数学の言葉…その似て非なるもの

札幌旭丘高校　中村文則

はじめに

次の２つの文章を比較してみよう。

　本論は「数学の言葉…その似て非なるもの」をタイトルにしてその違いを理解することを目的とする

　本文は「算数の用語…その似て否なるもの」をテーマにしてその異なりを認識することを目標とする

この２つの文章の意味の違いはなんだろうか。

「本論」は論文構成の序論・本論・結論に依るものであり，論文の中では序論を引き継いで理論展開の中心となり結論へと導くものである。３つを合わせた論文全体が「本文」であり簡潔にまとめたものが要旨(abstract)である。

「タイトル(Title)」は表題，「テーマ(Theme)」は主題であり，普通はテーマに添ってタイトルが付けられている。論文ではタイトルは本文の最初に，テーマは序論の中で示される。

「目的」は「目指すべき的」に対する理由や意義であり，「目標」は「目指すべき標」に対して行動するための指標である。数学が理解できるようにすることは目的，そのために毎日継続的に勉強することは目標ということになる。

「言葉」は「言の葉」であり，言語という大樹の区分けされた枝々に幾千万と重なり垂れる概念の葉っぱである。その１つの枝に広がる言の葉はより専門的な言葉であり「用語」と呼ばれる。

「理解」は物事の道理を解することであり，「認識」は物事の道理を知り知識として蓄えることである。「理解」は道理を細かく分け解いてから分かることであり，それを学んで「認識」することで活用できる。例えばある単元の「理解が深まった後に認識できた」というように用いられる。

「異なり」と「違い」の異なりあるいは違いは何だろう。

計算結果が異なること，計算結果が違うこと，この場合で比較してみると，「異なり」「違い」どちらも同じように思える。しかし「異なる」ことは他の計算結果と比較しているだけでその正誤を読み取ることはできない。しかし「違う」ことは計算結果に誤りがある(あるいは計算した人がそう思っている)とニュアンスとしては解釈することはできる。「異なり」は客観的，「違い」は主観的な意味合いが強い。だから「異なり」と「違い」は「異なっている」と解釈した方がいいのだろう。

「否なる」は「非なる」の誤用である。非(あら)ずは否定を表しているから否と非を混同しているのである。「似て非なる」を短縮すると似非(エセ)になるがこれは対象を偽物と極めつけている。是非という言葉もまたは正しいこと(是)と正しくないこと(非)であるから，「非なる」ことは誤りであるとしていることになり，「異なり」と「違い」でいえば「違い」の意味に近い。したがって本レポートのタイトルとしては「似て非なる」よりは「似て比なる」(比較ができる)という造語が適切だろう。

では，「数学」と「算数」はどう違って(異なって)いるのだろうか。

「こんな計算もできないのか，もう一度，算数をやり直せ！」。

計算ができない生徒や用語の意味を理解していない生徒をこのように叱りつけることがある。算数は計算技術や知識習得の学問と考えている意識の顕れである。算数と数学は上下，高低といった層に色分けされてその領域は境界線で仕切られているように錯覚している。「算数で学んだよね」，「数学で学ぶからね」。相互とも相手を排他的に捉えながらも依存して頭のどこかで「異なること」ではなく「違うこと」とみなす。しかしそれでいて「ではどう違うの」と問われたら専門的に数学や算数を指導する立場であっても返答できないことがある。「数学と算数」を始めとして「数と数字」，「解と根」，「向きと方向」，「交点と共有点」，「曲線とグラフ」等，２つの数学用語を何となく用いているけどその似て非なることは曖昧ではないだろうか。

数学は数と式で論理が示される言語(数学言語)であるが，語られた数学を読み理解するのは会話言語(日本語)を用いる。数学用語はその両者をリンクする中間言語であり正確に翻訳しなければ伝わらず論理が崩れてしまうこともある。そこで本レポートは思いつくままに似て非なる用語を読み解きその違いを雑筆している(論文ではなく覚え書き程度のものである)。「数学の用語」は会話用語との多義や転義を考慮しタイトルでは「数学の言葉」とした。「非なるもの」は言葉の比較の意味であり，違いではなく異なりを考察する(文中では「異なり」を「違い」で表現しているものが多いが言葉としての使い易さからである)。ただ異なりは多様であり個々により解釈も変わる。だから「異なりを認識する」のではなく「異なりを理解する」ことに留めている。数学の言葉を整理し理解することで活動のコミュニケーションが生まれて，より深いまなびが得られればと思うのだ。

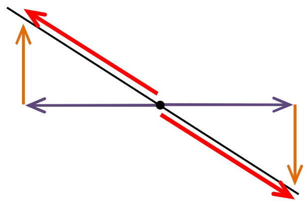
だから本レポートのテーマは次のようになる。

　本文は「数学の言葉…その似て非なるもの」をタイトルにしてその異なりを理解することを目標とする。

★向きと方向

「向き」と「方向」は同じように扱われるが異なるものである。家が南向きに建っているとはいうが，南北向きに建っているとはいわない。町並みが東西方向に延びるとはいうが，東西向きに延びるとはいわない。風向き，進行方向，どちらも風方向，進行向きといってしまうとおかしな表現になる。しかし，「風の方向」，「進行の向き」とすると，さほど違和感はない。このことが向きと方向を混同してしまう理由かもしれない。

数学においては，向きや方向を考えることは重要である。ベクトルは「大きさと向きをもつ量」と定義され，直線の方向を定めるベルトルをその直線の方向ベクトルという。直線の方向は直線の傾き(xy 座標平面上で y 軸に平行でない場合)で得られる。傾きは x の増分に対する y の増分の割合(比率)であるから，直線の傾きが $m=-\dfrac{2}{3}$ であるということは，



$$m=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$$

２通りの増分の割合が考えられる。ベクトルでは，$\vec{a}=(3,-2)$ のとき，

$$(-3,2)=-(3,-2)=-\vec{a}$$

すなわち，$\vec{a}$ とその逆ベクトルが方向を決めている。

このように向きとその逆向きを合わせて方向という。東西方向は，東向きとその逆向きである西向きを合わせたものなのである。したがって２つの直線(ベクトル)が平行であるとは，方向が同じということであり，傾きは方向ベクトルで表される。

２つのベクトルのなす角 θ はベクトルの向きが作る角の大きさであるから $0°\leqq\theta\leqq180°$ である。これに対して２つの直線のなす角 θ は傾きを表す方向ベクトルのなす角だから鈍角になった場合は逆ベクトルをとることで鋭角にすることができる。そのため $0°\leqq\theta\leqq90°$ となるのである。

恋は互いに目を見つめ向き合うもの，愛は互いに同じ向きを見るもの。だがやがて同じ方向を見るものになってしまうこともある。一人は「あのときは」と過去を振り返り，一人は「これからは」と未来を望む。同じ方向なのに２人の心はどんどん離れていくのだ。

なお，進路や生き方の方向というものは，現在を始点とするわけだから，未来に向かうべきであろう。この場合，向き(orientation)と方向(direction)は等しくなるのである。

★交点と共有点

今の教科書では「交点」という表現はあまり使われなくなり「共有点」で表現するようになっている。

数学Ⅰの２次関数の単元では，「２次関数と x 軸との共有点の座標」を判別式 D を用いて場合分けをし，

①$D>0\Leftrightarrow$ 異なる２点で交わる。　②$D=0\Leftrightarrow$ １点で接する　③ $D<0\Leftrightarrow$ 共有点をもたない

と分類する。ここからは，共有点の状態として交点（①），接点（②）があり，それ以外を共有点がない（③）としていることが読み取れる。共有点の個数を考えれば，それぞれ２個，１個，０個ということである。

交点とは文字通り交差する点(交差点)の意であろうし，これに対して接するということは乱暴ではあるが接触することである。両者に明らかに状態としての違いはあるわけだからそれを区別するために共有点という用語が用いられるのだろう。だから，２次関数のグラフと x 軸が交点をもたないとき，判別式は $D\leqq0$ とすべきなのである。では $D<0$ としたら間違いになるかというと微妙である。それは用語の意味よりもむしろ教える側に原因があるようにも思える。過去には，交わる，交わらないといった２択しかなかった時代もあって接点も交点の１つとして考えられていた。そうして教えられていた側が教える側になった場合は，つい交点という用語で説明をしてしまう。用語の統一が周知徹底されていないのである。だから，わざわざ $D>0$ を「２点で交わる」と表現することもある。2013 年度の東北大学(後期)の解答ではある予備校では「接点は交点とは数えない」と注釈をつけていた。

x 軸の場合と同様に直線と放物線の共有点の個数が１個のときは接するとしていいだろうか。これも y 軸に平行な直線と放物線は１点を共有するが交わっているのである。

では，２直線の位置関係のように接点がない場合は，交わる，交わらないでいいだろうかというとそうではない。２直線には２つの直線が一致するという位置関係もあり，これはすべての点を共有していると考えるべきだろう。すなわち，共有は「交わる」と「一致する」ことであり，それ以外は共有しないということである。だから，「交わらない」ことの否定は「交わる」ということではない。でも「一致する」ことは２直線ではなく結局は１直線であるから例外ではないかと考えたくもなる。しかし，

$$y=x\,,\quad y=x\ (-1<x<1)\,,\quad y=\frac{x^2}{x}$$

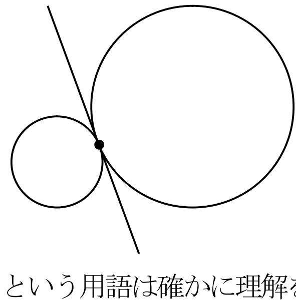
これらはみな異なる直線(線分)であり，２直線は一致するのではなく含まれる関係にある。

２円の交点を通る図形についてはどうだろうか。

Ex）２円$C_1: x^2+y^2=1$と$C_2: x^2+y^2-6x-8y+9=0$ の交点を通る直線の方程式を求めよ。

２円の交点を通る図形(円または直線)は，$x^2+y^2-1+k(x^2+y^2-6x-8y+9)=0$であるから，$k=-1$を代入する。

よって，$3x+4y-5=0$が求める直線である。



この解答は正しいだろうか。

実は，２円は外接している。共有点はあるが交点はない。

だから求める直線はないということになる。では, 2 円の共有点を通る直線を求めよ，としたらどうだろう。これもまずい。なぜなら共有点である接点を通る直線は無数に存在するからである。したがって２円の交点を通る図形という表現は間違いではない。２円の位置関係において交点は必ず２点存在するからである。なお，ex の場合は２円の方程式を引いて得られる直線は，２円の共通接線を表している。

このように，２曲線(直線)の幾つかの位置関係の状態を表現するためには「共有する」という用語は確かに理解を共有するためには便利なのである。

★円と円周

円の面積はπr^2，円周の長さは$2\pi r$である。誰でも知っていることである。

では円の定義はというと,「定点から等距離にある点の軌跡」であり, その方程式は中心が原点で半径がrの場合は，

$x^2+y^2=r^2$。ここでは円の中味は消えてしまっている!!。円であったはずの図形が皮だけの円周になっているのだ。その内部を含めるには円(周)を境界線として，領域$x^2+y^2 \leqq r^2$を作らなければならない。

いったい，どこで円は円周になってしまったのだろう。

数学 A の図形の性質の分野でも円は，「定点から一定の距離にある点全体が作る図形」であり「一定の距離以下」とはなっていない。「円の内部の点」といった表現が用いられるのだ。内部の点Pを通る２直線が，「円と交わる」２点をそれぞれ，A, BとC, Dとするとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$が成立する。これは方べきの定理である。その逆は，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ならば，４点$A, B, C, D$は「同一円周上にある」と表現し「同一円上にある」とはいわない。

円周とはその名の通り円の周である。その意味においては円はその内部を含んでいて，一部分である皮が円周なのである。まあ，確かに円をその内部まで含めてしまうと，円上の点といったらその所在は分かりにくい。それも，円周上の点，円の内部の点といえばいいだけである。円は物体であり，円周や内部はその部位なのである。

円が皮だけになってしまったのは代数が台頭し座標平面上で図形を方程式として表すようになったからだろうか。円に限らず，三角形，四角形，すべての図形は曲線だけになり，中味を失い皮だけを論じている。例えば三角形の重心は三角形が重力方向に釣り合う点のことであり，内部の詰まった図形を支えることができる点である。これが三角形の３つの頂点の平均になってしまう(重心の位置は変わらないのだが)。円と円周の関係も，代数の歴史の流れの中で淘汰されたのかもしれない。

あるいは，数学という学問が具象から抽象へと深まっていく中で，それを受け入れるヒトが円を変えてしまったのかもしれない。

幼いころ，夜空に銀色に輝く「まんまるい月」を眺めて餅つきをする兎も含めて円の形を心に描いた。

紙工作で画用紙を「まあるく」切り抜き「これが円だ」と円周のツルツルとした感触に驚いて指をすべらせる。

雨の６月，水たまりにポチャッと落ちた雨粒が描く内側から広がる円の波紋が面白くて長靴で踏みしめる。

どの円もみな中味があったのだ。ヒトは経験と思い出の中で円を育ててきたのである。

古代ギリシャの数学者アルキメデスは，ポエニ戦争のさなか，彼が地面に描いていた円を敵兵が踏んだため「私の円を踏むな」と叫んだ。怒った兵士は彼を刺し殺してしまったという。アルキメデスが思い描いた円もきっと中味がいっぱい詰まっていたのではないだろうか。

★解と根

根と係数の関係，根の公式，根の判別式，重根……，昔の教科書はこのように記載されていた。

１次方程式$2x=4$を解くとその根は$x=2$

１次不等式$2x>4$を解くとその解は$x>2$

「では解と根はどう違うの？」

これでは混乱してしまうからという理由で，昭和 48 年の学習指導要領の改定では，「解と根」を統一して「解」と表現することになった。それまでの系統学習の時代が終り，数学教育現代化時代が幕を開ける。この改定では，小学校(4 年)の算数では集合の概念を扱い，高校の数学では線形代数が登場するが一方では複素平面は後退していく。しかし集合，写像を基礎とする数学概念の組み立ては難しく大学受験の激化に伴い時代はゆとりの教育を選択していくのだ。抽象・形式を排して内容は精選され，「解と根」は緩やかにゆとりの中に安息し同意語として埋没してしまった。

「でも解と根はどう違うの？」

根(root)は，植物などの根っこであり，その名の通り根源(根元)を表すものである。1 変数の n 次の多項式 $P(x)$ が，

$$P(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) \quad a\neq 0$$

と因数分解できるとき， $P(x)=0$ を満たす値，

$$x=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\cdots,\alpha_n$$

を方程式 $P(x)=0$ の根または零点(Zero Point)という。

これに対して，方程式 $P(x)=0$ の解とは， $P(x)=0$ を満たす $x=\alpha$ の値である。

結局，方程式 $P(x)=0$ の解と同じではないかと思うかもしれないがそうではない。

$P(x)=(x-1)^2(x-2)$ とすると，

$P(x)=0$ の根は， $P(x)=(x-1)(x-1)(x-2)$ より， $x=1,1,2$

$P(x)=0$ の解は， $P(1)=0, P(2)=0$ より， $x=1,2$

根は $P(x)$ の一次因子を定める根っこであり 3 次方程式であれば 3 つの因数すべてが関わる。

だから，因数 $x-\alpha_i$ ， $x-\alpha_j$ に対して， $\alpha_i=\alpha_j$ ($i\neq j$)でも α_i ， α_j はどちらも根である。

$x=1,1,2$ のときは， $x=1$ (重根)，2　とも書く。 $x=1$ (重解)ではない。これは，方程式や不等式の解は，解集合 $\{x\,|\,P(x)=0\}$ とみればすっきりするだろう。根を要素とする集合が解なのである。

これから方程式では「解が重複」することはない。しかし教科書では，2 次方程式の判別式では重解，高次方程式の解は 3 重解といった表現が用いられる。これは数学の表現としては誤りなのだが，「解と根を統一」したことで解は根でもある多義語となったのだからそういう意味では正しい。 n 次方程式の解の個数は複素数の範囲では1 個以上 n 個以下であるが，解を根とみて n 個としてもいいのである。

高校数学では，「根」は，平方根，立方根といったベキ根ではまだ扱われる。平方根という用語がすでに独立して市民権を得ているからさすがにこれを平方解とするわけにはいかなかったのだろう。

しかし，十把一絡げに根を解としてしまってよかったのだろうか。根は根っこである。根っこは本質である。教育はゆとりから生きる力へと歩みを進めるが，「解と根の統一」を根(ね)として基盤となる概念が根こそぎ刈り取られてしまう不安もある。数学は根無し草になってはいけない。

