は 3 つの円盤の場合で、柱は正三角形の頂点に配置しています。番号順に円盤の移動を追っていくと、ご覧のように最小 7 回の操作で、3 つの円盤が 1 つ右回りの頂点に移動しています。



では円盤が 4 つになった場合の最小の手数はというと、それを計算することはそれほど難しくはありません。

まず 4 番めの一番大きな円盤はないものとして、上 3 つを別の柱に 7 回の操作で移します。次に 4 番目を空いている柱に通し、その上にまた 3 つの円盤を 7 回の操作で移動させればいいのです。したがって、その総数は$7+1+7=15$回になります。

同様に考えればn枚の円盤の最小移動の手数を a_n とすると、$n+1$ 枚のときの最小手数 a_{n+1} は $a_{n+1}=a_n+1+a_n=2a_n+1$ となり、この漸化式から一般項$a_n=2^n-1$が得られます。



これで移動の最小回数は分かりましたが、では実際の移動はどのようにすればいいのでしょう。円盤 3 枚の移動図の 2 段目をみるとその移動法が分かります。2 段目はすべて一番上の円盤(円盤 1)が 1 頂点ずつ時計回りに移動しているのが分かるでしょうか。これから円盤の移動のオートメーション化ができます。

「奇数回目は円盤 1 を時計回りに 1 頂点ずつ進め、偶数回目は、円盤 1 以外の移動可能な円盤を移す」

ちなみに、すべての奇数番目の円盤は時計回りに、偶数番目の円盤は反時計回りに移動しているのです。

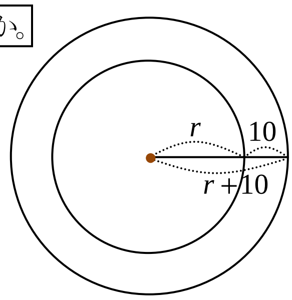
さて、バラモンの僧が、この移動法で 1 秒に 1 回動かすと終焉までの移動回数は、$2^{64}-1=1844{,}6744{,}0737{,}0955{,}1615$。とんでもない回数で、日数にすると 5800 億年以上を費やすことになり、私たちにとって終焉などどうでもいいことになってしまいます。でも円盤の枚数が 87 枚や 107 枚の場合を考えると別の新たな興味が湧き出ます。$2^{87}-1$、$2^{107}-1$は、2^n-1で表される素数であり、メルセンヌ素数といいます。そしてリュカ教授は、1876 年、$n=127$ が素数であることを満足な計算機もなかった当時に手計算で求めているのです。これはメルセンヌ素数の 12 番目にあたります。その後メルセンヌ素数は計算技術の発達により次々にみつけられ、現在では 40 個が確認されています。その最大のものは$n=20996011$で、バラモンの伝説も霞んでしまいます。でも、リュカ教授が求めた$2^{127}-1$は手計算で得たものとしては最大であり、教授はその研究の一過程に遊び心でハノイの塔とその伝説を考えたのかなとも思うのです。$n=127$ を実際手計算で求めたリュカ教授は自身をバラモン僧と同一視し、そして成し遂げたわけで、伝説を超えた数学者の深く壮大なロマンが数2^{64}には込められているのです。

10

……… 基準から一般化を促す数

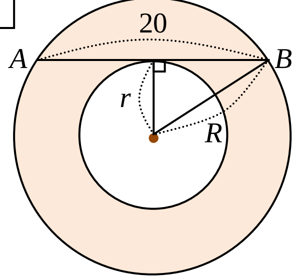
2^{64} は天文学的な大きさの数ですが、$2^{10}=1024 \fallingdotseq 1000$ と大雑把にみると、$2^{64}=2^4\times\left(2^{10}\right)^6 \fallingdotseq 16\times\left(10^3\right)^6=16\times10^{18}$。京の位にまで達する値ですがグンと数が身近になったことは間違いないでしょう。数 10 は、10 進数の世界で生活するヒトの尺度基準となる数であり、古代のピタゴラス学派は「すべてを包括し、すべてに境界をつける母」と名づけました。10 はもっとも親しみのある数ですから、10 を例にとって問題を考察すると一般化もしやすいのです。数 10 を用いた計算からちょっと信じられないような結論を導いてみましょう。

問 1) 円 C の半径を 10 ㎝長くして同心円を描くとき、円 C よりどれだけ円周は長くなりますか。



円 C の半径を r ㎝とすると円周の長さは $2\pi r$。半径を 10 ㎝長くした円の円周の長さは $2\pi(10+r)$。円周の差を求めると、$2\pi(10+r)-2\pi r=20\pi$。約 62.8 ㎝長ければいいことになります。ここで不思議なことが起こっているのが分かりますか。この問題では円 C の半径は与えられていません。ということはどんな円であっても半径を 10 ㎝長くするにはそのもとの円の円周の長さを 62.8 ㎝増やせばいいということです。それが地球の赤道に沿ってロープを巻いたものを、地上より 10 ㎝の高さまで上げたとしてでもです。 そしてこのことは円周の長さだけでなく、面積においても拡張できます。

問 2) 2 つの同心円があり、外側の円の弦 AB が内側の円に接しています。 $AB=20$ (㎝)のとき、外側の円の内部および内側の円の外部にあるドーナッツ状の部分の面積を求めなさい。

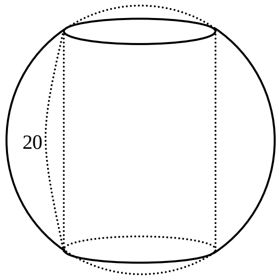


2 つの同心円の半径は与えられていないので、半径をそれぞれ R、r ($R>r$)としましょう。

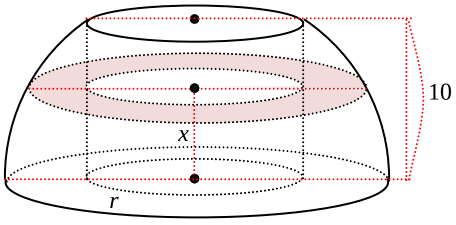
外側、内側の円の面積はそれぞれ πR^2、πr^2 です。また、2 つの円の半径には、$R^2-r^2=10^2$ という関係が成立しています。2 円の面積の差を求めると、$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=100\pi$。