★数と数字

1は数字だろうか，それとも数だろうか。

スポーツ選手の背番号1は数字であるが，最小の自然数とみれば数である。

頭の中で考えていれば数だけどそれをノートに書き留めたら数字になるといったら禅問答だろうか。

ピタゴラスは「万物は数なり」と唱えた。数はあらゆるものの要素であり天空全体も調和のとれた数の性質に従うとし教団を創設した。彼が「万物は数字なり」と唱えていたら，ただの変人で終っていただろう。

数(number)は概念や法則であり，それを学ぶのが数学である。これに対して数字(figure)は用語・記号である。

似たようなものに「文」がある。後ろに「字」をつけると「文字」。「文」は「文字」を用いて述べられる。「数」も「数字」を文字として語られる。米国の数学者ダンツィーク(1914-2005)が残した名言「数は科学の言葉である」は，まさにこのことを指摘している。

数字は，抽象的な数を現実の世界に引き止めて置くために数に形(figure)を与えたものであるがその表現は固定的ではない。1は算用数字であり，漢数字では一(壱)，ローマ数字ではⅠ。数を思索するものにより表現は異なるが，概念を記録，記憶するために必要なものなのである。

ただ，数が概念であるならば多義的にもなり得るから数はその意味に数字を含んでしまうこともある。

数字の1は何だろうかと考え始めたらそれはもう数1を考えているのかもしれない。

例えば，Excel で「="2" & "3"」と入力すると文字列の数字 23 になる。「=20+3」としたらそれは計算を思考し数を求めることになり 23 という数値が得られる。同じ 23 でもインプットからアウトプットの間で数と数字は入り乱れるのである。さらにそこで数と数字の仲を取り持つのが「数値」。いったい数は幾つの顔を持つのだろう。

数は「すう」とも「かず」とも読める。「場合の数(かず)」であったり「大数(すう)の法則」であったりする。「かず」はものを数えることであり，その数えることの基盤は「すう」である。しかし数えることは思考し概念の到達である「すう」を求めることである。数(すう，かず)は始まりであり終わりということになる。

だから「数は，数字で語られ，数値で表現される」。こんなに綺麗にまとめて割り切ることはできないのだ。

現代社会は数や数字が氾濫している。「結果を数字で出せ」とはよく言われるが，その数字に意味を求めることはどうなのだろう。数字に至るまでの数の思考プロセスの重要性が欠如しているのも現代社会の特徴ではないだろうか。

ペルシアの数学者(天文学者)でもある詩人オマル・ハイヤム(1048－1131)の言葉を紹介しよう。

数とは何かというと，
数はすべての物体から人の理性によって抽象されたものであり，ものの中にあるのではない。
なぜなら，数とは，個々の物体にない，思弁的で一般性をもった何かだからである。

★算数と数学

　初等教育の教科「算数」は，中等教育以降は教科「数学」に変わるがその違いは何なのだろう。
　児童・生徒の発達段階に応じて出世魚のように名前が変わっただけだろうか。算数(Arithmetic)は，西洋数学が広まる以前は算術と呼ばれたが，何となく四則演算を基盤とすると計算術(calculation)というイメージが強い。これに対して数学(mathematics)は，数の概念を理論的に学ぶ学問ということだろうか。
　学習指導要領に定められる初等教育(小学校)，中等教育(中学校・高等学校)の算数・数学の目標は次の通りである。

小学校	中学校	高等学校
算数的活動を通して	数学的活動を通して	数学的活動をとおして
数量や図形について	数量や図形などに関する	数学における
基礎的･基本的な知識及び技能を 身に付け	基礎点な概念や原理･法則について 理解を深め	基本的な概念や原理･法則の 体系的な理解を深め
日常の事象について見通しをもち 筋道を立てて考え表現する能力を育てる	数学的な表現や処理の仕方を習得し 事象を数理的に考察し表現する能力を高める	事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を養う
算数的活動の楽しさや 数理的な処理のよさに気付き	数学的活動の楽しさや 数学のよさを実感し	創造性の基礎を培うとともに， 数学のよさを認識し
進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる	活用して判断したりしようとする態度を育てる	積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる

　算数的な活動とは，「児童が目的意識をもって主体的に取り組む算数に関わりのある様々な活動」である。
　数学的な活動とは，「身近な事象の数学化と数学的な課題の設定」，「数学的知識の構成の思考過程を振り返り活用する」ことである。しかし，「算数，数学って何なの」という本質には触れられてはいない。
　教科の目標を比較すると，学ぶ内容は「数量や図形」から「数量や図形など」となりさらに「数学」へと広がる。活動の対象は「日常の事象」から様々な「事象」へ考察範囲は膨らみ「数理的な処理のよさ」から「数学のよさ」へと理解を深めていく。算数が育てるのは「身に付け，気付く」ことであるが数学は「深め，高める」ことである。外的刺激による驚きや発見のリアルな体感的理解はじわじわと精神に染み込みバーチャルな内面的理解になるのである。
　だから具象の活動が算数，抽象の活動が数学ということだろうか。
　数量の分野は，算数では，長さ，重さ，時間，面積，体積の単位を学び，四則演算の理解と技能を身につけるが，数学では，角度以外の単位は数値化され見えなくなる。その角度の単位も弧度法以後は数値となり，外的な単位系の世界は消滅する。
　図形の分野でみると，算数では三角形や円といった図形は紙から切り抜いた中味(面積)のあるものであるが，数学では変数を用いて方程式として処理することで曲線という皮だけのものになってしまう。
　幼いころ，点は紙に鉛筆で描いた小さな黒い円であったはずだ。しかし空間は三次元，平面は二次元，数直線は一次元とすれば，点は0次元であるから視ることはできない。どんな小さく黒い円を描こうとそれは円である。球，四面体，立方体などの空間図形はノートに描くが実際にはこれも視ることはできない。ヒトは三次元に存在するがその目には平面までしか認識できない。数学は視えないものを視ようとしているようである。
　数学は英語で mathematics というが，その語源はギリシャ語の $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\alpha$ (マテーマタ) であり，本来は学問の意味である。古代ギリシャの数学者ピタゴラスが南イタリアのクロトンに創設した学園は，魂の浄化に至る道として「音楽・天文・幾何・数論」の四科を学問(マテーマタ)とし門下生に課した。これが学問の始まりである。時代は移り，紀元前 368 年にプラトンはアテナイの校外に学園アカデメイアを開校する。入口には「幾何学を知らざるもの，この門を入るべからず」と書かれており，科目の１つである幾何学の重要性を説いている。学園では４つの学問をすべて修めた者にはマティマティコス(数学者)の称号が与えられたという。この後，ローマ帝国時代に四科学問は暗黒の闇に呑み込まれ廃れるが 14 世紀のルネサンス期にギリシャ文化は復興し学問は四科(quadrivium)と文法，修辞，論理の三科(trivium)をあわせて中世の自由学芸(artes liberales)として再構成される。
　四科の中でも幾何･数論は重要な科目として扱われていた。数論はアリトメティカと言われたがインドから計算法，記数法が流入後，アリトメティカは実用的算術の色を濃くしていく。これが算数(Arithmetic)の始まりである。
　歴史では，算数は学問の総称であった数学の部分集合ということになっている。
　一方，日本では大陸文化の影響を受けて和算という独自の学問が発達した。江戸時代には庶民は寺子屋で和算を学び，面白くて興味ある問題は算額に描かれ絵馬として神社に奉納され，和算は絵馬を通して全国に広まっていった。しかし，明治時代になると西洋数学が入ってきて和算は次第に衰退していく。
　その西洋数学と比較して和算を算数とみなすこともある。
　和算は，庶民の生活や文化に密接に結びついた学問である。鶴亀算は算数の教科書でも扱われている。旅人算，植

木算，ねずみ算，小町算などなど。表題をみただけでワクワクするようなものばかりである。例えば塵劫記に掲載されている次の問題は「嫁入り」という表題が付けられている

> 26 歳の男が 8 歳の少女に一目惚れをした。親に結婚を申し込むが少女があまりに若すぎるということで，少女の年齢が男性の年齢の半分になったら結婚を許してもらえることになった。
> では，結婚するときの男と少女の年齢は何歳だろうか。

パズル・クイズのような遊戯的，趣味的な問題は庶民の間で大流行し，さらには実学として測量，建築，暦法や地図の作成，天体観測を始めとし農業，林業，漁業などあらゆる産業に和算は活躍の場を広げていく。

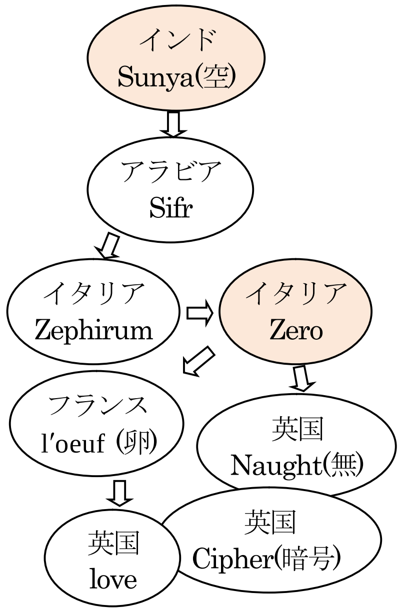
算数と数学の違いを和算と西洋数学の違いに結びつけることは強引かもしれないが，和算が現実の問題を題材として解決を図る実学ならば具象を扱う算数という見方は正しいだろう。ルネサンスの実用的算術(アリトメティカ)も算数という位置づけになる。これに対して数学は学問そのものとみなすならばその内容は抽象化されることになる。

このように考えると前述のように具象活動が算数，抽象活動が数学となることだろうか。しかしそう定義してしまうと肝心なものが抜け落ちているとも思う。それは活動として習得すべきものである。具象活動を通して得るものは技術や知識・知恵でありそれは体や頭が覚えた抽象的な概念ではないだろうか。抽象活動が得るものは，空を飛びたい，ミクロの世界を覗いてみたいと思い実現したこと，すなわち具象物ではないだろうか。

だから，算数は具象活動から抽象を得るもの，数学は抽象活動から具象を得るもの。そしてそこからさらに具象と抽象の行き来は幾度となく繰り返されるのである。

★ゼロと無

エレベータで下降すると，3 階，2 階，1 階，そして次は地下 1 階。地下をマイナス階とみれば，3,2,1,－1,…。なぜか 0 が抜けている。一方，気温が 3°, 2°, 1° と下がると次は 0°, −1°,…。こちらは 0 の存在を肌寒さでも感じることができる。0(ゼロ，零)は存在するのだろうか，しないのだろうか。



0 の概念はインドで十進位取りの空位を埋めるものとして考案された。空位の桁を示す記号とし当初は「・」が用いられたが空虚を表す円形「〇」からそして 0 へと形が変わるとともに記数法および数の概念が確立されていった。

やがて 8 世紀に入るとインド数学の影響を受けたアラビア（インドを征服したイスラム教徒）に受け継がれる。数学者アルクワリズミーは著書の算術書で旧来の算盤を用いた計算とは違い文字だけで計算する記数法を紹介する。この算術は後に彼の名に因んでアルゴリズム(Algorithm)とよばれるようになる。

神は宇宙を無から創造したと信じるイスラム教徒にとって無を表すゼロの存在は受け入れやすいものだったが無限や無を恐れるキリスト教徒はゼロを認めることを依然斥けていた。しかし 12 世紀に入るとアルクワリズミー著の「Al-jabr」の翻訳書がヨーロッパに出回り，徐々にローマ数学はアラビア数学に屈していく。ある 2 つの理由がそれを決定的にする。

１つめは経済の発達である。貿易商の息子であったイタリアのレオナルドは，1202 年に「算盤の書」を著し，その中でインドの計算術を紹介した。従来の計算盤では難しい複雑な計算や通貨の換算も容易に処理できるインド式計算術にイタリアの商人や銀行家は飛びついたのである。ローマ数字は追放され 0 および 1 から 9 の 10 個の数字で表現するアラビア数字(算用数字)の時代が訪れる。貿易商人は暗号にもアラビア数字を用いたため，英国ではその名残でゼロは Cipher(暗号)とも呼ばれている。なお「算盤の書」にはウサギのつがいから子どもが増えていく様子を調べた研究も載っている。レオナルドの別名はフィボナッチであるが，彼の最大の功績はヨーロッパにゼロを導入したことなのである。

２つめは，印刷技術の普及である。それまでの本は手書きか木版印刷によるものであったが，15 世紀にグーテンベルクが金属活字による活版印刷を考案したことで本の大量生産が可能になった。印刷技術は，羅針盤，火薬とともにルネサンスの 3 大発明ともいわれる。インドそしてアラビアの優れた数学の概念は出版本を通して広くヨーロッパに広まっていった。

しかし，アラビア数字は，0 を 6，1 を 4，3 を 8 といったように簡単に線を加えて書き直すことができる。正確な計算ができても正確に計算した値であるかが疑わしいという欠点がある。またそれまでのローマ数字の体系をすべてアラビア数字に変えるには膨大な作業と年月を必要とする。フランスでは価値のない人間を「位取り記数法のゼロ」と呼び揶揄した。ゼロを認めることへの抵抗は当時の流行歌からも見て取れる。

「人形が貴族になり　ロバがライオンになり　猿が王様になったら　0 も数になれるだろう」

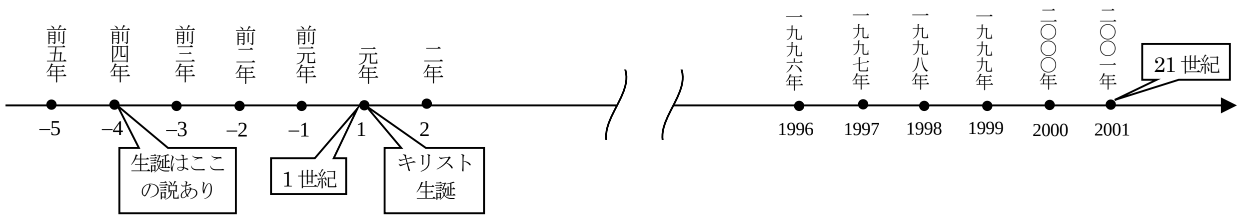
それでもアラビア数字の高い優位性はゆっくりとゆったりとゼロの概念とともにヨーロッパの数学に浸透し塗り替えていくのである。エルサレム修道院に所蔵されている 12 世紀に書かれた文書はそのことをよく表している。

「すべての数は1から始まる。だがいまやそれは0からである。何とも不思議なことである」
エジプト人はナイル川の氾濫により破壊された土地を復興するために幾何学を発明したが他の数学にはそれほど関心はなかった。ギリシャ人はエジプトから引き継いだ幾何を用いて数の意義を見出そうとした。ピュタゴラスは「万物は数である」と唱え，数を単位の集まりと考え，形すなわち図形とみなした。直角三角形の辺を作るピュタゴラス数，五芒星形の中に潜む黄金比など図形を構成する数に哲学や信仰を求めたのである。図形は辺の長さや面積で定められるから長さや面積がゼロである図形はその存在を許されるはずもなかった。

直線も図形であり，数を数えることは線分の長さを測定することである。数直線上の位置が数を表しその出発点は1であった。6世紀の頃，修道士ディオニュシウスはローマ教皇よりお祈りや復活祭の日付を定めるための暦(復活祭表)の作成を命じられた。しかし彼の頭の中にはゼロという数は存在していなかった。完成した暦は，キリストが生まれた年を紀元元年としその元年を1年とした。そしてその前年を紀元前元年とするが，0は存在しないためこれは紀元−1年になる。数直線上で1の前は−1であり0は抜けているということだ。こうして作られたのが現在広く使われている西暦による紀年法である。日本や米国の建物の階に0階がないのもゼロの概念がなかったころの名残である。ヨーロッパでは中世以降は0の存在が広まるとともに1階は地上階(Ground floor)と呼ばれるようになり，2階は1階，3階は2階というように1階ずつずらし階が改められた。すなわち地上階は0階である。しかし，暦の場合はすでに歴史の事実となっている年号を階段のように改めることは無理である。そのため0がない状態は放置されたままで現在に至っているのである。

ゼロの不在はミレニアム問題「21世紀はいつから始まるか」で大いに物議を醸した。

1996年，米国のワシントン・ポスト紙の記者は「キリストが生まれたのは紀元前4年の説が有力なのだから，生誕2000年は2001年ではなく今年(1996年)ではないか」という記事を掲載した。$2001-1=2000$ であるから同様に計算すると $1996-(-4)=2000$ 年になるというのがその理由である。しかし下の年表をみてみよう。1996年は2001年から5年遡る。同じように紀元元年から5年分さかのぼってみると紀元前五年になる。計算で求めたものより1年間のズレがでてしまうのだ。その原因は紀元0年がないこと，すなわち0の不在にある。紀元と紀元前を年がまたぐ場合は0年にあたる1年分が数直線上で消滅しているのである。



ところで，第三ミレニアム(千年紀)の21世紀は2001年の1月1日から始まるのはなぜだろうか。

キリストは，生まれた元年の翌年紀元2年の誕生日に1年が経過して1歳になる。紀元3年には2歳，紀元4年には3歳となるから，2000年には1999歳になる。したがって2001年に2000歳の生誕祭を迎えるということだ。では今日が7月3日とすると7月10日までの日数は何日あるかと聞かれたら，$10-3=7$，だから7日と答えるだろうか。指折り数えてみると，正解は8日である。

整数 b から整数 a を引いて得られる $b-a$ は数直線上では a を原点(0)としたときに，b の座標は何かということである。$[a \to b]$ で矢印前後の数から a を減じると $[0 \to b-a]$。これから $[1 \to 2001]$ は $[0 \to 2000]$ であり0を出発点として $1,2,3,4,\cdots,2000$ とカウントをしていることになる。実に巧妙に0が仕組まれている。これに対して $[3 \to 10]$ は矢印前後の数からそれぞれ2を減じて $[1 \to 8]$ とする。この場合は1を出発点として，$1,2,3,4,\cdots,8$ とカウントしている。ちなみに前者の引き算は和算では植木算として知られている。1と10の差は日にちと日にちの間の数，すなわち経過日数を数えているのである。

私達は節目の年には0がたくさんあった方がいいと思うようだ。10週年，50周年，100周年といった具合である。この場合，最初の年は0年であり翌年が1年目と考える。だから2010年が始まりならば10周年は2020年ということになる。しかし記念日までの年数はその最初の年も生活をしている訳だからそれを含めると11年間になっている。11年目は終わりの年であるとともに次の記念日までのカウントダウンを始める年でもある。
だからゼロは始まりであり終わりなのである。

1999年の12月31日は世界中のホテルやレストランは何年も前から予約で一杯になったという。2000年が節目の年で21世紀の始まりと考えた人達がたくさんいたのだ。もちろんそれは間違いであるがストップウォッチのリセットボタンを押して000とするように気持ちを新たにして年を迎えるということでは記念の年である。何かを成し遂げた業績を祝う年でもあり実際イベントも数多く開催されたので，2000年はミレニアムイヤーといわれるようになる。

翌年の2000年の大晦日は，千年紀(millennium)の締め括りの年であるからもちろんホテル・レストランは一杯になり，各地でミレニアムの新年を迎えるカウントダウンを行われた。

スリー，ツー，ワン，ゼロ。　ハッピー・ニューイヤー

心を一つにして声を揃えカウントダウンを唱える。ハッピー・ニューイヤーの掛け声とともに花火が打ち上げられ新世紀の幕開けを祝った。みんなゼロのカウントですべてをリセットして年の始めとした。そして気持ちを新たに1か

ら始めようとした。2001年の0時00分は，0と1のどちらもカウントアップの始まりなのである。ほんの一瞬意識の中にゼロが存在していたかと思うと次の瞬間には1に変わってしまう。歴史の長い間のゼロの不在は，人々の心の中に無であるけど実在する数を育てたようだ。

数学では放物線と直線の共有点の個数を問われたら，2,1,0個と答える。共有点はあるかと問われたら，共有点はあるまたは共有点はないと答える。ゼロの存在を肯定したり否定したりするのだ。

$n(A)=m$ である集合 A の部分集合の個数は 2^m である。この中には何もない集合も 1 つの集合(空集合)としてカウントしている。何もないのに1個あるのだ。空集合は ϕ と表し空集合の要素の個数は $n(\phi)=0$ である。何もないのにゼロは存在を主張する。

階乗計算では $3!=3\times2\times1=6$ であるが $0!=1$ と約束する。そうしなければ組み合わせの計算法則が崩れてしまうからである。組み合わせでは何も選ばないこと(${}_nC_0$)はすべてを選ぶ(${}_nC_n$)ことと同じである。

$a>0$ であるとき，$a^0=1$ である。$a=0$ のときはどうなるだろう。$\lim_{x\to+0} x^x=1$ であるから，極限としては $0^0=1$ である。何もないのに0は1を形作ってしまう。

デカルトは座標平面を考案し，ギリシャ以来の幾何学思想を代数的計算に作り変えてしまった。直交する二直線，x 軸，y 軸の交点にはゼロの組 $(0,0)$ である原点 O (オー)が鎮座した。$x=0, y=0, 2x+3y+4=0$ など方程式の中にゼロはその存在を主張している。ガウスは実数直線上のゼロの位置に虚数直線を立て，複素数平面を築き上げる。概念でしか存在しなかった虚空(sunya)の世界の入口にゼロは姿を現したのである。

ギリシャ人がゼロの存在を認めたくなかったのは，数の体系を壊してしまうからであった。他の数と異なりゼロたすゼロはゼロであり何も生み出さない。それどころかゼロにある数を乗じるとゼロになり無に還してしまう。ギリシャ数学は宇宙の創造を図ったがゼロはブラックホールのようにすべてを呑み込んでしまう。またインドから伝えられた記数法では数字の後ろに0をつけると元の数は，10倍，100倍，どんどん大きくなっていく。ゼロは実体がつかめない数であった。そしてゼロの形 0 は，「エロイムエッサイム，我は求め訴えたり」と唱え悪魔を呼び出す魔法陣を象る円形◯を想像させてしまう。何か得体の知れない魔法の匂いが漂うゼロをギリシャ人は恐れたのである。

しかしインドはゼロに寛容であった。空の概念はインド仏教でも教義の象徴となるものであり，空であることと無であることは違うものと考えた。器に水を注ぐとき水がないのは空であり器がないこととは違う。器そのものがないときが無なのである。数字0は器であり，その中に様々に変容する数ゼロ(Sunya)の概念が注ぎ込まれていったのだ。

9世紀インドの著名な数学者マハーヴィーラは「ある数に0を掛けると0である。0で割ったり，0を加えたり，0を引いたときは変わらない」と考えた。空の概念をもってしても0の除算は不可解なものであり，その振る舞いを捉えることはできなかったのである。12世紀に入るとバスカラ(1114~)は，$\dfrac{a}{0}$ の値について次のように述べている。

「それがいかに多く増加しようが，減少しようが，少しの変化も受けない」

少しの変化も受けない不変の数として彼は無限を示唆しており，それは神を連想するものでもあった。

こうしてゼロは始まりから終わりのない輪廻の果てまですべての時空，次元に存在する象徴の数となったのである。

★否定と反対

「賛成の反対なのだ!」。赤塚不二夫氏の漫画，天才バカボンのバカボンパパの口癖である。

賛成と反対が口上として述べられるから賛成，反対のどちらなのか混乱してしまい「どうでもいいのだ」と思わせてしまう。しかし結論は賛成の反対語(対義語)を言っているのだから，反対であるということだ。間接的ではあるが，曖昧な結論ではなく断固として反対である意思を貫いているわけで結局「それでいいのだ」ということになる。

同じように「反対の反対なのだ!」ともバカボンパパは口にする。これは反対の対義語だから賛成ということになる。

反対は逆向きと考えることもある。賛成は右向きならば反対は左向きになる。数直線では賛成を正の値とすると反対は負の値である。このことから，

反対の反対は賛成より，負数×負数＝正数

反対の賛成は反対より，負数×正数＝負数

賛成の賛成は賛成より，正数×正数＝正数

バカボンパパは子どもたちが苦手な負数掛け算の達人なのだ。

反対は数学的にいうと賛成である事象 A の余事象(補集合)である。「反対の反対」は A の補集合の補集合であるから，

$$\overline{\overline{A}}=A$$

すなわち賛成である。こう考えていいだろうか。

反対と混同される用語に否定がある。否定は命題の「~である」に対して「~でない」ことをいう。だから賛成の否定は「賛成ではない」でありそれをすべて「反対」と決めつけることは乱暴である。ある意見に賛成の人に挙手を求めた場合，手を挙げていない人がすべて反対というわけではない。どちらにしようかと決めかねて意思を保留する人だっているわけだ。白黒の二値論理でなければファジーな複数の結論は常に存在するのである。だから否定はそういった曖昧なものもひっくるめて「~でない」としている。命題 A に対してはその否定を表す事象が余事象(補集合)であ

るから「賛成の否定の否定が賛成」なのである。「賛成の反対の反対が賛成」と一見同じように思えるが，「賛成の反対は反対」であるが，「賛成の否定は賛成ではない」であり違いがでてくる。

反対とは，単語や言葉の対義語であるから，対応するのは元と同じ品詞になる。「大きい」の反対は「小さい」であり，「最大」の反対は「最小」である。否定は，その否定の対象となるものは形容詞，形容動詞，動詞，接続詞といった名詞以外になる。「大きい」の否定は「大きくない」，「最大」の否定は「最大ではない」である。ただ自然数は偶数か奇数のどちらかの数であるから，偶数の反対は奇数であり偶数の否定も奇数である。この場合は反対と否定は同じことになる。これらのことから否定の部分集合が反対ではないかと思える。例えば最大の否定は最大でないわけだから，最大を除いたすべての値であり，その中には最大の反対である最小も存在しているのである。倍数の反対は約数でありこれは倍数ではない数の集合に含まれる。乗算の反対は除算であり，否定である乗算でない演算に含まれるといった具合である。反対は両極に位置する概念であり，その間には何かしらを全事象とする様々な概念があると解釈すればいいのだろう。ところで賛否両論は賛成と反対の両方の意見がありどちらの意見も優劣のつかない状態をいうが，賛否という表現はどうなのだろう。賛成以外の意見が十把一絡げになっている。

否定の反対は肯定
否定の否定は否定しない
反対の否定は反対しない
反対の反対は賛成

バカボンパパなら小躍りして「これでいいのだ」ということだろう。

「集合と論理」の分野で，生徒は否定と反対を混同する。「$A>B$」の否定が反対の「$A<B$」になってしまう。「nは偶数である」の否定は「である」部分が否定されて「nは偶数でない」。しかし自然数は偶数と奇数のどちらかだから結局「nは奇数である」ということである。否定を「偶数」の反対の「奇数」のように考えると「nは３の倍数である」の否定は「nは３の約数である」としてしまうのだ。

幾つかの命題を組み合わせた命題の否定は分かりにくい。「pまたはq」，「pかつq」，「pならばq」のような命題を単純命題に対して複号命題という。特に「pならばq」は含意命題(implication proposition)という。

「pならばq」は「pでないかまたはqである」となぜか同値である。それを認めれば否定は「pでありかつqでない」ということになる。

具体的に命題「ダイエットするならば痩せる」で考えてみよう。もっとも，真偽が判断できるものが命題であるから，これが命題といえるかは疑わしい。願望として必ず達成できる真の命題とみなそう。

命題は「ダイエットをしないかまたは痩せる」ということになり，その否定は「ダイエットして，かつ痩せない」である。否定は何となく納得できるのではないだろうか。この否定をさらに否定してみると元の命題に戻る。

それは，「(ダイエットして，かつ痩せない)ということはない」であり「ダイエットするならば痩せる」の婉曲的な表現である。結局，バカボンパパの二重否定はここでも活きていて「それでいいのだ」となる。

さて日常生活における賛成と反対の捉え方はどうだろうか。意見に対しての賛成と反対は同じ重みがあり等価値のものである。「賛成」の反対が「反対」，「反対」の反対が「賛成」であり，基準をどちらにも置くことができる。

これに対して「賛成」を否定するということは，意見そのものを否定しまうことだ。極めて無感情に。論理はそういうものかも知れないが「あなたの意見を否定します」と言われたら割り切れないものはある。

肯定的はpositive，否定的はnegativeであるが，前者は積極的なプラス思考であり，後者は消極的なマイナス思考の意味合いが強い。感情が入ると明暗が分かれ対等性は失われてしまうのだ。

バカボンパパはいつも脳天気と思われる行動をしてばかりだが，感情に流されないということでは極めて論理的な人間なのである。

★数学的帰納法と数学的な帰納法

数学的帰納法は自然数に関する命題の証明法の１つであり数学ではよく用いられる。

哲学では帰納(induction)と演繹(deduction) という推論法が知られているが，ということは数学的帰納法は「数学における帰納法」ということだろうか。

帰納法は，イギリスの哲学者(神学者)フランシス・ベーコン(1561-1626)が提唱し，いくかの観察結果や事例から仮設をたてて一般的な法則を発見する操作法である。

演繹法は，フランスの哲学者(数学者)であるルネ・デカルト(1596-1650)などが提唱し，一般的な原理や規則から，論理だけを用いて他の結論を導く操作法である。

簡単にいうと，帰納は具体的・特殊なものから一般的なものへのボトムアップ・アプローチ，演繹は一般的なものから具体的・特殊なものへのトップダウン・アプローチということだろう。

演繹法は，古代ギリシャのソクラテスが考案した三段論法を体系化したものである。三段論法は，２つの命題である大前提，小前提から結論を得るもので例えば次のように操作する。

(大前提)超人は強い　⇒　(小前提)スーパーマンは超人　⇒　(結論)スーパーマンは強い

数学では，推移律「$A=B$, $B=C \Rightarrow A=C$ 」として

　　スーパーマンは超人である ⇒ 超人は強い ⇒ スーパーマンは強い

このように示すこともある。演繹で得られる結論は大前提からの必然なのである。

　これに対して帰納法は,

　　スーパーマンは空を飛ぶ，パーマンは空を飛ぶ，マイティ・ソーは空をとぶ　⇒　超人は空を飛ぶ

　このように幾つかの事例から結果を推測する操作法であるが，観測データが少なければ一般的な結論は推論でしかなく，正しいとは限らない。例えばスパイダーマンは空を飛べるかどうかは微妙だろう。ハルクにいたっては重いし腕力があるだけで空を飛ぶのは絶対無理。データ量が少なすぎると帰納から得られるものは偶然でしかなくなる。

　では数学的帰納法は必然，偶然どちらの立場にあるのだろうか。

　一般的に知られる数学的帰納法による証明の手順は次の通りである。

> 自然数nに関する命題$P(n)$について
> Ⅰ　$P(1)$は成立する
> Ⅱ 任意の自然数kに対し$P(k)$は成立していると仮定すると，$P(k+1)$は成立する
> このとき，すべての自然数nで命題$P(n)$は成立する。

　Ⅰは１つの事例の成立を表す。

　Ⅱは$P(k)$が正しければ$P(k+1)$が正しいことが示されることで，Ⅰより$P(1)$は成立しているから，$P(2)$の成立が示される。次に$P(2)$の成立に対して$P(3)$が成立し，以下ドミノ倒しが起こる。

$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \cdots$$

　次々と成立の連鎖が起きて複数回の事例の成立が確認できるのである。

　したがって，これらの事例からすべての自然数nに対しても$P(n)$の成立が推測できる。

　だから数学的帰納法は，この段階では言葉通り帰納法ということになるだろう。

　ただⅠⅡから得られるのは有限回の自然数の操作であろうか。

　イタリアの数学者ペアノ(1858-1932)は自然数の生成原理をモデル化しようと試みた。彼は論文「数の概念」(1891)の中で自然数を５つの条件からなる公理で規定した。

　　その５番めの条件は次の通り。

> 自然数全体の集合をＮとし，Ｎの任意の要素nに対して，$n+1$が定義されているとする。
> このとき，Ｎの部分集合をＭとすると，
> Ⅰ １はＭの要素である。
> Ⅱ nがＭの要素であるとき$n+1$はＭの要素である。
> 　ⅠⅡが満たされるとき，M=N である。

　この条件による自然数の生成法は，数学的帰納法と同じである。この５番めの条件を帰納法の公理という。

　なお数学的帰納法はド・モルガンが 1871 年に発表している。これはペアノが公理を規定するより前のことであり，公理の方がアトヅケされた形になる。この公理により連鎖は無限に繰り返され自然数が生成される。だから自然数に関する命題$P(n)$についても自然数全体で成立することになる。推測は必然に変わった。

　数学の三段論法は

　　　「A」と「A ならば B」⇒　「B」

として表すことがある。数学的帰納法はこの三段論法のルールに従っている。

　大前提「A」は「$P(n)$が成立する」ことであり結論「B」は「$P(n+1)$が成立する」である。小前提「$P(n)$が成立するならば$P(n+1)$が成立する」によりペアノの公理から無限連鎖が起こり自然数全体を補填後証明が完結する。