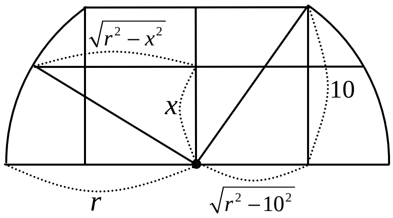
この結果もまた、同心円の大きさに関わりなく決定してしまうのです。このどちらの問題も円の半径に関係ないのであれば、問 1 の円や問 2 の内側の円の半径を限りなく 0 近づけても成立するはずです。そう考えると問 1 の増える円周の長さは半径 10 の円周である 20π、問 2 の増える面積は半径 10 の円の面積 100π ということがいえるのです。

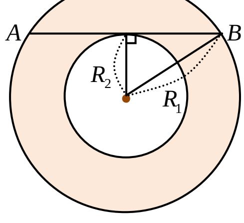
問 3) 球の真ん中に深さ 20 ㎝の円筒状の穴をあけるとき、残りの部分の体積を求めなさい。

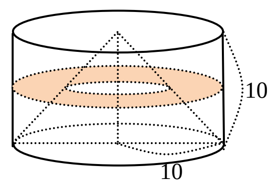


答えの予想はできますか。円柱の底面の円の半径を限りなく 0 に近づけると円柱の体積は 0 になるため、残りの部分は半径 10 ㎝の球の体積に等しいはずです。すなわち $\dfrac{4000}{3}\pi$ ということになります。確かめてみましょう。球の半径を r とし、半球の部分の体積を V とします。半球の底面の円から高さ x の点で底面に水平な平面で切るときにできるドーナツ面の面積 S を求めます。外側の円の半径は $R_1=\sqrt{r^2-10^2}$、内側の円の半径は $R_2=\sqrt{r^2-x^2}$。外側の円の弦で内側の円に接するものの長さは $2\sqrt{{R_1}^2-{R_2}^2}=2\sqrt{10^2-x^2}$。問 2 の考え方からドーナツ面の面積は、$S=\pi(10^2-x^2)=10^2\pi-\pi x^2$。ここで x の値を 0 から 10 まで変化させると、$10^2\pi$ は半径 10 の円の面積より、円を高さ 10 まで積み上げた円柱の体積になり、$V_1=10^3\pi$ が得られます。次に πx^2 は半径 x の円の面積ですから、半径が 0 から 10 まで変化させて円を積み上げると、底面は半径 10 の円で高さが 10 の円錐ができます。その体積は $V_2=\dfrac{1}{3}10^2\pi\times10=\dfrac{10^3\pi}{3}$ です。以上より、$V=V_1-V_2=\dfrac{2}{3}\times10^3\pi$。半球の部分を 2 倍すると予想通りの結果が得られました。



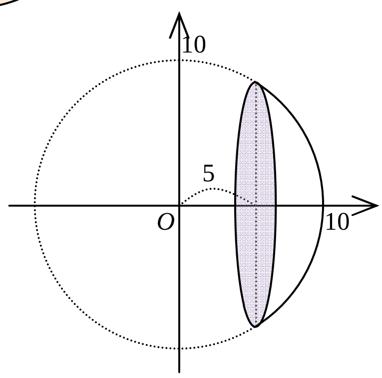






惑星のような大きな球体であっても 10 ㎝の深さになるように円柱をくり抜くことが可能であれば、そのときのくり抜かれた残りの部分の体積が一定であり、丸めると小さな球になるなんて信じられるでしょうか。そしてこのことを用いると積分計算を必要とする部分球の体積を求めることも可能になるのです。例えば半径 10 の球を右図のように 2 つの部分球に分けるとき、小さい方の体積 V は、 $V=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{4}{3}\pi\times10^3-\left(\dfrac{4}{3}\pi\times5^3+75\pi\times10\right)\right\}=\dfrac{625}{3}\pi$

この計算の意味、あなたは分かりますか。



50653

………立方根暗算の例示数

Ｓ氏の心は躍っている。先日電卓を叩いていたら面白い事実を発見したのだ。4 の立方数 64 はもとの数と 1 の位が一致している。5も6も同じだ。不思議に思い、1桁の他の数も調べてみたら右表のようになった。一致したのは 1、4、5、6、9。

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
立方数	1	8	27	64	125	216	343	512	729

うーん、残念。でもまてよ、残りの 2、3、7、8 の立方数の 1 の位はもとの数と足すと 10 になるぞ。ということはこの仕組を覚えておけば、2 桁の数の立方の値からもとの数の 1 の位は分かるってことじゃないか。ではもとの数の十の位の数は求められないだろうか。2 桁の数を$10a+b$とすると、立方数は、

$(10a+b)^3=1000a^3+100a^2b+10ab^2+b^3$

うーん、あっ、そうか。第 2 項以下の$100a^2b+10ab^2+b^3$は大きくなったって、たかが知れている。だから$1000a^3$からaを決定できるぞ。千の位以上の数の部分が 1 桁の立方数に近いものを探せばいいんだ。例えば 37 の立方数は 50653。その 1 の位をみると 3 だからもとの数の 1 の位は表から 7。次の千以上の数の部分は 50 だから表から 3 の立方 27 と 4 の立方 64 の間にあるから 3 のはずだ。だからもとの数は 37 だ。うん、行けそうだ。