　これらのことから，数学的帰納法は演繹法なのである。推論の帰納的形式をとるが，公理が証明の成立を保証し演繹になる。数学的帰納法を完全帰納法とよぶことがある。

　ところが命題「A」,「B」の成立が不十分で連鎖「A ならば B」が空回りしてしまうと，数学的帰納法は帰納法に戻ってしまいとんでもない推測に至る。

　数学的帰納法を用いてA高校の生徒はみな同性(男子校，女子校)で，在籍数は僅かであることを証明してみよう。

　始めに生徒はすべて同性(性は１つ)であることを示す。生徒数をn人とする。

　$n=1$のときは，１人であるからもちろん性は１つである。

　$n=k$のとき，みな同性であると仮定しよう。このとき，$k+1$人の生徒を

　　　満くん，雅史くん，舞子サン，優子さん，敦子さん，………

とすると，満くんを除いた残りの生徒，雅史くん，舞子さん，優子さん，敦子さん，…の人数はk人であるから仮定によりみな同性である。次に雅史くんを除いた，満くん，舞子さん，優子さん，敦子さん，……もk人であるから同性である。これから，満くんと雅史くんは，舞子さん，優子さん，敦子さん，……と同じ性である。したがって，す

べての生徒は同性ということになる。この場合は満くんと雅史くんは女子である。たぶん。
次に，この高校の女子の生徒数は少数であることを示してみよう。
女子１人はもちろん少数である。
次に n 人の女子は少数であると仮定すると，１人加えた $n+1$ 人も少数であることには変わりはない。これから n 人は少数ということになる。
以上より，２つの命題は証明され，A 高校はひげ面の女子はいるかも知れないが少数間口の女子校であることが示された。証明のどこが不完全なのか分かるだろうか。
ガウスは，$f(n)=n^2+n+41$ なる奇妙な式を提示した。

$$f(1)=43,\ f(2)=47,\ f(3)=53,\ f(4)=61,\cdots\cdots,\ f(10)=151$$

すべて素数である。ひょっとしたら $f(n)$ は素数を生成する式ではないだろうか。もちろんこれは間違いである。

$$f(49)=49^2+49+49=49\times 51$$

$n=49$ で破綻する。帰納法による推測は反例が得られて終わるのである。
ゴールドバッハは６以上のすべての偶数は２つの奇素数の和で表すことができると予想した。

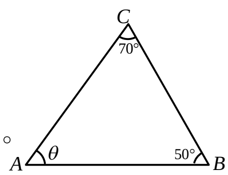
$$6=3+3,\ 8=3+5,\ 10=3+7,\ 12=5+7,\ \cdots$$

反例は見つかっていなく正しそうに思える。しかし証明はされていない。
数学の命題の成立は，推論に始まり反例が見つかれば帰納で終わる。反例がなければ公理を出発点にして論証し証明できれば演繹に変わる。フェルマーは自著の余白に

「$x^n+y^n=z^n$ $(n\geqq 3)$ を満たす自然数の組 (x,y,z) は存在しない」

と書き記した。その真偽を巡り 360 年の間，命題は帰納の川で漂うが近年ワイルズにより演繹的に証明され無事大海へと流れ込んだ。数学の結論はいつも演繹であり帰納は馴染まない。数学は推論から組み立てられる演繹体系の学問なのである。これに対して科学は，観察，実験を積み重ね発見し検証をしていく。検証もまた有限の連鎖であるから結局は帰納法である場合が多い。そしてあるとき全てを覆す反例や新たな一歩を示す発見が見つかることがある。
帰納と演繹は表裏，陰陽の関係にある。日が照ると影ができ，影があると日が照っている。数学は演繹体系の学問ではあるが，帰納的推論がそれを支えている。「数学的帰納法」は演繹法であり，「数学的な帰納法」は論理を支えている思考的部分が漏れでた帰納法である。

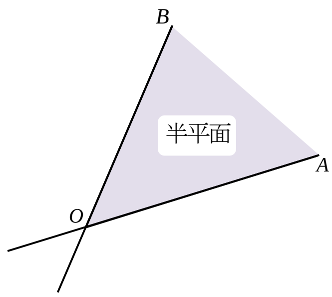
★角と角度



問い）右の三角形 ABC で次を求めよ。

(1) A　　(2) θ　　(3) $\angle CAB$

いずれも角に関する問題であるが，そもそも角とはなんだろう。
角は次のように定義する。
平面上では１つの直線により２つの部分に分かれ，境界線の直線を含めたものを半平面という。2 直線が交わるとき，それぞれの直線が作る半平面の共通部分を角と定める。



したがって角は平面上の図形であり，角 A は図形の名前を表している。辺 AB，三角形 ABC と同様の表現であり，三角形は３つの角の共通部分の図形ということになる。したがって三角形は辺だけでなく内部を含む。なお２つの半直線の集合を角ということもある。
そして角の大きさを角度という。角度は図形である角の表す量のことである。
そこで問題をもう一度見てみよう。
(1)の A は図形としては(頂)点であり，角を表すときは「角 A」あるいは記号を用いて「$\angle A$」とする(教科書は頂点を表すときはローマン体で A，角を表すときはイタリック体で A。このように区別していることを同僚より教えてもらった)。しかし「三角形を解く」ときは要素の角の大きさの意味になる。(2)は角度 θ である。三角比では方程式 $\cos\theta=1$ の解は「θ の値」のように表現することもある。(3)は図形の角であるが，$\angle CAB=60°$ のように角が角度の意味を兼ねている。
こうみていくと図形の角と量の角度は違うもののはずなのに都合のいいように読み替えられているようである。結局問いの答えはすべて $60°$ である。三角形の辺でもこれと同じようなことがいえる。辺はその両端の頂点を用いて AB のように表す。AB は辺であるが，$AB=c$ と書くと，辺の長さ c を表すことになる。あるいは両辺を結ぶ等号に「AB の長さは c である」という意味を持たせているのだろう。
「$c=5$」は「c の値は５である」。だが，「$c=5$ のとき，残りの辺と角の大きさを求めよ」と表現するとき，「大きさ」は「辺」と「角」の両方をいっているのだろうか。辺は「長さ」あるいは「値」とすべきとも思うが。
結局，三角形を解きやすいような式化をするために柔軟に言葉の定義が切り替わるのである。
まあ，だからこそ角をアングル(angle)をというのかもしれないが。

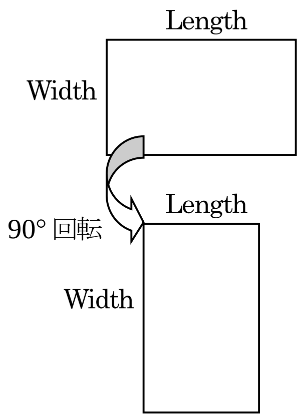
★「縦×横」と「横×縦」

長方形の面積は，「縦×横」で求められる。これを「横×縦」としたら間違いだろうか。たぶん，公式を問われたら「横×縦」と答える人は皆無かもしれない。私達の頭の中には公式「たてかけるよこ」が強烈にインプットされているからだ。「よこかけるたて」よりも語感がいいということもあるだろう。しかし結果として得られる数値はどちらも同じである。ある小学校ではテストで「横×縦」で計算したら減点されたとネット上で物議を醸したことがある。平成 13 年の教育課程審議会で京都大学の上野健爾先生はこのことに言及した。その指摘があってか平成 20 年の小学校学習指導要領では長方形の面積は,

(長方形の面積)=(縦)×(横)　(もしくは(横)×(縦))

括弧付きでどちらでもいいことが明記されるようになった。

掛け算の定義は，基準にした大きさ(掛けられる数)に対してそれが幾つあるか(掛ける数)ということでありそれが「縦×横」公式の根拠となっている。長方形の面積では，基準にする大きさは「縦に並んだ個数」であり，そのブロックが横に幾つ分あるかということになる。だから「縦×横」なのである。しかしそもそも縦や横はどう決められているのだろう。縦は垂直，上下，南北，横は水平，左右，東西といった方向を示す語である。縦横無尽の四字熟語がその意味をよく表している。しかし方向は視点で変わるものである。ノートに書かれた長方形は90° 回転させると縦と横は入れ替わる。縦a，横b は縦b，横a になるから交換法則が成立する。結局，掛け算は縦が先だろうと横が先だろうといいということになる。



英語では，縦と横に対応する言葉はそれぞれ Length，Width であり，フランス語では，longueur，largeur である。これらの用語は日本語の縦と横とはちょっと意味が違う。右図をみると分かるが，それぞれ長辺，短辺のことであり，長方形がどんな位置にあっても辺はその長短で区別する。したがって視点の影響を受けることはないのだ。縦横は言葉に柔軟な日本人ならではの用語なのである。

だから国際的な学問の「横のつながり」を考慮しグローバルな視点に立つと日本語の視点にこだわる必要はないのである。また，算数から数学への継続的な「縦のつながり」を考慮すれば，長方形の辺の長さは正の整数から実数値でも成立し縦×横は２辺の積となる。

結局，縦にも横にも，その順番は問題ではないのである。

★底辺と隣辺

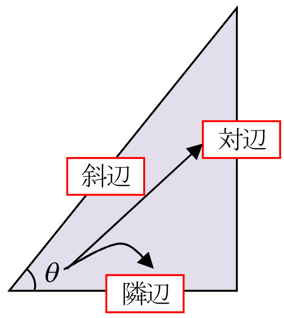
縦と横は方向を示すものであるが，長方形の面積公式の「縦×横」では長方形の２辺を表しさらにはその長さの意味も含めている。円周(の長さ)は直径×円周率で求められる。直径は円の中心を通る弦であるがこの場合は直径の長さとして考えている。ところが三角形の面積は

$$(\text{底辺})\times(\text{高さ})\times\frac{1}{2}$$

同じように考えるとちょっと妙である。底辺は辺の名称でありその長さであるが，高さは，大きさ，広さ，重さと同様の量であり辺としての意味はない。高さを線分とその長さとみることはできるだろうが三角形の要素ではないから違和感はある。また底辺という要素はそれがどの辺を指すのかというとどの辺であってもいい。底辺の対角である頂点から底辺またはその延長上に下ろした垂線の長さが高さということだろう。だから，三角形の面積公式は

$$(\text{高さ})\times(\text{底辺})\times\frac{1}{2}$$

とするとどの底辺に対する高さか分からなくなってしまう。長方形の縦と横とは異なり交換はできないのだ。なおフランス語では高さ(hauteur)は頂点から対辺に下ろした垂線の長さであり３本ある。垂心は「高さの交点」であり「中線の交点」である重心と同じく表現は簡潔である。では三角形の三辺はどのように呼べばいいだろう。何か基準の要素を設けて残りの要素を決めるのだが，ある辺を底辺と見ても高さは決まるがそれだけでは三角形の概形は定まらない。



ただ直角三角形は，１つの頂角により三角形は決定するからその頂角を基準にして各辺の定義ができる。頂角を挟む２つの辺のうち最大辺(斜辺)でない辺を隣辺とし，頂角の向かいの辺を対辺という。隣辺，対辺，斜辺から２つの辺を選びその比を考えると６通りの三角比が得られる。例えば，正接(タンジェント)は$\dfrac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$であるが，これを$\dfrac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$とはすべきではない。上述のように，すべての辺は底辺になり得るのだ。三角比は１つの角の大きさにより決まる直角三角形の辺の比で定義するがその根底が崩れてしまう。だから三角比では三角形の面積公式は底辺を用いない別の公式が用意されている。

さて直角三角形以外の三角形では辺の名称は曖昧であるが，二等辺三角形，正三角形，鋭角三角形，鈍角三角形のように形状が固定後に個々に辺の意味が決まる。まあ，でも三角形の辺は三辺しかないのだから大袈裟に考える必要もないのかもしれない。

★べき乗と累乗

べき乗とは幾つかの文字や数を掛け合わせること，または掛けあわせた積をいう。

累乗とは幾つかの文字や数を掛け合わせること，または掛けあわせた積をいう。

どちらの用語も同じ説明である。そう，べき乗と累乗は同意語である。では何故２つの用語があるのかというと，新旧の用語の違いである。累乗は古くは冪(べき)乗といわれていたが冪の漢字は画数も多く書くのも面倒。だから高木貞治先生は「解析概論」の中でもっぱら略字の巾を用いこれを世に広めた。べき(Power)は「覆う，被せる」といった意味もあり現代用語としてはしっくりこない古語の印象が強かった。次第に読み替えられて累乗(exponent)が使われるようになった。ただ，降べき，昇べき，方べき，べき根のような用語にまだその名残を残している。

べき乗は累乗への読み替えが完全ではなくまだ混在して使われている。だから２つがどう違うのかと迷ってしまう。

同じ例として「解と根」，「矩形と長方形」，「稜と辺」もそうである。

読み替えが成功して現在ではほとんど使われなくなった言葉もある。接線は切線，収束は収斂であった。定数は常数，関数は函数だが，こちらはまれに使われている。

長円は何を表すか分かるだろうか。楕円のことである。楕も面倒な漢字だし意味も分かりにくいこともあり長円に読み替えるよう進められたが結局失敗した。現在も今までどおり楕円が用いられている。

さて，べき乗，累乗と同じ意味の用語がもう一つある。指数である。

x を n 個掛けあわせるとき，この操作を累乗というが，その結果である x^n を累乗と呼ぶこともある。さらに，x^n は「x の n 乗」と読みその意味では x の肩に乗っている n 乗の部分が累乗を示す。この肩の数 n は指数と呼ばれ，x をその底という。n はべき指数(power exponent)ともいい，同じ意味をもつ２つの用語の合成語になっている。

ところがべき関数，指数関数になるとこの２つはまったく異なる関数を表している。

べき乗 n に対して，正の実数 x を底とする関数 $f(x)=x^n$ を冪関数という。

正の実数 a に対して，実数 x を指数とする関数 $f(x)=a^x$ を指数関数という。

べき乗，指数どちらも m^n の形であるが，値の変化を考えればなんとなく使い分けはできている。掛けあわせた個数であるべき乗は指数では実数値になり指数法則が成立するのである。

★指数と対数

対数は指数の逆の関係と考えられる。a の M 乗操作の結果が N であるとする。

$$a^M=N \qquad \cdots(*)$$

このとき N から元の数 M を得る関係を

$$\log_a N=M \qquad \cdots(**)$$

と表し，$\log_a N$ を a を底とする N の対数という。

これは演算で言えば加法に対する減法，乗法に対する除法のように逆の操作関係である。

ある数 a に b を加えたのち b を引く。ある数 a に b を掛けたのち b で割る。どちらもその結果は a に戻る。

同じようにある数 M に底 a のべき乗(指数)をしたのち対数をとると，

$$M \to a^M \to \log_a a^M=M$$

ある数 M に対数をとったのちにべき乗(指数)すると

$$M \to \log_a M \to a^{\log aM}=M$$

どちらも元の数 M に戻るのである。

しかし，指数の関係式(*)および対数の関係式(**)をよくみてみると，面白いことに気がつく。

(**)の式で対数 $\log_a N$ の値は M であるが，これは(*)の右辺 a^M の肩に乗っている数であるから M は指数ということにもなる。したがって(**)は，

対数＝指数

という関係を表している。指数と対数は同じことをいっているのだ。

これは英語の能動態と受動態の関係に例えると分かりやすい。

He likes her　(彼は彼女が好き)

She is liked by him　(彼女は彼に好かれている)

いっていることは同じだが主語と目的語が入れ替わることで，

he $\Leftrightarrow$ him　 she $\Leftrightarrow$ her

このように言葉が変わる。指数と対数の関係についても

対数 $\Leftrightarrow$ 指数

と見る方が適切であろう。

ところで，指数的増減は驚くべきスピードで数・量が変化し，10^p では $p<0$ のときはミクロになり $p>0$ のときは

マクロになり顕微鏡や望遠鏡の世界の数を覗きみることができるのである。そして対数はそういった天文学的数や微量数をフツーの身近な数に変えことができる魔法数である。だから指数と対数が同じものとはとても思えない。

その印象は指数の意味の思い違いから生じた誤解である。指数的に変化するのは指数ではない。指数の変化によりその累乗数が急激に増減するのである。ところが累乗は，同じ数(底)を幾つか掛けあわせた積の値を表すとともに，掛けあわす個数を表すこともある。後者の数を指数というわけだから，指数もまた掛けあわせた積の値を示すものと勘違いをしてしまう。だから指数的に変化するとしてしまうのだ。では累乗数的な変化にすればいいかというとそうではない。累乗はべき乗ともいうが，これはx^pのように底を変数とする関数である。$p=2$のときは二次関数の変化に過ぎないことになる(まあこれもある程度のスピードで変化はするが)。

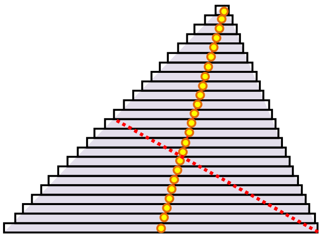
指数は数xが指数でその値の変化からa^xが得られこの関係を指数関数という。対数は数x(真数)の値の変化から対数$\log_a x$が得られこの関係を対数関数という。指数的変化は正確には「指数関数的」な急激な変化のことであり対数関数的な緩やかな変化がこれに対応する。

指数関数の定義域の値が指数であり，対数関数の値域の値が対数であるわけだから，逆関数を考えれば対数も指数も同じになるのは当然である。結局，用語の定義が汎用性があるためと用語の統一がとれなくなり曖昧になってしまったことが混乱の要因なのである。

★四角形の重心と四点の重心

図形が重力方向に釣り合う中心をアルキメデスは重心と命名した。

線分の重心はその中点である。



三角形は1つの辺に平行に図形を細くスライスしていくと，千切り状の短冊である線分を集めたものとみなすことができる。短冊の重心は中点より三角形の重心は頂点と対辺の中点を結ぶ線分(中線)上にある。別の辺でも同様に短冊を作ることで，中線の交点が三角形の重心である。

重心の位置はベクトルを用いると簡単に表すことができる。

三角形ABCの頂点の位置ベクトルを$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$とすると，重心$G(\vec{g})$は,

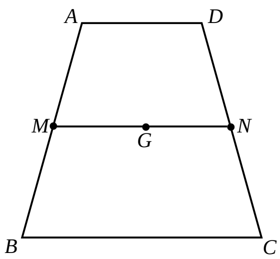
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

である。この式は，$\vec{g}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$とみると重心$G$は頂点$A,B,C$に同じ重みを加えたときの平均を表している。

では，四角形の重心の位置はどこにあるだろうか。

三角形の場合と同じように考え四角形$ABCD$の頂点A,B,C,Dの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$とすると，重心$G$の位置ベクトル$\vec{g}$は,

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$



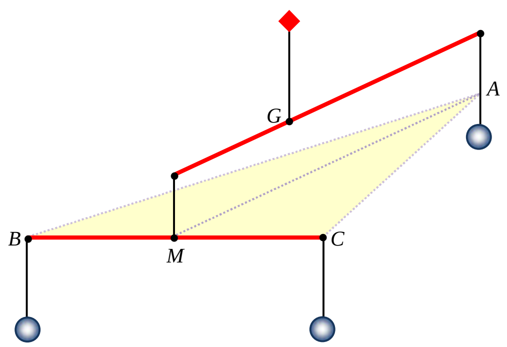
と予想する。正しそうに思えるがそうではない。

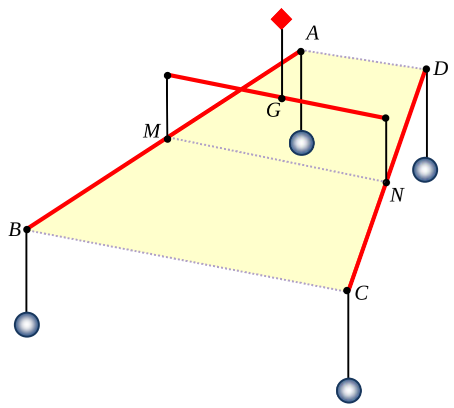
辺ABと辺CDの中点をそれぞれM,Nとすると,

$$\vec{g}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{2}$$

Gは線分MNの中点である。これが重心でないことは，図の等脚台形をGで支えると釣り合わないことは明らかである。

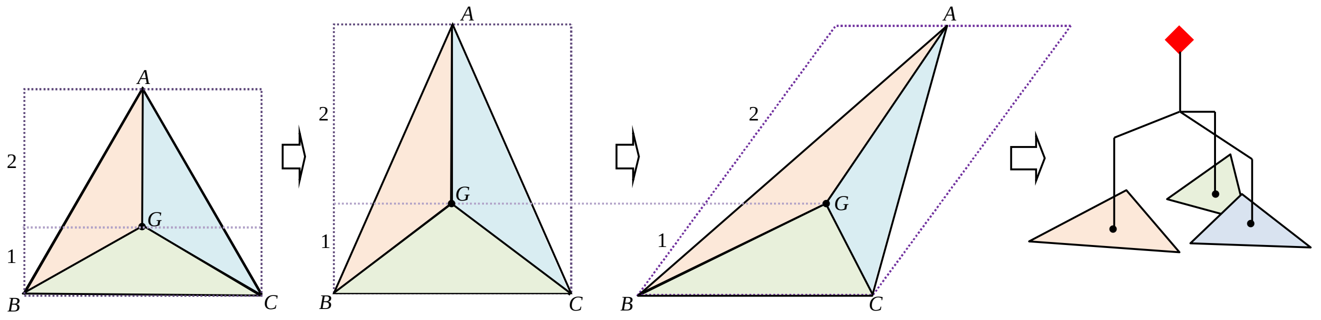
重心には物理的重心と幾何的重心がある。物理的重心とは，多角形の各頂点に同じ重さを乗せた(ぶら下げた)ときに，多角形全体が釣り合う点のことをいい力学的重心ともいう。下図のように辺を表す重さを無視できるストローの両端に同じ重さの球を紐で吊るしてみる。このような模型をモビールというが，そのときにバランスがとれる点が重心である。だから多角形の重心というよりは頂点の重心という方が適切だろう。そしてこの場合，四角形では先程の位置ベクトルで釣り合っている。



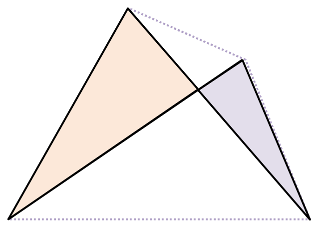


これに対して幾何的重心は，多角形を均質な厚紙で切り抜いたときに重力方向に釣り合う点をいう。これは厚紙の厚さを無視すると図形の重みは面積と考えることができるから，切り分けた図形の面積は等しくなるよう釣り合う点が重心である。等脚台形は線分 MN で２つに切り分けると面積は等しくはない。

正三角形は頂点から対辺に下ろした垂線を $2:1$ の比に分ける点で３つの等しい二等辺三角形に分割できるからこの点が重心である。正三角形を縦方向に伸縮し横方向にずらす(スケーリング)してもその比は変わらないから，三角形の幾何的重心は中線を $2:1$ の比に内分する点でありこれは物理的重心に一致している。



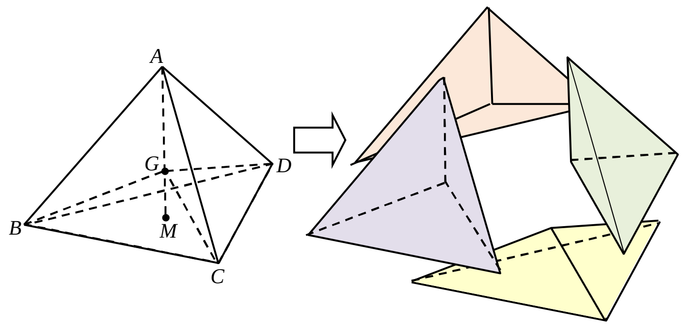
３点で作られる三角形は唯一である。これは足が３本の椅子を床にピッタリと固定されグラつかないことから分かる。だから幾何的重心と物理的重心は等しい。しかし４点で作られる四角形はそうではない。頂点の結び方で複数の図形ができる。４本足の椅子は床がでこぼこしていたり足の長さが不揃いであればグラつくのである。そのため４点の重心と幾何的重心は違ったものになる。



なお，４点を空間内の点とみれば，４点は唯一の四面体を形作る。この場合は物理的重心と幾何的重心は一致する。物理的重心の位置ベクトルから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\frac{3\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)}{3}\right)$$

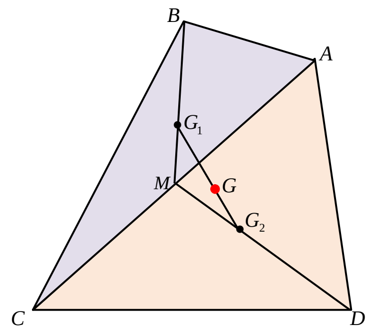
$M\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)$ とすると点 M は三角形 BCD の重心である。



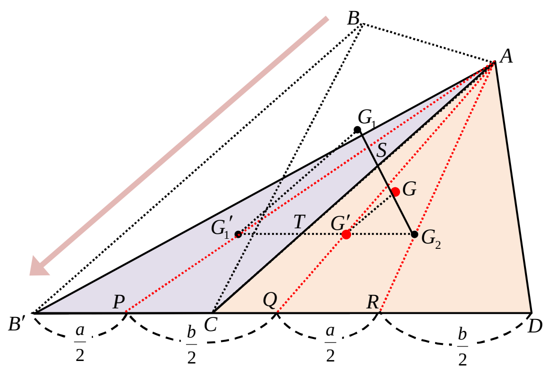
これから，$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OM}}{4}$ より，線分 AM を $3:1$ の比に内分する点が四面体の重心であり，この点で四面体を４つの四面体 $G-ABC,\ G-BCD,\ G-CDA,\ G-DAB$ に分割するとどの四面体の体積も等しくなる。

四角形の幾何的重心に話を戻そう。

四角形 $ABCD$ を対角線 AC により分割した三角形 ABC と三角形 ACD のそれぞれの重心を $G_1,\ G_2$ とする。２つの三角形をモビールで吊り下げると，線分 G_1G_2 上で釣り合う点が幾何的重心である。右図では２つの三角形の面積を考えると三角形 ACD の内部に重心がある。



ここで三角形 ABC の頂点 B を辺 AC に平行にスライドさせ，辺 DC の延長と交わる点を B' とする。ここで三角形 $AB'C$ の重心を G_1'，三角形 $AB'D$ の重心を G' とすると $G_1',\ G'$ はそれぞれ $G_1,\ G$ を辺 BC に平行にスライドした点である。このとき３点 $G_1',\ G',\ G_2$ は同一直線上にあり線分 $B'D$ に平行になっている。



$AG_1',\ AG',\ AG_2$ の延長と $B'D$ との交点をそれぞれ P,Q,R とすると，$AP,\ AQ,\ AR$ はそれぞれ三角形 $AB'C,\ AB'D,\ ACD$ の中線である。

$B'C=a,\ CD=b$ とすると，これから

$$B'P=PC=\frac{a}{2},\quad CR=RD=\frac{b}{2},\quad B'Q=QD=\frac{a+b}{2}$$

である。よって，

$$QR=QD-RD=\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a}{2}=PC$$

辺 AC が G_1G_2 と $G_1'G_2$ と交わる点をそれぞれ S,T とすると，

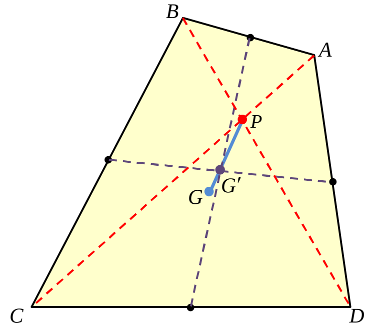
$$G_1S:GG_2=G_1'T:G'G_2=PC:QR=1:1$$

以上より，線分G_1G_2上に$G_1S = GG_2$となるようにとった点Gが四角形$ABCD$の重心である。

なお，四角形では物理的重心と幾何的重心の位置関係は次のようになっている。

四角形$ABCD$の対角線ACとBDの交点をPとする。また四角形の物理的重心をG'とする。このとき，四角形の幾何的重心Gの位置は，線分PG'を$4:1$の比に外分する点である(証明は，拙著レポート「四角形のへそ」参照)。

四角形を厚紙に書き模様を描いて切り抜く。そして四角形の幾何的重心に芯棒を挿すとコマが出来上がりクルッと回すと渦巻状に模様が広がっていく。あるいはもっと簡単に頂点のひとつを手に持ち回転するように空中に投げあげてみよう。重心を不動点として円盤が舞いパフォーマンスに重力方向の中心はみえてくる。



★背理法と対偶証明

命題が真であるときに命題が偽であると仮定すると論証のどこかに矛盾が生じるはずだ。このように矛盾を引き出しその原因を命題が偽であるとしたことに求める証明方法を背理法という。

対偶証明は，命題とその対偶の真偽は一致することから対偶の証明に読み替えてしまう証明法である。命題「PならばQである」のとき，対偶は命題の逆の裏であり「PでなければQでない」になる。

例えば命題「人間ならば動物である」の対偶は「動物でなければ人間でない」である。動物でない生物は人間のはずがないことは事実として明白である(倫理的にはどうか分からないが)。対偶は「動物でない」と仮定して「人間でない」こと，すなわち「人間である」ことの矛盾を引き出すことにほかならない。これは背理法の証明パターンである。ということは背理法と対偶証明は同じことを証明しているのではないかという疑問が生じる。

次の例で考えてみよう。

Ex) nは整数とする。次を証明せよ。 $3n+1$は奇数ならば，nは偶数である。

◯背理法による証明

nは偶数でない，すなわち奇数であると仮定する。

$n = 2k+1$（kは整数)

とおくと，$3n+1 = 3(2k+1)+1 = 2(3k+2)$

kは整数より，$3k+2$も整数であるから$3n+1$は2の倍数，すなわち偶数である。

これは$3n+1$が奇数であることに矛盾する。

よって，$3n+1$は偶数である。

◯対偶の証明

対偶「nは奇数ならば，$3n+1$は偶数である」を証明する。

nは奇数より，$n = 2k+1$（kは整数)

とおくと，$3n+1 = 3(2k+1)+1 = 2(3k+2)$

kは整数より，$3k+2$も整数であるから$3n+1$は2の倍数，すなわち偶数である。

この２つの証明を比較してみると，背理法で仮定から矛盾を導いている部分は対偶では直接結論を導いているだけの表現の違いである。背理法は「結論に辿り着き誤りに気付く」ことに対し，対偶は「結論に辿り着き納得する」ことであり，結論としては同じことをいっている。

ただここで問題にすべきことは，命題「$3n+1$は奇数ならば，nは偶数である」の否定を「$3n+1$は奇数ならば，nは奇数である」としていることである。

命題「pならばqである」は，2 つの単一命題「pである」,「qである」をそれぞれ仮定，結論として複合(合成)した命題であり，含意命題という。このとき命題「pである」を前件，命題「qである」を後件ともいう。

単一命題「pである」の否定は「pでない」であり単純であるが，含意命題の否定は少し込み入り複雑である。

命題「pならばqである」は命題「(pであり，かつqでない)ことはない」と同じとみる。「人間ならば動物である」は「(人間でありかつ動物でない)ことはない」とすると分かりやすいだろうか。これはもとの命題の二重否定であるから，命題の否定は「pであり，かつqでない」となる。

したがって命題「$3n+1$は奇数ならば，nは偶数である」の否定は

「$3n+1$は奇数であり，nは奇数である」

ということである。背理法による証明方針はこの否定命題の中に矛盾を引き出すことにある。

生じる幾つかの矛盾を拾いだしてみよう。

(A)「nは奇数である」とする

$3n+1=n+(2n+1)$

であるから，(奇数)＋(奇数)＝(偶数)より，$3n+1$は偶数となり，「$3n+1$が奇数である」ことに矛盾する。

(B)「$3n+1$は奇数である」とする

$n=(3n+1)-(2n+1)$

であるから，(奇数)－(奇数)＝(偶数)より，nは偶数となり，「nが奇数である」ことに矛盾する。

(C)「$3n+1$は奇数であり，nは奇数である」とする

2数の和は,

$(3n+1)+n=4n+1=2\cdot 2n+1$

であるから奇数であるが，これは奇数と奇数の和が偶数であることに矛盾する。

これらの３つの矛盾は命題の前件「$3n+1$は奇数である」と後件の否定「nは奇数である」に対し次のようにまとめることができる。

(A) 後件の否定から前件の矛盾

(B) 前件から後件の否定の矛盾

(C) 前件，後件の否定から数学的事実との矛盾

(A)の場合で前件の矛盾を前件の否定と考えたものが対偶の証明になるのである。

したがって，対偶証明は，背理法の矛盾導出のひとつと考えてもいいかもしれない。そのような見方をすると背理法は対偶証明として読み替えられ，その対偶を新たな命題としてさらに対偶を考える。それは元の命題に等しいわけだから，元の命題を直接証明することも可能なのである。

exの(B)の過程は,

$n=(3n+1)-(2n+1)$

としたところで(奇数)－(奇数)＝(偶数)となり，この時点で直接証明ができている。

背理法による証明として最も有名なものは単一命題

「$\sqrt{2}$は無理数」

の証明である。背理法での証明の骨子は，命題の否定は「$\sqrt{2}$は無理数でない」であるから有理数と仮定し,

$\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$　　(a,bは互いに素である正の整数)

とおき矛盾を引きだす。その矛盾は「aとbは互いに素である」ことに求めるが$\dfrac{b}{a}$は既約分数としなければならない理由については分かりにくい。しかし仮定から,