実はＳ氏、職場の懇親会で余興をやることになり、芸のないＳ氏はずーっと悩んでいた。この立方数の性質を使えば数当てマジックができることに気がついたのだ。いつもＳ氏を見下した視線で見ているＯ氏を指名して適当な数の 3 乗を計算させてその結果からもとの数を言い当てたらきっとＯ氏はびっくりするだろう。ん?、まてよ、もしＯ氏が 3 乗の計算を間違えたらどうする。そうしたらこちらも正確な数当てができないばかりかＯ氏に恥をかかせることになってしまい、Ｏ氏の視線はもっと厳しいものになるじゃないか。そうだ、電卓。電卓をもっていって計算させれば問題ない。さらに数当てをした後にその数を実際に電卓で 3 乗して観客にみせればより効果的だ。……ということでＳ氏は上の表を必死で暗記し当日に備えた。

さて、私はみなさんに速算術をお見せします。思い浮かべた 2 桁の数を 3 乗してもらい、その結果を聞いて思い浮かべた数を当ててみましょう。それではお手伝いをＯさん、お願いします。考えた数を電卓で 3 回かけてください。……ではその数を私に教えてください。435433 ですか。ということは、1 の位の数は 7 ですね。Ｏ氏の視線がちょっと和らいだ。会場は拍手喝采。では十の位ですが(435 だから)……分かりました、7 ですね。してやったりとＯ氏をみると、あれ、視線、いつもより冷たいぞ。「考えた数は 67 なんだけどな」。静まり返った会場にＯ氏の感情を押し殺した言葉が響き渡る。そんな馬鹿な。「済みません、ちょっと待ってください」。電卓に 435433 を入力し 67 で 2 回割ってみる。表示版に現れた数は 97。「こいつ、67 と 97 を押し間違えてやがる!!」

Ｓ氏のその後は予想できると思いますが、もし、435433 からその立方根を求めることができていたら、Ｏ氏はともかく、職場の視線はもっと温かいものになっていたかもしれません。ちょっと調べてみましょう。

考えた数を$n=a+b$とします。なお、bは非常に小さい値とします。$n^3=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

ここで、$3ab^2+b^3$も小さい値なので無視すると、$n^3=a^3+3a^2b$。これから、$b=\dfrac{n^3-a^3}{3a^2}$。

以上より、$n=a+b=a+\dfrac{n^3-a^3}{3a^2}$　が得られます。

例えば、$n=435433$のときは、Ｓ氏が暗記した表から、十の位は 7 であることが分かります。電卓で 70 台の 3 乗でn^3に近いものを探すと$75^3=421875$。$76^3=438976$。この場合は、76^3の方を採用し、次の式を電卓で計算します。

$$n=a+b=76+\frac{435433-438976}{3\times76\times76}\fallingdotseq 75.79553$$

$\sqrt[3]{435433}\fallingdotseq 75.79498$ですからほぼ一致していることが分かります。

でも電卓で計算するならもっと正確に求める方法があります。どんなに安価な電卓でも付いている$\sqrt{\ }$キーとメモリーキーの機能を用いるだけです。nを入力後、nをメモリーに記憶しましょう。次に$\sqrt{\ }\sqrt{\ }$と 2 回押し、メモリーのnをかけた後、また$\sqrt{\ }\sqrt{\ }$を押します。その値にメモリーのnをかけ$\sqrt{\ }\sqrt{\ }$を押します。この操作をひたすら繰り返すのです。計算値の動きをみてみましょう。

$\sqrt{\ }\sqrt{\ }$を押すと$\sqrt{\sqrt{n}}=n^{\frac{1}{4}}$　$\Rightarrow$　$n\sqrt{\ }\sqrt{\ }$を押すと$\sqrt{\sqrt{n\cdot n^{\frac{1}{4}}}}=n^{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2}$ $\Rightarrow$　$n\sqrt{\ }\sqrt{\ }$を押すと$\sqrt{\sqrt{n\cdot n^{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}}=n^{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

以下同様の操作を続けると、指数部分の和は、$\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$

これからnの 3 乗根が電卓で求められるのです。

ところで、みなさんは肝心のその電卓って持っていますか?。携帯が電卓機能を搭載していたり、一家に一台パソコンがある時代ですからもう電卓は不要な道具なのかも知れません。ちなみにパソコンで Office のアプリケーション Excel を起動し、「$=n\wedge(1/3)$」と入力すると簡単にnの 3 乗根は求められてしまいます。

Ｓ氏が 3 乗根の数当てをしても「だからどうしたの。何の役に立つの」。そんな声も聞こえてきそうですね。

$$\frac{2}{3}$$ (確率)

教室の中に２人の生徒がいて何かしているようです。巡回中の２人の男の先生のうち１人が中に入り、数分後にでてきました。待っていた先生は中に入った先生から何も聞かず「男と女がいただろ」。さて、この推測は正しいでしょうか。

男の先生が部屋の中に入る前は性別の組合せは、「男男、男女、女男、女女」の 4 通りが考えられ、どの組合せも等しい確率ですから、その確率は$\frac{1}{4}$ です。そこに男の先生が入っても、「男男男、男男女、女男男、女女男」になりますが、やはりどの組合せも確率は$\frac{1}{4}$ で変わりません。この状態で部屋の中の男を１人選ぶ確率を求めてみましょう。まず、男男男の組合せである場合は確率１です。男男女の場合は$\frac{2}{3}$ ですね。以下同様に考えると、男を１人選ぶ確率は、

$$\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

一方、教室の中に３人がいて、２人が男で１人が女であるとき、男１人を選ぶ確率は$\frac{2}{3}$ ですから、これは先程求めた確率と一致していて、これ以外の組合せで確率が$\frac{2}{3}$ になることはありません。だから教室の中には男２人、女１人がいるということになります。ということは、男の先生が教室からでた後、教室の中の２人は、男が１人減り、男１人と女１人になるはずです。これが、もともと教室にいた性別の人数になります。すなわち、部屋の外で待っていた先生の推測は正しいことになってしまうのです。でも何か変ですよね。こんなことを実際、相手の教師にいったら「お前、なにいってんだ」と怪訝な顔をされるでしょう。

この問題は、数学者チャールズ・ラトウィッジ・ドジソン(Charles Lutwidge Dodgson)の著書「Pillow Problems」、日本語では「枕頭問題集」と訳された問題集に載っているものです。状況設定はもちろんアレンジしていますが。問題集には 72 の問題が掲載されていて、序文には「ほとんどすべての問題は、夜、ベッドのなかで目を覚ましたまま、頭の中で解いたものである」と記されています。そこでこのような書名になったわけです。この奇妙な問題は最後の 72 問めにあり、その解答として上述の証明がなされています。この証明をみてアメリカのある数学者は「著者は数学者としては三流で、確率論の初歩さえ理解していない」と批評したといいます。でもこの著者のことをよく知っているのならけっしてこんな誤解はしないはずなのです。ドジソンにはペンネームがあり、それは氏名をラテン語で読み、また英語に戻し綴りを入れ替えたもので、その名前はルイス・キャロル(Lewis Carroll)といいます。そう、あの「不思議の国のアリス」の作者です。不思議な国のアリスにはいたるところに「奇妙な論理」が展開されていることはご存知でしょう。だからこの問題集も同様であり、その解答さえもキャロル流のパロディとみるべきなのです。「どこに論証の誤りがあるのか分かりますか」とキャロルは読者に問いかけているのです。

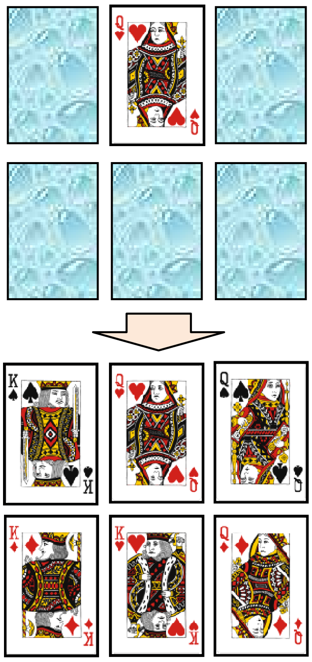
論理がおかしいことは、教室の中の人数を１人にしてみると分かります。性別の組合せは「男、女」の２通りでその確率はどちらも$\frac{1}{2}$。そこに男の先生が加わると「男男、男女」。だから男を１人選ぶ確率は、$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$。男１人女１人の計２人から男１人を選ぶ確率は$\frac{1}{2}$ ですから、確率が異なってしまい、もう綻びがみえてきましたね。

では論証のどこにキャロルの仕掛けた罠はあるのかということになります。それぞれの論証場面で確率を計算するところでは広義に解釈すれば間違っているとはいえません。部分は正しいのです。問題は、全体を通してみたときに、同じ「母集団」の確率であるかということです。前半は「男男」「男女」「女男」「女女」に 1 人男を加えたグループのそれぞれに対して男１人を選ぶ確率を求め、$\frac{1}{4}$ をかけているわけですから、結局それぞれのグループで男１人を選んだ場合の平均を求めていることになります。すなわち$\frac{2}{3}$ は平均化した確率になっているわけです。これに対して後半で得られる$\frac{2}{3}$ は、単純に男２人と女１人の計３人から男１人を選ぶ確率ですから確率の意味(母集団)が違っていることになるのです。どちらも同じ$\frac{2}{3}$ の確率になっていることで比較ができるような錯覚をしてしまうことがトラップなのです。

「枕頭問題集」にはこれ以外にも奇妙な問題がたくさん載っており、解答にも誤りがあります。その誤りはキャロルの19 世紀の時代では解決できなかったことなのか、それともやはりキャロル一流のパロディなのかは分かりません。不思議の国のアリスに登場するチェシャ猫がアリスの前からニヤニヤ顔を残したまた消えて行くように霧の中に包まれたままなのです。

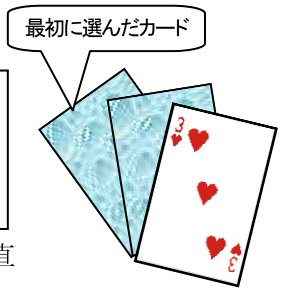
$$\frac{1}{2}$$

………心理を揺さぶる数



クイーン(Q)とキング(K)のトランプが２枚ずつ３列に計６枚、テーブルの上に裏返しに並べられています。各列の２枚のトランプは、QQ、KK、QK のいずれかであることは分かっています。いま、ある列の２枚のトランプのうち１枚をめくったところ Q でした。このとき同じ列の残りの１枚が K である確率を求めてください。

Q のカードがあるのは、QQ、QK の２組ですから、残りのトランプが K である確率は$\frac{1}{2}$……としてしまいたくなりますが、それは誤りです。例えば３枚の Q、K をハート、ダイヤ、スペードとし、各組の組合せを(スペード K ダイヤ K)、(スペード Q ダイヤ Q)、(ハート Q ハート K)とします。いま１枚のカードをめくったとき Q であるならば、そのカードはハート、ダイヤ、スペードのいずれかです。その中でもう１枚が K となるのは、(ハート Q ハート K)の１組だけですから、その確率は$\frac{1}{3}$となります。このようにある事象 A が起こった条件で事象 B の起こる確率を B における A の条件付き確率といい$P_A(B)$で表し、その確率は$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$で得られます。Q のカードをめくる事象を A、その組に K のカードがある事象を B とすると、$P(A)=\frac{1}{2}$は明らかです。また Q のカードでありもう１枚が K である確率は、$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$。これから、$P_A(B)=\frac{1}{3}$であることが示されます。