$2a^2=b^2$

を作り，両辺の数を素因数分解したときの因数 2 の指数の個数(パリティ)を調べてみる。左辺は奇数個，右辺は偶数個となることは明らかでこの時点で矛盾は生じており「互いに素である」である条件は不要になる。すなわち,

「a,bを正の整数とするとき，$\sqrt{2}$が無理数でないならば，$2a^2=b^2$となるa,bが存在する」

という複合命題を証明していることになりこれを対偶命題とみると，元の命題は,

「a,bを正の整数とするとき，すべてのa,bに対して$2a^2\neq b^2$ならば，$\sqrt{2}$は無理数である」

結局このことが証明できればよい。

ここで，$2a^2$とb^2が等しくないのは前述のようにそれぞれの因数2の指数の個数から明らかである。

このとき，両辺の平方根をとると，$\sqrt{2}a\neq b$より，$\sqrt{2}\neq\dfrac{b}{a}$。$\sqrt{2}$は有理数$\dfrac{b}{a}$で表されない数より無理数である。

このように，背理法から対偶証明を経由し元の命題を手繰り寄せると直接証明が可能になることもあるのだ。

背理法は紀元前3世紀に古代ギリシャの数学者ユークリッドが，自著「原論」の中で「素数は無数に存在する」ことを証明するために初めて用いている。背理法は 2000 年以上の長い歴史をもつ証明法の一つである。同じ頃，ギリシャにはソフィストと呼ばれる弁論家・教育家達が台頭する。彼らの論法には，相手のいっていることを一旦肯定しその矛盾点を突いて間違いであることを誘導する方法がありこれを弁証的背理法と言う。この論法は長けた話術により相手をやり込める訳だから相手にとっては心証宜しからずのためソフィストは詭弁家と揶揄されることがある。

哲学者であるエレア派のゼノンは，背理法を用いて「矢は静止している」ことを示したことはよく知られている。

「矢が飛ぶと仮定する。飛ぶことを運動とすると，運動しているそれぞれの瞬間に矢はそれぞれの位置にある。その瞬間の位置はみな違っておりその位置では矢は静止している。すなわちそれぞれの瞬間で矢はみな静止しているが，静止しているものをいくら足しても静止している状態に変わらない。したがって矢は運動していないということになるから矢は飛ばない」

「静止する矢」,「アキレスは亀に追いつけない」といった弁証的の問題はゼノンの逆理(パラドックス)と言われている。このような何となく騙されているような印象を与えることは数学の論理性(というかそれを用いる人の論理感覚)と馴染まないものがあり，背理法は「本当にそれでいいの」という「？」が付きまといあまり好まれ

る証明法とはいえないのである。ちなみに米国のノース・カロライナ大学グリーズボロ校のサイダック氏は，素数の無限性についても簡単な推論で直接証明できることを示している。

「あなたは私ともう付き合いたくないっていうけど，でも私のことは嫌いではないっていったでしょ。
それは好きってことではないの。矛盾しているわよ。」

嫌いの否定は好きではないが，親密であった２人の間では嫌いも好き，好きも嫌いであるかも知れない。このように情念の世界では疑心暗鬼の衣「？」をまとい，背理法はいたるところに飛び交っているようである。

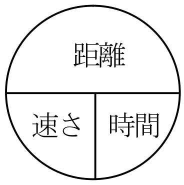
★平均の速度と速度の平均

S 君は，G 高校へ歩いて通学している。登校は足取り重く分速$60(m)$，下校は足取り軽く分速$90(m)$である。登校，下校どちらも通学経路は同じであるとき，登下校の S 君の平均速度を求めると，

$$\frac{90+60}{2}=75$$

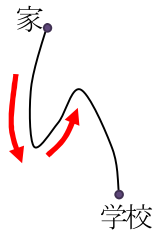
すなわち分速$75(m)$。これは正しいだろうか。

まず速度とは何か確認してみよう。



$$速度=\frac{距離}{時間}$$

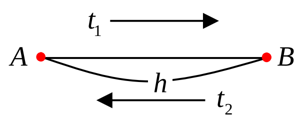
速度，時間，距離を移項すると相互の関係が得られ，「は・じ・き」，「樹の下ではしゃぐジジィ」，「きのしたはじめ」などの語呂合わせで覚えていることだろう。速度は経過した時間に対する移動した距離の割合であるが，家から学校までは平坦な道ばかりでなく，◯◯の坂と呼ばれるキツイ勾配の箇所もある。場所によって速度は違うわけで，登校の速度はそれらの一様でない速度を平均したものになる。そうすると大きく回り道をしている箇所では学校ではなく家に向かっている場合もあり，逆向きに戻ることになりその速度はマイナスである。さらに，最終的には S 君は家をでて家に戻る訳だから移動した距離は 0 である。だから平均速度は分速 0m。もちろんそんなはずはない。そういったことまで考えていくと面倒なことになりそうなので，視線のある向きに動いている場合は正の向きとしてしまおう。ではそのとき先ほど計算した分速 75(m)は正しいだろうか。残念ながら違う。



A 点を家，B 点を学校とするとき，速度は時間に対する距離の割合だから，この場合は A→B→A の移動に要した時間に対して総距離の割合である。

登校，下校どちらも通学経路は同じだから AB 間の距離を h m としよう。A→B，B→A の移動に要した時間をそれぞれt_1, t_2とすると，「は・じ・き」の公式より，

$$t_1=\frac{h}{60},\quad t_2=\frac{h}{90}$$



であり，t_1+t_2が登下校に要した時間である。したがって平均速度vは，

$$v=\frac{2h}{t_1+t_2}=\frac{2h}{\frac{h}{60}+\frac{h}{90}}=\frac{2\times60\times90}{60+90}=72$$

すなわち，分速 72(m)が平均速度である。

では，最初に計算した速度は何かということになる。

これは，例えば，S 君はある日の登校の速度は分速 60(m)であったが翌日は遠足だったので分速 90(m)で登校した。このとき，2 つの「速度の平均」を求めると分速 75(m)になる。このような平均を相加平均という。

これに対して S 君の登下校の平均速度は，次のようにみることができる。

登下校の速度の逆数$\frac{1}{60}$，$\frac{1}{90}$に対してこの 2 数の相加平均を求め，さらにその逆数をとる。

$$\frac{\frac{1}{60}+\frac{1}{90}}{2}=\frac{60+90}{2\times60\times90}\quad\Rightarrow\quad\frac{2\times60\times90}{60+90}=72$$

2 数の逆数に対してその相加平均の値の逆数で得られる平均を 2 数の調和平均という。

以上より，「速度の平均」は 2 つの速度の相加平均，「平均の速度」は 2 つの速度の調和平均ということである。

★速度と速さ

「は・じ・き」の「は」は「速さ」のことであるが，「速さ」と「速度」の違いは何だろう。

速度は人の視線を基準にすると常に前方に進み正の値であるが，例えば数直線上で原点を基準として右向きを正にすると，右向きと左向きではその速度は違ったものである。速度(velocity)は，大きさだけでなく向きをもつ量(vector)のことをいい，これに対して速さ(speed)は，速度の大きさだけを取り出した量(scalar)のことをいう。

P が，t_1 からt_2 までに要した時間を$\Delta t=t_2-t_1$ とすると，Δt はスカラーとして定まるが，そのときの変位(距離に

対応する量)はベクトルである。P が点 $A(\vec{r_1})$ から点 $B(\vec{r_2})$ まで進むとき，変位は $\Delta\vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$ であり，速度 $\vec{v}$ は,

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

で与えられる。そして速さは速度の大きさ $|\vec{v}|$ である。

例えば，北の向きに時速 60km の速さで進む自動車がある。この自動車の東の向きの速さは 0 である。では東の向きの速度を問われたら 0 とするのは間違いである。正解は $\vec{0}$ である。

しかし, 速度と速さは同一視されることも多い。点 P が A から B, そして B から A を移動したとき, 変位は $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ であるから，速度は $\vec{0}$ であり速さは 0 になる。車で AB 間を往復するときの速さは常に 0 としてしまうのは現実的ではない。このような場合は，人の目を基準にして，その視線の先にある向きを正の向きと考えて総距離を変位として速度を求めるべきだろう。このとき速度は速さに等しいのである。他にも回線速度, 速度制限はそれぞれ回線の速さ, 速さの制限である。また台風の速さは台風の速度である。このように同じように扱われるが速度を速さとみなすことの方が多いようだ。速さは速度の大きさであるから速度の 1 つの量であるが，速度は速さの度合いと考えて，大きさの変化とみてしまうからなのだろう。そして「速さ」は対義語の「遅さ」を含んでいるものだし，世の中は「せかせか」よりは「ノンビリ」したスロー(slow)な生き方が好まれる時代。誰もが変位は望まずゆったり過ごしたいと思っている。

★変化率と微分係数

高校の教科書で微分の説明は，まず理科で習った速さ，速度を「平均の速さ」,「平均速度」と再定義しそこから「瞬間の速さ」を考える。

次にこれを一般の関数 $y=f(x)$ で考え，x の値が a から b まで変化するときの $f(x)$ の変化量 $f(b)-f(a)$ の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を「平均変化率」と表す。さらに b を a に限りなく近づけたときの $x=a$ における瞬間的な変化率を考える。ここで $h=b-a$ と置くと，h を限りなく 0 に近づけることと同じことであるから,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となる。この値を $f'(a)$ で表し，$x=a$ における微分係数または変化率という。微分係数は関数 $f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きを表す。

次に微分係数 $f'(a)$ を a を変数とする関数とみると,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数といい，導関数を求めることを微分するという。

また，x の変化量である h を x の増分 Δx，$f(x)$ の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を y の増分 Δy と表すことで，導関数は

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

このように表現できる。

そして導関数を表す記号としては $f'(x)$ の他に，y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ が用いられることが示される。

ここまでの微分の一連の指導は微分積分の歴史の流れの一部を凝縮したものである。この 10 ページにも満たないページには 2 人の数学者の長い年月に渡る喜びと苦悩が語られている。

その数学者とは，ニュートンとライプニッツである。

アイザック・ニュートンは「科学の父」といわれたガリレオ・ガリレイが亡くなった 1642 年のクリスマスの日，ケンブリッジ北方 80km ほどのリンカシャー郡ウェールズソープ村で生まれる。

ニュートンといえば万有引力の発見が有名である。夕方, 林檎の木の根元で瞑想しているとポトリの林檎が落ちた。どこから落ちたかと見上げる。樹々の間の夜空には銀色の光を湛えた月がぽっかり浮かんでいる。ふと彼は林檎の実が落ちたり，月が周ったりするのにはどんな力が働いているのだろうかと考える。そして彼は引力の存在を知った。これは彼の友人であった詩人ボォルテールが広めたと言われる逸話である。しかし静寂に包まれた木立の中，林檎の木を眺め瞑想に耽っていたことは十分考えられることなのである。

1665 年，ロンドンではペストが流行しおよそ 7 万人の死者が出たという。ケンブリッジ大学の学生であったニュートンは大学が閉鎖されたためやむを得ず故郷へ避難することになる。そして故郷での 1665 年から 1667 年の 20 ヶ月程の間でニュートンは，林檎の木を眺めながら「万有引力の発見」,「光学分野における色の理論や反射望遠鏡の研究」(「光学」と略す),「微分積分学」という 3 大発明の基礎を築くのである。この期間はニュートンの「脅威の年」

といわれている。
　ニュートンは著書「光学」の付録「曲線の求積」において，運動による問題解決の8つの命題を掲げ，その中で点や直線の運動は普遍的な時間の流れとともに変化すると考えた。その運動や増加により生じる量(流量)と名付け，運動や増加の変化の速度を流率(fluxion)とよんだ。そして流率を表すためにドット記号を考案するのである。
　質点のえがく道が与えられているとき点は時間の関数である。時刻 t_0 のときに点A，時刻 t のときに点Bにあるとする。原点からそれぞれの点までの道程を時間の関数 $s(t_0)$，$s(t)$ とすると，AからBまでの平均速度は $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ である。t が t_0 に限りなく近づいたとき，速度の極限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

を彼は「究極の比」といい，これを流率と名づけてドット記号を用いて $\dot{s}(t_0)$ と表したのである。
　また，運動量が方程式 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ として表されるとき，この式から，

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+a(\dot{x}y+x\dot{y})-3y^2\dot{y}=0$$

を導き，究極の比 $\dot{x}:\dot{y}$ を求めることで無限小の概念を数値化し微分の考えを示した。
　しかし，これらの発見をニュートンはごく身近な人には話したが世間に公表することを渋った。ニュートンの秘密主義はフック(弾性の性質であるフックの法則の発見者)を相手にした重力研究(重力が距離の2乗に反比例する)の剽窃騒ぎ等の確執により世俗に煩わされたくないという気持ちもあったようだ。「光学」が出版されたのは，1704年であり，脅威の年のアイデアから40年ほど後のことなのである。
　ゴットフリート・ライプニッツは，ニュートン誕生の4年後の1646年にドイツのライプチヒで生まれる。哲学，数学，法学など多方面で活躍し「万能の天才」と呼ばれた。ライプニッツは当時，既に名声を得ていたニュートンを尊敬しており，数学に関する興味からニュートンに手紙を出し，質問した。しかしニュートンは微分積分の分野に関しては，暗号を用いて応えたといわれる。そこでライプニッツはその疑問を独自に解決し微積分の概念を確立してしまう。これが後に英独の微積分剽窃論争の発端になるのである。
　ライプニッツは1684年に発表した論文「極大と極小および接線のための新しい方法」の中で微分の概念を導入する。ニュートンの脅威の年から20年ほど後であり，そしてこの発表の20年後にニュートンは「光学」を発表する。
　ライプニッツは無限級数 $\left\{\dfrac{2}{r(r+1)}\right\}$ の和を求める過程で，数列の総和の演算と数列の差を求める演算は逆の関係ではないか考え和と差からそれぞれ積分と微分を定義した。微分(differentia)の用語はここから生まれたものである。彼は点 $P(x,y)$ に非常に近い点を $P(x+\delta x,\ y+\delta y)$ とするとき，無限小量である δx と δy の比 $\delta y:\delta x$ の極限値を $\dfrac{dy}{dx}$ と表し，これは点 P における接線の傾きであることを示した。そして逆接線の方法として積分として $\int f(x)dx$ を考えるのである。ライプニッツの微分積分の考察はニュートンに比べて深いものではないが，記号抽象化に関しては非常に優れたものがあり，dx, dy そして $\int f(x)dx$ という記号はすべて彼が考案したものである。
　ニュートンは物理学の問題として運動の微分方程式から微分を考えたのに対して，ライプニッツは数学の問題として級数の和や差から微分・積分を考察している。無限小解析のアプローチではニュートンとライプニッツは共通しているが，それ以外は数学，物理学を観点とする別の概念として微分積分に到達したものである。
　しかしこの偉大な業績は，ニュートンの発表嫌いやフックとの剽窃騒ぎ，前後する両者の発表時期などいろいろな問題が絡み，両者の友人・支援者は相手を剽窃者と激しく罵り攻撃し，国同士の争いにまで発展してしまうのである。そして互いに尊敬しあっていた両者の関係も次第に修復出来ない程にこじれてしまう。
　D主義(dx, dy のD)と呼ばれたライプニッツの記号を用いる一派は，ニュートンの考案したドット記号を用いるドット世代(Dot-age)を，Dotage(老いぼれ)と揶揄し笑いものにした。確かにニュートンの考案した記号はニュートンレベルの高い学識の数学者を除いては一般には使いやすいものとはいえない。その結果ドット世代であったイギリスはニュートンの巨大な影に隠れてしまい微分積分学を発展させることができずにこの分野では大打撃を被る。19世紀に入りイギリスのド・モルガンがニュートンとライプニッツは独自に微積分を考案したという調査・研究を発表するまで暗黒の時代は続くのである。
　ところで，ニュートンとライプニッツが活躍した17世紀は「天才の世紀」と呼ばれているが，日本でも一人の天才が産声を上げている。その名は関孝和，和算の権威である。生年の寛永19年は西暦では1642年でありニュートンと同じである。しかしこれは歴史の嘘であり生年は1640年以降であることしか分からなかったので東西の算聖が同じ年に生まれていたら…ということでいつの間にかそうなってしまったようである。関の和算での発見はニュートンやライプニッツのものとは比較はできないが，円や球の研究である円理の中で円の面積，球の体積を求めるための級数計算に微積の萌芽をみることはできその研究は後継者である建部賢弘等に引き継がれていく。