トランプゲームの相手が、ハートのエース、ハート 2、ハート 3 の 3 枚のカードを持っています。その中から１枚を抜いて、エースであればこちらの勝ちです。選んだ１枚を抜こうとしたところ相手は制止をかけ、残り 2 枚からエースでない 1 枚をこちらにみせて、「選ぶカードを考えなおしてもいいよ」といいました。あなたはどうしますか。

ハートのエースは相手の持っている残り２枚のうちの１枚ですから、最初に選んだカード、選び直したカードどちらもその確率は$\frac{1}{2}$です。だから選び直すかどうかは外れた場合の落胆の度合いが大きく影響し、さらに第一の直感を信じるならば別に変えなくてもいいということになるかも知れませんが、それは誤りです。選び直すことで当たる確率は 2 倍になります。その原因は、相手がみせるカードは意図的に提示されることにあります。右図は最初に引いたカードに対して相手がどのカードを提示し勝敗がつくかを示したものです。勝敗の欄をみると○と×のはどちらも 4 通りですから確率も半々になるように思えますが、みせるカードの段階で確率に違いが生じています。№5～7 は最初のカードはハズレですから見せるカードも残り 1 枚のハズレに限定されます。しかし№1～№4 は、最初に選んだカードは当たりであるため見せるカードはハズレ 2 枚のどちらかになり、その確率は$\frac{1}{2}$になります。そのため№1～№4 の確率は、$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$であり、№5～№8 の確率は、$\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$になります。これより、変更ありの条件で勝負に勝つ確率は右下の計算で得られます。最初のカードを選ぶ確率は$\frac{1}{3}$でありカードを変更することで$\frac{2}{3}$になることは、確率が倍になるというより、相手が当たりでないカードを見せることでそのカードの勝つ確率を０にしてくれるからです。この時点で残り１枚のカードの勝つ確率は$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$になるのです。

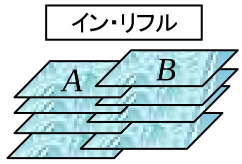
No.	最初のカード	みせたカード	変更	勝敗	確率
1	ハートA	ハート2	有り	×	1/12
2			なし	○	1/12
3		ハート3	有り	×	1/12
4			なし	○	1/12
5	ハート1	ハート2	有り	○	1/6
6			なし	×	1/6
7	ハート2	ハート3	有り	○	1/6
8			なし	×	1/6

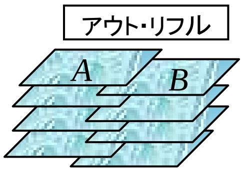
【変更した場合に勝つ確率】

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{3}$$

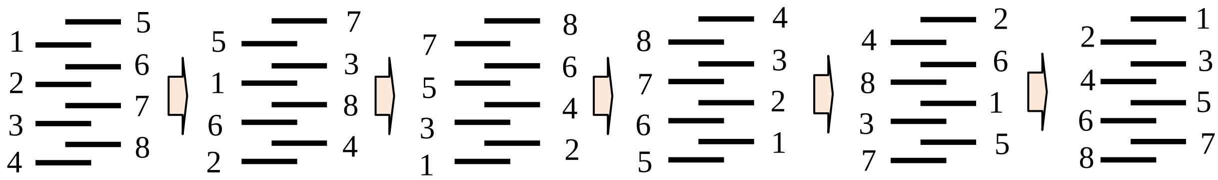
２つの問題はいずれも確率$\frac{1}{2}$に惑わされてしまいます。人は勝つことより負けることや後悔することを恐れる気持ちが強く、心理的に確率を見誤り、「even であればいいだろう」と妥協してしまいます。この心理を補正するのが論理であり、$\frac{1}{2}$は心理と論理の重みのバランスも量っているのです。

52

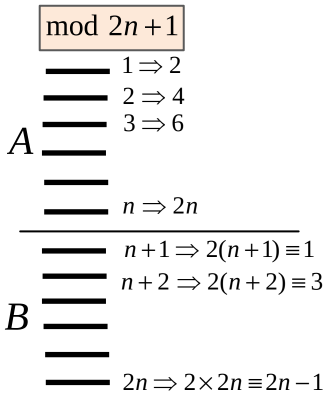




$52=13\times 4$。13 枚を 4 つのグループに分けるといったらトランプのカードが思い浮かびますね。トランプゲームはカードをよく混ぜあわせることから始めますが、その方法としてよく知られているものは 3 つあります。シャッフル(Shuffle)はもっとも代表的なものでご存知でしょう(北海道ではてんを切るといいます)。カット(Cut)は、カードを二山に分けて上の山と下の山を入れ替えるものです。そして一番華麗な方法がリフル・シャッフル(Riffle Shuffle)です。2 つの山 A、B に分けたカードを交互に上のものから順番にパラパラと食い込ませていくもので巧みな手さばきでマジシャンがやる方法です。そのリフル・シャッフルにはさらに 2 種類の方法があります。山 A のカードを偶数番目、山 B のカードを奇数番目に挿し込む方法をイン・リフル、A を奇数番目、B を偶数番目に挿し込む方法をアウト・リフルといいます。アウト・リフルはシャッフルする前の一番上および一番下のカードは移動することはないので、完全に混ぜあわせるということでは不適当です。イン・リフルでは、1 番目、2 番目のカードは 2 番目、4 番目と移っていくのでバラバラになりそうですが、でも本当にそうでしょうか。イン・シャッフルでカードがどのように移動するのか調べてみましょう。1〜8 の数字の 8 枚のカードを選び、これを 1〜4 の A の山、5〜8 の B の山に分けます。B、A の山から順番に交互に取り差し込んでいくと下図のように 6 回のシャッフルで元の並びに戻ってしまいます。その理由を考えてみましょう。



まずAの山の 1,2,3,4 はシャッフル後、それぞれ上から 2,4,6,8 番目に移動するので「$k \Rightarrow 2k$」のルールが成立します。次にBの山の 5,6,7,8 はそれぞれ上から 1,3,5,7 番目に移動します。ここでBの移動をAの移動ルールで統一できるようにするため、$5 \Rightarrow 2\times 5=9+1\equiv 1 \pmod 9$ とし、9 で割った余りで分類します。そうすると、すべてのカードは「$k \Rightarrow 2k \pmod 9$」でその移動を表現することができます。このシャッフルを m 回繰り返すと、移動後の位置は「$k \Rightarrow 2^m k \pmod 9$」になります。これが最初の配列に戻るためには、「$2^m k\equiv k \pmod 9$」となればいいことから、「$2^m\equiv 1 \pmod 9$」を得ます。すなわち 8 枚のカードでは、$2^6=64=9\times 7+1\equiv 1 \pmod 9$ より 6 回のシャッフルで元に戻るわけです。また、$2^3=8$ であることから 3 回のシャッフルではカードは元の配列と逆順に並ぶことも分かるでしょう(上図を参照)。

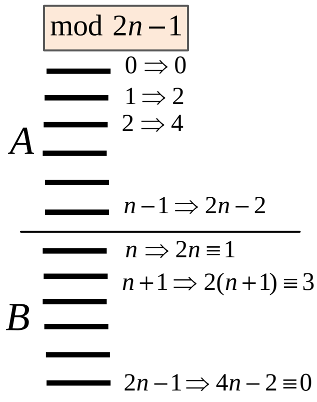


このことは、カードの枚数が $2n$ 枚でも同様に考えられます。Aの山の 1〜n は、$k \Rightarrow 2k$ の規則で移動し、B の山は、$n+1\Rightarrow 2(n+1)\equiv 1$ とするために $2n+1$ で割った余りを対応させます。これを m 回シャッフルし、もとの状態に戻すためには、$2^m\equiv 1 \pmod{2n+1}$ を満たせばよいわけです。例えば、枚数を 20 枚にすると、$2^m\equiv 1 \pmod{21}$ ですが、$2^6=64=21\times 3+1$ より僅か 6 回のシャッフルだけでいいわけです。この移動ルールはカード当てマジックに応用できそうですね。上から 4 番目のカードを覚えさせ、4 回シャッフル後、$4\times 2^4=64\equiv 1 \pmod{21}$ より、一番上のカードをめくると出現することを言い当てるのです。

それでは、今度は、52 枚のカードすべてをイン・リフルしてみましょう。$2^m\equiv 1 \pmod{53}$ である m を求めることになります。

$$2^{53}=(1+1)^{53}=2+{}_{53}C_1+{}_{53}C_2+{}_{53}C_3+\cdots\cdots+{}_{53}C_{52} \qquad {}_{53}C_r=\frac{53\times 52\times 51\times\cdots\times(54-r)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\times 2\times 1}\quad (1\leqq r\leqq 52)$$

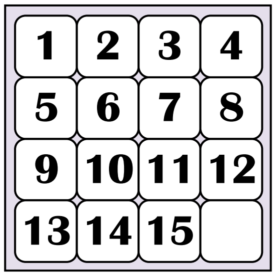
素数 53 と r は公約数をもちません。ここで ${}_{53}C_r$ は自然数ですから、53 以外の $52\times 51\times\cdots\times(54-r)$ の部分は $r!$ で割り切れることになります。これから、${}_{53}C_r$ は 53 で割り切れ、$2^{53}\equiv 2 \pmod{53}$ より $2^{52}\equiv 1 \pmod{53}$。カードは 52 回のシャッフルで元に戻ります。でも一流のマジシャンでも正確に 52 回のシャッフルをこなすのは至難の業でしょう。そこでイン・リフトをアウト・リフルに替えてみましょう。この場合、カードには上から順に 0,1,2,……,51 の番号を振り、0〜25 を山A、26〜51 を山Bとします。するとイン・シャフルと同様に山 A の札は $2k$ のルールで偶数番目に配置されます(0 番目は常に固定)。山 B は $2k$ を 51 で割った余りを対応させ、奇数番目に配置します(51 番目は固定)。よって移動ルールは $2^m\equiv 1 \pmod{51}$ になります。$2^8=256=51\times 5+1\equiv 1 \pmod{51}$ ですから、8 回のシャッフルで元に戻ることになり、プロであるならば修練を積めば可能なことでしょう。もっともこの方法で実際にカード当てマジックをしているかどうかは疑問ですが。では、さらにジョーカーを含めた 53 枚でシャッフルするとどうなるでしょう。2 つの山は 27 枚と 26 枚になり、27 枚の山のカードから配置されることより、山Aが 27 枚の場合はアウト・リフルで一番上のカードは固定され、山Bが 27 枚の場合はイン・リフルで一番下のカードは固定されます。したがって $k \Rightarrow 2k$ のルールは保たれることになります。

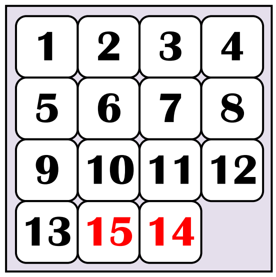


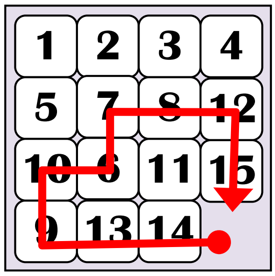
このように、ゲームの前のシャッフルは、でたらめにカードは混ぜ込んでいるわけではなく、そのルールを知れば意図的に配置することも可能になるのです。その結果、ゲームの勝敗は、偶然ではなく必然になってしまいます。