高校の微分積分の導入の流れをもう一度みてみよう。

まず，点の運動を具体例として平均速度，瞬間速度を示し，一般的な平均変化率，変化率として表す。この発想はニュートンの流率のアプローチである。ニュートンは変化率を$\dot{x}$ドット方式で表現したが，教科書ではy'(prime と読む)，$f'(x)$といったドットと同じような記法が用いられる。しかしどの変数に関する微分なのかは分かりにくく，積分のときに用いるdxへの移行を考慮し，記号 prime は$\dfrac{dy}{dx}$さらに$\dfrac{d}{dx}y$となり$\dfrac{d}{dx}$が「xで微分する」という意味の記号に変わる。これはライプニッツの微分積分のアプローチである。このように教科書ではニュートンとライプニッツの双方を立てて微積の流れが記述されているのである。

なお，prime の記法は 18 世紀のフランスの数学者ラグランジュが考案したものである。ラグランジュの研究はニュートンの研究に非常に近いものであったためこのような記法になったと思われるが，ラグランジュはライプニッツも偉大な数学者として認めており，二人の微積の研究の前提である無限小の壁を打ち崩し微積分を確立した。彼は

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

であることを著書に記載している。ニュートンとライプニッツは微分記号で死後，初めて握手を交わしたのである。

なお，点$(x, f(x))$を原点とする座標系$dx-dy$で考えると，その正比例関数$dy=mdx$をもとの関数$y=f(x)$の微分係数とみることができる。導関数は$m=f'(x)$であるから，$dy=f'(x)dx$となる。この両辺をdxで割ると導関数は,

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

導関数はdyとdxの商(微分商)として表現できる。

もしニュートンが出版嫌いでなかったら…，秘密主義でなかったら…，２人が支援者の甘言にそそのかされなかったら…，２人がお互いの研究を理解していたら…。微分積分学の確立は１世紀以上早まり，和算にも大きな影響を与えていたことだろう。

いつの世でも無責任で自分勝手な言動は純粋数学・科学の進歩を著しく阻害してしまうのである。

★比と割り算

量bに対する量aの割合をaとbの比といい$a:b$と表す。a,bをそれぞれ前項，後項といい，比は後項の量bを基本単位としたときの前項の量aの割合である。このとき$\dfrac{a}{b}$を比の値という。

ところで，比の値$\dfrac{a}{b}$は除算$a\div b$の結果でもあるから，比$a:b$と除算$a\div b$は同じことではないだろうか。

比の記号 : はドイツで考案され 17 世紀の数学者ライプニッツはこれを用いていた。

除算の記号÷は，元々，ヨーロッパでは違った意味の記号として使われていたが，スイスの数学者ヨハン・ハインリッヒ・ラーンが 1659 年，著書「Teutsche Algebra」の中で除法として用いた。その後ニュートンやウォリスが使うようになってから広まり一般に使われるようになった。記号÷は分数の分子と分母を点(・)で表し，それを横線(基線)－で分けた形をイメージしている。

ところで，ニュートンとライプニッツは同時代の数学者であるから，記号化の天才と言われたライプニッツはもちろん記号÷については知っていた。しかし，$6:3=\dfrac{6}{3}=2$のように書いても何も問題がないので，ライプニッツは比と除法を同じものとして扱っている。乗算×についても文字 x と混同することから彼は・を使っていた。ライプニッツが÷を使わなかった表向きの理由はこのようなものであるがニュートンとライプニッツの微積分の剽窃論争の件を考えるとニュートンに対する対抗心もあっただろうと推測できる。なお，現在でもライプニッツの考えは継承されドイツやその隣のスイス(記号÷の考案者ラーンの母国)等のヨーロッパ圏の国は「比＝比の値＝除算」としている。

一方，英国で用いられた記号÷は海を渡り米国に広まりさらに海を渡り日本に伝わるのである。ニュートンとライプニッツの確執がなかったら÷という記号は歴史上消えていたかも知れない。

ただ，日本では算数で用いられる割り算は，次第に使用頻度が少なくなり高校では分数，逆数の掛け算として処理し÷は使われなくなっていく。また割り算は，$6/3=2$のようにスラッシュを用いる国(オランダ，スウェーデン，カナダ等)が多く，記号÷は／に置き換わっている。記号÷は万国共通の数学語ではなく少数派になってきている。

このように，歴史的には比と比の値，そして除算は同じことを示すという結論になっている。しかし，$a\div b$の結果が割り切れるのではなく余りがある場合はどうなるだろう。

例えば 15 を 6 で割るときは，比の計算では,

$$15:6=2R3$$

となる。Rの右は余りを表す。ここで，$15:6=5:2$とすると,

$$5:2=2R1$$

余りは違ってくる。割り算(division)の商は，割られる数から割る数を何回引けるかということである。すなわち割

る数を分割(division)できる個数であり残ったものが余りになる。$15 \div 6$ は，15 から 6 を 2 つ分引き残りが 3，$5 \div 2$ は 5 から 2 を 2 つ分引き残りが 1 ということである。基本が異なれば余りは異なるのは当然である。だから余りも基本量に対する割合と見るべきであり，6 に対する 3，2 に対する 1 はどちらも $\frac{1}{2}$ で同じになる。すなわち，

$$15:6 = 5:2 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

仮分数を帯分数として表すと問題はない。

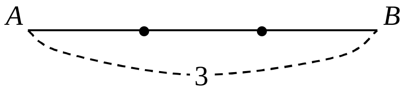
比は後項を基本量とする割合であり，$4:6$ と $2:3$ の比の値はどちらも $\frac{2}{3}$ である。しかし後項の基本単位は異なっているから比の意味としては違う。林檎を分けるとき，3 個から 2 個貰うのと 6 個から 4 個貰うことは違うということだ。本来，「等号＝」は，左辺と右辺が等価のもので釣りあっている状態を示すものだが，$4:6 = 2:3$ を認めたことで，「比が等しい」とは「比の値が等しい」ことに読み替えられ，割合の関係式である比と比の値である分数は等価でないのに等しくなり，それが不思議な関係，$2:3 = \frac{2}{3}$ の根拠になっている。

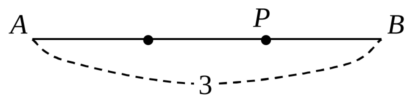
ちなみに英語では，$\frac{2}{3}$ は $two-thirds$ と読み，分子 2 は基数で表され分母 3 は序数で表される。分子はものの数量を表す数詞，分母はものの順序を表す数詞であり，これは比の前項と後項に対応している。記号÷を採用している英国や米国でも分数は比として扱っているということになる。$\frac{1}{2}$ を $a\ half$ と表現するのはいい例である。

しかし日本では，$\frac{2}{3}$ は「3 分の 2」と読む場合と，有理数 $\frac{2}{3}$ と読む場合は意味が異なる。昔の算数の指導ではこれは厳密に区別し，「3 分の 2」の形の分数を割合分数，$\frac{2}{3}$ の形の分数を量分数と呼んでいた。

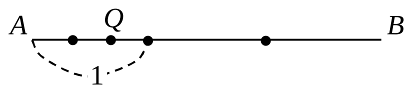
次の問いの答えはどうなるだろう。

Ex）下図の線分 AB に対して $\frac{2}{3}$ を表す点はどこか





答えを点 P とすると，これは割合分数である。$AB = 3$ であるから $\frac{2}{3} = 2:3$ より，AB を基本量としたときの 2 の割合を示している。すなわち分数を比としてみていることになる。



答えを点 Q とすると，これは量分数である。数直線上の長さであり必ずしも点 A からその長さをとる必要はない。すなわち分数を数としてみていることになる。

$2:3 = \frac{2}{3}$ は「比＝比の値＝除算」を示すが，比と除算は中辺である比の値を経由して等価のものに変換されているのである。そしてこの変換は基本量も変えている。比はその後項を基本量として比の値で表されるが，除算の結果は数値として分数で表され，そのときの基本量は 1 である。だから問いのように分数の捉え方によって点の位置が異なるのである。

なお，線分 AB の分点とみると $\frac{m}{n} = m:n$ のときはその基本量は $m+n$ である。$2:3$ に内分するのであれば基本量は $2+3=5$ であり，その位置は右図の点 R である。外分するのであれば，$-2:3$ とみて基本量は $-2+3=1$ とする。基本量は正であり，$2:-3$ となるような分点は考えることはできない。

このように，比はその基本量を何にするかにより複数の意味をもつものであり日本の数学教育はその観点で指導し，学ぶ。分数は小数としても表現でき，尺貫法では分，厘，毛，糸，忽，微，…，空，清，浄のように小数点以下の桁にも名称がある。それぞれ小数第 1 位，第 2 位，…，第 23 位を表している。分数を小数にすると無限小数になることが多いのであまり好まれず比としてみる方がスッキリしている。これほど小さい数に拘る民族は日本人以外にはないだろう。九分九厘，腹八分目，盗人にも三分の理，浮世三分五厘…，これらのことわざは，比の値を表すものでありその基本量は 10 である。これは十分であることに対する比ということだろうか。

このように日本人は古来より比によく馴染み，割り算の余りさえもさらに細かく分けて表現してきた。それが物事に対する厳密さ・精確さという特性を育ててきたのではと思う。

でも，最近の生徒は比の理解がいまいちであり，割り切れない気持ちになるのである。

★A＝BとB＝A

等号＝で両辺を結んだ式を等式という。2 つの量 A,B を天秤秤に載せたとき，釣り合っている状態を表す記号が等号であり，それ以外は不等号である。等式には，どんな値に対しても成立する恒等式と特定の値に対して成立する方程式がある。

例えば乗法公式 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ は x の恒等式である。一般に式の変形で結ばれる等式は恒等式であり，変数 x に任意の値を代入しても成立する。しかし乗法公式を間違えて $x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$ としてしまうと恒等式ではなくなり，等式は幾つかの値でのみ成立する方程式になる。この場合の x の値は $x=-1,\ 0$ だけである。

また，等式には交換法則(対称律)が成り立ち， $A=B$ は $B=A$ である。

では， $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ のとき， $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ は成立するだろうか。

考えすぎないで欲しい。もちろん成立する。ただし， $\sqrt{a}$ は正数 a の正の平方根と定義することが条件である。

それを， $a=b=-1$ としてしまい， $\sqrt{-1}=i$ とみなすと，

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=i^2=-1$

$\sqrt{ab}=\sqrt{(-1)\times(-1)}=1$

$-1=1$ なる妙な結果になり，平方根の性質そのものが崩れてしまう。

平方根の性質の等式は条件付きの恒等式であり条件がなければ方程式になる。

この場合の条件は，根号内>0 であり(根号内=0 でも成立するが除いている),

$a>0$， $b>0$， $ab>0$

であるが， $ab>0$ は， $a>0$ および $b>0$ から導かれるので

$a>0,\ b>0$

としてよい。

このように，等式とは天秤秤に 2 つの量 A,B が乗っているときの釣り合いの状態である。片方の秤に A を乗せた後にもう片方に B を乗せてその結果として釣り合うことではない。

等式を変形するということは，推移律

$A=B$， $B=C$ ならば $A=C$

を用い，等価のものを組み合わせる操作を示している。

しかし，ある式を変形するとき，実際には「時の流れ」は意識するものであり，式 A を変形，計算し，その結果が式 B になったとき $A=B$ となる。すなわち等号＝は結果に至るまで時を刻み続けているのである。特に等式の証明ではその意識が強く働くのではないだろうか。

そのように考えて， $\sqrt{a}\sqrt{b}$ と $\sqrt{ab}$ を変形してみよう。

$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は平方根の条件から $a>0,\ b>0$ であることより，

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad\cdots①$$

$\sqrt{ab}$ は平方根の条件より $ab>0$ 。 a と b は同符号であるから $a<0,\ b<0$ でもいいことになる。

$$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}\quad\cdots②$$

であり， $A=B$ と $B=A$ は異なる。

ここで $a=b$ とすると，①は,

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$

②は,

$\sqrt{a^2}=\sqrt{|a|}\times\sqrt{|a|}=|a|$

が得られる。このような刻の流れを無視してしまうと，

$$1=\sqrt{1^2}=\sqrt{(-1)^2}\sqrt{(-1)\times(-1)}=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=i\times i=i^2=-1$$

不思議な現象が起きてしまう。

同じように分数式 $\dfrac{x^2+x}{x}$ を変形すると，

$$\frac{x^2+x}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1\quad\cdots③$$

整式 $x+1$ を変形すると，

$$x+1=\frac{x(x+1)}{x}=\frac{x^2+x}{x}\quad\cdots④$$

交換法則が成立しているように見えるが，③の左辺の分数式$\dfrac{x^2+x}{x}$の定義域は$x \neq 0$である。これに対して④の左辺の整式$x+1$の定義域は任意の実数である。したがって，④の方は，

$$x+1=\begin{cases} 1 & (x=0) \\ \dfrac{x^2+x}{x} & (x \neq 0) \end{cases}$$

となる。また，対数の性質に，

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

があるが，これは両辺の「真数は正」を条件としている。すなわち

$M>0$，$N>0$，$MN>0$

である。しかし変形して等号でつないでいく場合，$\log_a M + \log_a N$ の真数条件は，$M>0,\ N>0$ より，

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN \quad \cdots⑤$$

である。これに対して$\log_a MN$を変形する場合の真数条件は$MN>0$であるから，

$$\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N| \quad \cdots⑥$$

であり交換法則は成立しない。ここで，$M=N$とすると，

⑤は，$2\log_2 M = \log_2 M^2$

であり，⑥は，

$$\log_a M^2 = 2\log_a |M|$$

となる。$\log_a M$ の真数条件は$M>0$であるが，$\log_a M^2$の真数条件は$M^2 \geqq 0$，すなわち$M \neq 0$である。

このように，等式の変形に時の流れという動きを与えてしまうと方程式でも恒等式でも交換法則は成立しないこともある。しかし，時の流れというものは等式にあるのではなく等号を用いて変形しようとする思考の部分に存在している。その思考が等式の条件をどのように捉えているかということであり，等式はその結果が示されるわけだから交換法則は成立していることになる。

★*最大値と最大点*

「放物線$y=-x^2+2x+3$の最大値は頂点である」

このように，つい口が滑ってしまうことがある。

最大値は，関数の値域の上限の値であり，頂点は曲線上の場所を示しているわけだから最大値が頂点というのは間違っている。正確には，

「放物線$y=-x^2+2x+3$の最大値は頂点でとる」

ということである。この勘違いはテストの最高点や最低点のイメージがあると思う。最高点は得点の値であり最高点をとった生徒を示しているわけではない。「点」という単位である値の最大値である。

最大値は存在する場合は唯一つであるが，最大値をとる点は一つ以上である。最高点をとった生徒は複数いてもいいということである。このように最大値と最大値をとる場所が混同されてしまうのは，最大値をとる場所を示す「最大点」という用語がほとんど用いられないことがある。局所的な最大値のことを極大値というが，その場所を示すには「極大点」という用語がある。極大点と極小点と合わせて極点といい，変曲点と同様に曲線上の位置を示すものである。関数$f(x)$の極点は$f'(a)=0$となる$x=a$が候補となるから，必ずしもローカルな最大値，最小値というわけではないかもしれない。しかし最大点や最小点という用語があれば，

「下に凸の放物線の最大点は頂点である」

とまとめられ都合がいい。最大値を求めるとき，要求しないと最大値をとるときのxの値を示さない生徒がいるが点として表すと問題はなくなる。

Ex）次の 2 次関数の最大点を求めよ。

$$y=x^2-2x+3 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

問題の解は，$(0,3),\ (2,3)$ である。

なお，最大値を Max，最小値を min と省略して示すことがある。最大値は英語では Maximum value であるが，極大値もまた Maximum value(あるいは Maximal)である。だから上述の問題は

Max なし

としても Max を極大点とみれば間違いではないから Max は使用すべきではない。同様に，最小値(minimum value)と極小値(minimal ともいう)もどちらも min で区別が付かない。もし用語として最大値の Max を使うのであれば，