15

………パズル愛好家を夢中にした数





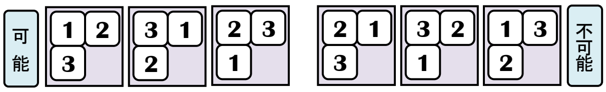


15 は平方数である 16 より 1 だけ少ない数。その 1 だけ少ないことを用いてあるパズルが作られ、後に多くのパズル愛好家の頭を悩ませることになります。縦横 4 分割の 16 のマス目がある正方形の盤に 1～15 の数字を入れた正方形状のピースを組み込みます。1 つ空いたスペースがあるので、他のピースはそこに移動することができます。デタラメに置かれたピースをスペースに移動させながら順番に並べていくこのゲームを 15(スライド)パズルといいます。数字を絵柄に変え、絵を完成させる幼児用の玩具もありますね。さて、このパズルは、1978 年にアメリカのパズリストであるサム・ロイド(Sam Loyd)が発表した次の問題により一躍脚光を浴び、爆発的に売れたといいます。

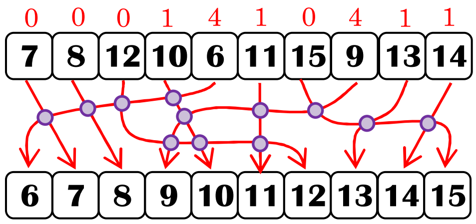
「14 と 15 のピースだけを入れ替えた状態から 1～15 の順に並べ直すことができるか」

ロイドはこの問題に 1000 ドルの懸賞金を掛けましたが、誰も賞金を手にすることはできませんでした。実は並べ替えは不可能だったのです。それを知っていたロイドは確信犯ということになります。

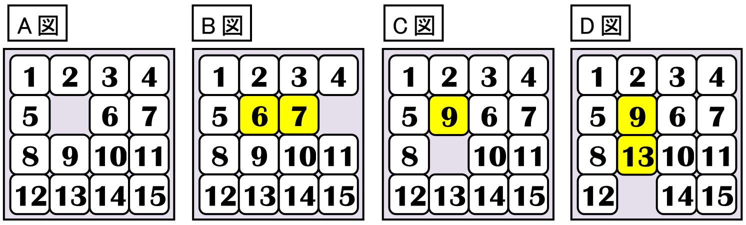
ではなぜ不可能なのでしょうか。2×2 のスライドパズルでピース移動の動きをみてましょう。1,2,3 の数字の並べ方は 3! = 6 通りですから、3 つの数のすべての配置は下図になります。このうちスライドして完成できるものは 3 通り、できないものも 3 通りです。この 2 つのグループで共通していることは、左上のピースから時計回りに数字の並びをみていくと、完成できるものは $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ 、できないものは $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ であり、できないものは数字 1 と 3 のように 1 組の数字の順番が入れ替わっていることが分かります。ここに完成できる、できないの秘密がありそうです。ちょっと、ピースの移動の見方を変えてみましょう。

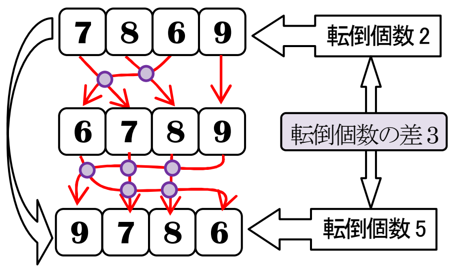


ピースはスペース位置に移動するわけですから、「ピースの移動はスペースの移動」と考えることができます。スペースは必ず右下隅にくるようにすると、スペースが上や左に移動した場合は必ずどこかで逆にそれぞれ下や右へ動きます。したがって移動の回数は偶数回になります。これは 4×4 の 15 パズルでもスペースの移動回数は上下、左右とも偶数回になるのです。例えば右図は、左右 3 回ずつ、上下 2 回ずつの計 10 回移動した場合です。さて、この偶数回の移動で数の並びはどのように変わるのでしょうか。もともとピースは 1～15 の順に昇順(小⇒大ということ)に並んでいたわけですが、移動を繰り返すことで、数が大⇒小の順に入れ替わるものがでてきます。先ほどの 10 回のスライド移動の結果をみると 1 から 5 は不変ですが、それ以降は入れ替わり右図のような並びになります。10 の左にはそれより大きい数 12 があり、大小の入れ替わりは 1 個発生しています。6 の左はすべてそれより大きい数であるため入れ替えは 4 個です。大小の入れ替えの総数を数えると 12 個になります。このように大⇒小に入れ替わる数を転倒数と呼ぶことにします。この転倒数の個数は、入れ替え前の 6～15 の数字を図のように対応させ、同じ数字どうしが交わる回数を最小になるように結ぶとき、その交点の個数から求めることもできます。



転倒数がスペースの上下、左右方向への移動でどれだけ発生するのか調べてみましょう。図 A を最初の配置とします。まず左右方向に動かすとスペースが移動してもスペースが詰まるだけですから転倒数は発生しません(図 B)。もともと転倒数があるような配置についても移動により転倒数の増減は起きないことも明らかです。これに対して図 C のように数字 9 のピースを上方に一段上げると 9 は 3 つのピース 6,7,8 を飛び越えることになり、3 つの転倒、すなわち奇数個の転倒が発生します。スペースの移動する前と移動した後の間にある 4 つのピースに、もともと転倒がある場合は(例えば 7,8,6,9 では 2 個)、移動後の転倒数の個数と(9,7,8,6 では 5 個)、もとの転倒数の個数の差は奇数個になります。1 段下げた場合もこのことは成立します。2 段縦方向に上げたり下げたりした場合はもともとの転倒数の個数と移動後の転倒数の個数の差は偶数個になります(図 D)。ここでスペースを最終的にもとの位置に戻すのであれば、移動により上下する段数は一致するわけですから、もともとの転倒数の個数と移動後の転倒数の個数の差は必ず偶数個になるはずです。すなわち 15 パズルはスペースが右下隅にある状態から移動し、完成後もまたスペースが右下隅の状態であるならば、始まりと終わりの偶奇は一致していて、その場合には相互の形に移動可能ということになります。サム・ロイド問題のピースの配置では転倒があるのは 15,14 ピースだけですから転倒数の個数は 1 個であり、それを 1～15 の昇順に並べることは転倒数の個数を 0 個にするということです。これから偶奇は一致せず不可能という結論が得られるのです。サム・ロイドの出題した懸賞問題は、翌年の 1879 年に、ジョンソン、ストローイが数学的に不可能であることを証明したといわれています。2 人が賞金を手にしたかどうかは分かりませんが、その瞬間にパズル愛好家の夢が潰えたことは間違いありません。15 パズルに夢中になった人たちは、動機として懸賞問題への挑戦はあったにしても、遊んでいるうちにパズルの面白さに夢中になったいたわけで、不可能が証明されたことで、そんな知的好奇心に水をさしてしまったともいえます。真実を知ってしまうことは良し悪しなのかもしれません。





あとがき

不思議数との出会いの覚書の第２集です。第１集の出会いは 18 篇で今回は 32 篇、合わせて 50 の話を紹介したことになります。第１集は、数を生業とする仕事上、出会ってきた数たちのエピソードを書き留めただけでしたが、第２集はそんな出会いも最近めっきり減ってしまい話題も底をつき、何か面白い数字はいないかと東奔西走の日々でした。それでも、大して有名ではないけれど、自己を主張している「孤高の数たち」を取材しようという当初の方針は曲げることなく死守したつもりです。黄金数ではなくプラスチック数、円周率ではなくその近似数、そういった地味だけど大地に根ざしている数たちの活躍にスポットを当てています。そんな中、数たちの出会いがぷっつり途切れてしまったときは、数を捜索し創りだすということもしました。その際に重宝したのが、Microsoft 社のアプリケーションである Excel の VBA、フリーソフトの多倍長電卓 LM。まるで仲人のような存在でした。Excel では数の性質をその出現回数で捉え、マクロを走らせることが度々であり、発生する数の小数点以下や大きな数での誤差は LM で出力し確認することができました。その作業の過程でスカウトして見出した新人もいます。一方では面白い話題を紹介したいために当て馬のように数を扱って虐めてしまったこともあります。32 篇をひねり出すためにはなんでもやりました。その結果、純粋に数たちとの出会い、触れ合いは傷つけられてしまったかもしれません。そんな気持ちが文章に現われていなければいいのですが。でも、平凡な数なんてあるのでしょうか。ある数を平凡とみるならその数は何も特性を見いだせないという稀有な存在であり、すなわち平凡ではないということになります。そう考えると平凡な数などないわけでそれを見いだせなかったのは私の力不足ということになります。だから決意を新たに誓ったこと。それでも二度と書くまい!!!。

「出会いの場の記録」ある参考文献ですが、取材した数、それぞれに対して紹介すると膨大な量になってしまいます。そこで、第２集では、第１集で紹介した以外の文献について書籍名のみを記載します。

【書籍参考文献】

数学の学校　淡中忠郎　東京図書
続数学の学校　淡中忠郎　東京図書
ガードナーの数学サーカス　マーチン・ガードナー　（高山　宏　訳）　東京図書
代数のはなし　ペレリマン　（山崎　昇　訳）　東京図書
数学歴史パズル　藤村幸三郎　田村三郎　講談社（ブルーバックス）
パズル数学入門　藤村幸三郎　田村三郎　講談社（ブルーバックス）
数学アイデアパズル　藤村幸三郎　松田道雄　講談社（ブルーバックス）
ゆっくり考えよう！高校総合学習の数学　佐々木正敏　講談社（ブルーバックス）
円周率πの不思議　堀場芳数　講談社（ブルーバックス）
自然にひそむ数学　佐藤修一　講談社（ブルーバックス）
代数を図形で解く　中村義作　阿邊恵一　講談社（ブルーバックス）
数学の魔法の宝箱　イアン・スチュアート（水谷　淳 訳）　ソフトバンク　クリエィティブ株式会社
数学の秘密の本棚　イアン・スチュアート（水谷　淳 訳）　ソフトバンク　クリエィティブ株式会社
数学の楽しみ　テオニ・パパス　（安原和見　訳）　筑摩書房
数学は生きている　テオニ・パパス　（秋山仁　監修）　東海大学出版会
続５分で楽しむ数学 50 話　エアハルト・ベーレンツ著 岩波書店
数学が面白くなる本　中村義作　三笠書房
数学がらくにわかる本　樺　旦純　三笠書房
数の魔法使い　ロブ・イースタウェイ・ジェレミー・ウィンダム　三笠書房
数学小景　高木貞治　岩波書店
見つけよう！数学　D.　ウェルズ（大橋義房　訳）　岩波書店
数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ……∞　小針晛宏　日本評論社
楽しい数学　シャックル（市場泰男　訳）　社会思想社
遊びの数学　ペレリマン（藤川健治　訳）　社会思想社
逆説論理学　野崎昭弘　中央公論社
数理パズル　池野信一　高木茂男　土橋創作　中村義作　中央公論社
マンホールのふたはなぜ丸い　中村義作　日本経済新聞社
枕頭問題集　L.　キャロル（柳瀬尚紀　訳）　朝日出版社
エインリの数学パズル　S.　エインリ　（高木茂男　訳）　培風館
ふしぎな数学　ノースロップ　（松井正太郎　訳）　みすず書房
計算が楽になる実用数学　波多　朝　理工学社

【インターネット参考文献】

結び目の数学　今井　淳　http://mathsoc.jp/publication/tushin/1303/1303imai.pdf
暦の数理　近藤芳朗　http://www.kawasaki-m.ac.jp/mw/hinfo/index.php
積み木と調和級数　西山豊　http://www.osaka-ue.ac.jp/zemi/nishiyama/