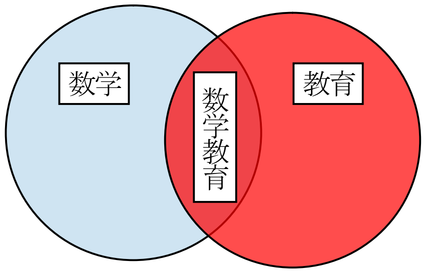
$$Maxf(x)=f(0)=3$$

とすべきだろう。

★数学教育と教育数学

数学教育とは学校教育における数学的な学習活動のことである。

数学と教育学という２つの学問の共通集合が数学教育であり，数学の概念，原理，法則を学ぶと同時に，論理的思考，数理的処理といった数学力を養うことでもある。



数学と教育学の２つの学問を両端とする線分を考えるならば，線分上に数学教育はありその位置により数学教育の目標は定まるが，数学という大木からひと枝を切り落としてオムニバス風に解説していく志向性は変わらない。数学教育の基盤は数学が支えているし，その目標は「数学のよさ」を見出し活動の中で教育的な価値を高めることにある。徹頭徹尾，数学を語り，数学で語り，数学の分野を基礎から応用へと体系的に積み上げ，そして学問「数学」の道に繋いでいく。その切り落とすひと枝は学習指導要領が示す目標・方針が定めている。しかし改定の度に指針が揺れ動くことも事実である。幹のコアにおいてさえ分野の段階的な指導内容は変わることはあるし今回の改定のように「データの分析」が新設されたりもする。小枝のオプションでは分野そのものが差し替えられることもある。過去には複素数平面は消え行列にとって代わったが今回はまた複素数平面は復活している。数学の歴史は時代の要求という天秤に掛けられ現場は翻弄される。義務教育では移行措置が与えられないまま突然切り落とされた小枝が机上に置かれ新たな道を指すのである。高校数学ではその新たな道を理解しないままに従前通りの指導で見切り発車をする。結局，指針は断裂し，児童・生徒の豊かであったはずの数学力もねじ曲がってしまう。数学教育は，直線の如く一本スーッと延びる単線教育が望ましいしフラクタル図形ブランチの自己相似形の複雑極まりない複線教育は馴染まず鑑賞のみに留めておきたい。まあ，そうはいっても数学教育は深淵な数学の掌でちょっとのたうつぐらいかも知れないが，ちょっとした瑕だって生命線を変えてしまう大事に至ることもあるので心して置かなければならないのだ。

さて，数学教育に対して教育数学を考えるとしたらそれは教育と数学を両端点とする線分上でどのような位置づけでなければならないだろうか。

数学教育は「数学から教育をする」ことであるから教育を触れても数学から離れることはない。同様に考えると教育数学は「教育から数学をする」ことになる。この場合の基幹は教育であるから数学的な法則や定理はより教育的になるかもしれない。

例えば，数学Ⅰの２次方程式の解の判別では判別式Dとすると$D<0$は「実数解をもたない」ことである。数学Ⅰでは数の範囲は実数から先の数はまだ存在しないから「解はない」ということでもある。２次方程式の解はグラフ化すると２次関数とx軸との共有点の個数に読み替えることができ，「解はない」ことは「共有点はない」ことに対応する。指導の流れはスムーズなのである。これを「だけどホントはね。$D<0$のときも解はありそのような解を虚数解という」。このように言ってしまうとどうなるだろう。数学の数百年の歴史を一気に端折ってしまったわけで，学習者には思考する暇(いとま)は与えられない。さらにグラフ上ではその虚数解はどこにあるのという疑問が沸き数学Ⅰを習いたてであるホカホカの学習者は困惑してしまうのだ。

学習者の知識・知恵の習得は「口は小さいが容量はある壺」に例えられる。細かく砕けば幾らでも入るがいっぺんに詰め込むことはできない。このようなスタンスが教育数学なのである。

数学の学びは小さな疑問，つまづき，発見の連続でなければならないのだ。

以前(20 年ほど前)，インターネット上のバーチャル会議(math-edu)で話題になった問題がある。

不等式　$|2x-3|<x$の解を次のように求める。

$-x<2x-3<x$ であるから，……(*)

$-x<2x-3$ より，$x>1$　…①

$2x-3<x$　より，$x<3$　…②

①と②の共通範囲を求めて，　$1<x<3$

絶対値の面倒な場合分けなどせずに答えが得られてしまう。

(*)の変形は数学の解答としての間違いはない。でもこのように解いていいのだろうか。

絶対値は学習者が学ばなければならない「場合分け」の入口であり，学習者は重要な「または」と「かつ」の意味をここで理解してステップアップしていく。(*)は，

$$|f(x)|<g(x)\Rightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$$

であることを示すが，これを

$$|x|<k\ \ (k>0)\Rightarrow -k<x<k$$

と同じように扱い解法を提示しているわけで，その結果，誤った場合分けを植え付けてしまう。マニュアル的な「受験数学の弊害」でありこのフレーズは当時，注目を集めいろいろな意見がバーチャル上で飛び交った。

ちなみに最近の参考書の中には(*)の解法を参考として示しているものもある。「でも場合分けが大事です」と最後には触れているが，前述の虚数解と同じで一旦触れてしまったら後の祭りなのである。20 年前の受験数学の弊害はなおさら加速し教育数学の価値は次第に萎んでいく。

★ $\frac{1}{2}$と0。5

数学では計算で得られた結果は分数で表すのが一般的である。その理由は数学では論理的な推定の結果として得られる数値を重要として考えるためであり，無限小数で表されることが多い小数は正確さに欠けることがある。

これに対して理科では計算の結果を分数で表すことはほとんどない。結果が無限小数になる場合は，問題の中で小数の桁数を四捨五入で指定し概算の値を要求する。理科は実験や観察により得られた計測結果を重視し許容誤差の範囲で求めるわけで，単位のある長さや重さが分数になるのは馴染まないのだ。

確率は数学，理科ともに扱う概念であるが，数学では全体(全事象)を１と考えて分数の値として確率を表す。理科では全体量である単位により値は変動する。百分率の 100%，歩合の 10 割合を単位として結果は小数で表される。理科では単位系の中で証明される定理や公式は分数で提示されるが計算の結果は小数なのである。

数学では確率は「根元事象は同様に確からしい」という等可能性の元で定義される数学的確率である。しかし実験・観測で等しく現象が起こるということはあり得ない。さいころを振るといった単純な試行でさえさいころの 1 から 6 の目の位置や彫られて削られた容量を考慮すればどの目も同様に出るとはけっして言えない。このように実験，観測といった試行から得られる確率は統計的確率と言われる。ベルヌーイは試行回数を極限にまで増やすことで数学的確率と統計的確率は等しくなるという「大数の法則」を示し証明したが数学的な理論の証明と実験的な結果という歪が埋まるわけではない。その歪が分数と小数の表示の違いに現れている。

例えば降水確率 0%は，「レイパーセント」と読む。0 は零(レイ)である。数学では 0 は Zero であり，漢字で零と書かれていてもゼロである。これに対して実験・観測の降水確率では 0%とは「5%未満」のことであり，限りなく 0 に近い 0。00001%といったものも含まれる。観測は推測であり「絶対にゼロ」とは言えないから零(レイ)なのである。日本語の零は「わずか」の意味もあり曖昧さを含んでいるのだ。零細や澪は細くなる様を表しており完全にゼロということではない。

だから 0。01 は，「レイテンレイ 1」であり「ゼロテン」とは読まない。1 未満の小数は「ゼロ」に近いから「レイ」なのである。では，0。0101 はどう読むだろう。「レイテンレイ 1 ゼロ 1」と読まないだろうか。1 未満の小数はどれだけ 0(レイ)が続くかで 0(ゼロ)との近傍を示している。だから 0 以外の数が現れた時点で近似値は分かることになりそれ以降は数字の羅列とみて「レイでもゼロ」でもいいことになる。

これに対して数 0 はまさにゼロであり，欠席 0(ゼロ)，海抜 0(ゼロ)m をレイとは読まない。年末のカウントダウンで「サン，ニー，イチ，レイ」と叫んだら新年への意気込みや望みは拍子抜けしてしまうだろう。

絶対零(0)度は絶対であっても「レイ度」であるがそれは漢字として読むからとみることもできる。シャルルの法則により温度の下限値は証明されたがその下限値でも原子は僅かに振動している。そのおおよその温度が−273.15° であるから「レイ度」というのだろう。

では 0 点はというと，これは「レイ点」である。答案で解答をすべて間違えた場合が 0 点である。書いていても間違っているということであり 1 点きざみの配点では得点は反映されない。多少正解であっても 0 点である。そしてもちろん期待を込めて「レイ点」なのだろう。これをゼロ点といわれたら救いようはないことになる。

計算結果を小数で表し 0。5 になったとしよう。それは小数第 2 位を四捨五入して(切り捨てることもあるが)，小数第 1 位までを表した 0。5 かもしれない。$\frac{1}{2}=0.5$ であるが，$0.5=\frac{1}{2}$ であるかということは分からないのだ。有理数は有限または無限循環の小数であり，正確な値は小数では表現しきれないこともある。だから「記号としての分数」を用いて正確さを求めるのである。これは無理数でも同様で，円周率は 3。14 ではなく π である。2 の正の平方根は 1。4142 ではなく $\sqrt{2}$ である。このように数学は曖昧な数には蓋をして「記号」として表す。

なお, 対数の桁数を求める問題では近似値として小数を用いる。対数そのものは log なる記号が用意されているが, 対数計算はもともとは天文学や航海における距離の計測から考案されたので数学よりは理科寄りなのだ。

さて，$\frac{1}{3}\times 3=1$ は自明の計算結果である。これを電卓で計算すると，$1/3*3=0.99999\cdots$ である。だから,

$$1=0.999999\cdots$$

として 2 つの数は等しいだろうと納得させてしまうことがある。しかしこれは乱暴であろう。

なぜなら 10 桁表示の電卓で計算すると,

$$1/3=0.333333333$$

これは 1/3 の近似値である。この値を 3 倍してもけっして 1 にはならない。小数表示で計算した時点で数値は曖昧になっているわけで，それを 1 に等しいと決めつけることは誤魔化しである。実際には極限を用いて厳密に証明すべきことなのである。

ところで数学では確率の値は分数で表すが，確率を用いる統計では事情が違っている。現行指導要領の新設分野である「データの分析」では，分散，平均，標準偏差等の値はすべて小数で示す。ということは「データの分析」は数学の分野ではないということになるのだろうか。

★曲線とグラフ

曲線(curve)はまっすぐではない曲がった線の意であるが数学では直線も曲線に含めている。「線は幅のない長さである」と Euclid は原論の中で定義するが「幅」や「長さ」とは何かということには触れず直感的な理解に委ねている。19 世紀後半，C。Jordan(フランス)は解析的定義を与え，平面上あるいは空間内の座標の点がパラメータ t の連続関数になるものを曲線とした。すなわち曲線は,

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

で表される座標 (x, y) をもつ点の集合でありこのような集合を Jordan 弧という。特に平面上で曲線が閉じ平面を曲線の内側と外側に分ける自分自身と交わりをもたない閉曲線を Jordan 曲線という。

グラフ(graph)にはいろいろな意味がある。イラスト，写真などを主に掲載する雑誌，画報を表すこともあるが，数学的には関連する 2 つ以上のものの数量などの関係を図式や図形で表したものである。統計グラフは統計データの量的変化の関係を棒，折れ線，円などの図で表したものである。グラフ理論は幾つかの点(node)とそれをつなぐ線分(edge)の集まりである図を用いて位相幾何学的に性質を解析するものである。

そして最も一般的なものは関数のグラフである。

$f: X \to Y$ とするとき，直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

この部分集合または平面上にプロットして得られる図形を関数 $y = f(x)$ のグラフという。これから，曲線，グラフともに点の集合で表される図形ということであるから両者の違いは何なのかということになる。「2 次関数のグラフは放物線である曲線」。こういってしまうとグラフと曲線は同じ意味に思える。しかし同じ座標上の点集合であってもその定義はよくみると異なっている。

曲線はパラメータの値の変化により点が決定するからパラメータは異なっていても同じ点になることはある。例えば円の方程式は $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であり，$\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ はどちらも点 $(1, 0)$ を表す。曲線の始点と終点は重複して閉曲線になる。また，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ はそれぞれ点 $(0,1)$，点 $(0,-1)$ を表し 1 つの x 座標の値に対して 2 つの y 座標の値が対応している。

これに対して関数は平面上の任意の x の値に対してただひとつの y の値が定まりこれを満たす点の集合がそのグラフである。だからグラフは閉じた曲線になることはないし y 軸に平行な直線と 2 点以上で交わることはない。グラフの定義は曲線より狭義であり円を表す図形はグラフではなく曲線ということになる。円グラフといったら統計グラフの図式を普通は考えてしまうだろう。放物線についても 2 次関数で表される場合はグラフであり 2 次曲線で表される場合は曲線なのである。

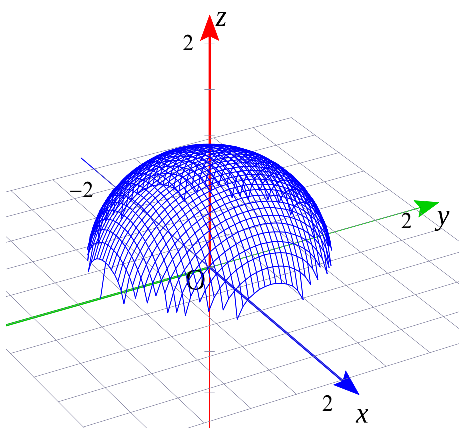
しかし，関数の対応を $f: Y \to X$ とし，$x = f(y)$ に対して部分集合 $\{(y, f(y)) \mid y \in Y\}$ から得られる図形を考えれば x 軸に平行な軸をもつ放物線もまたグラフである。結局，それでは曲線が閉じているかいないかが曲線とグラフの違いということになるのだろうか。

グラフは空間内では次のように定義する。

$f: X \times Y \to Z$ とするとき，$X \times Y \times Z$ の部分集合 $\{(x, y, f(x, y)) \mid x \in X, y \in Y\}$

部分集合の要素を空間内に点としてプロットして得られるのが関数 $z = f(x, y)$ のグラフであり，空間内では曲面として描かれる。

ここで $z = 0$ とした関数 $f(x, y) = 0$ は関数を表す曲面と xy 平面との交線である曲線となる。したがって曲線は曲面を表すグラフの一部であるからこれもまたグラフである。



右図は，$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とし，関数 $z = f(x, y)$ を描画したものである。$0 \leqq z \leqq 1$ の範囲で曲面はグラフとして描かれ $z = 0$ のとき円 $x^2 + y^2 = 1$ のグラフを表している。このように陽関数 $y = f(x)$ に対して陰関数 $f(x, y) = 0$ は空間内の曲面グラフの一部分を表す曲線とみなすことはできる。

また，陰関数は x の値に対して複数の y の値を対応させる多価関数とみなすこともできるだろう。例えば円を表す方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ は，2 つの関数 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフを合わせたものであり 2 つの円弧のグラフをつないだ図形が円を表す曲線になるのである。

グラフィティ(graffiti)は壁に描かれた落書きのことである。落書きといってもライター(writer)はでたらめに描くのではなく筆と色に思いを乗せる。個々の想いが錯綜し色が交じり合い若者たちの青春グラフィティは弾けるのである。人の一生は時間という点を紡いでいくと固有の軌跡を編みあげる。軌跡は行きつ戻りつを繰り返し曲線(カーブ)を描くのでありその分岐点からはいつだってグラフは描かれている。

★ 関数 *y=f(x)* と関数 *f(x)*

関数の定義は数学Ⅰ「２次関数」で，「２つの変数x, yに対して，xの値を決めるとそれに応じてyの値がただ１つ決まるとき，yはxの関数」としている。このことは中学では既習のことである。なお，写像的定義は集合を学ぶ数学Ａでまだ説明されていない可能性もあるので触れずその後も高校数学では再定義することはない。

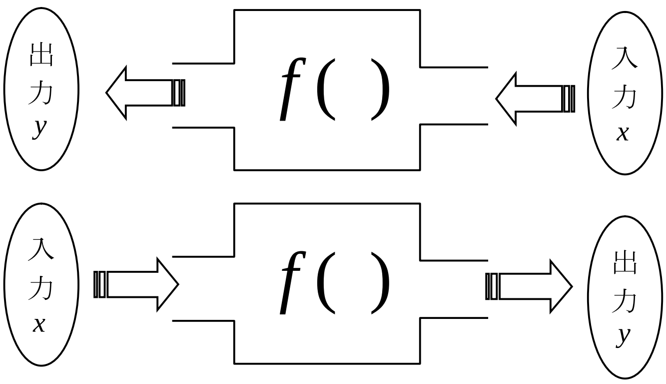
関数は，もともとは「函数」と表記されていた。原語の function は中国では音で読むとファンスウでありこれに函数の用語をあてたものである。また，函数は数の函(箱)を意味している。２つの変動する数量の一方が定まるとき，他方が一意的に定まる抽象的な「見えない操作」はブラックボックスという箱で具象化することができる。函数は現在はあまり用いられなくなったがブラックボックスの説明にはまことに都合のよい言葉であった。

関数では，変数xを独立変数，変数yを従属変数といい，変数(変量)xと変数(変量)yは互いに関係を保ちながら変化する。記号化の天才であったライプニッツ(ドイツ)は，yがxの関数であるとき，yを表すxの式を$f(x)$のように書きxの関数$y=f(x)$と表した。記号$f(x)$は関数を示すと同時にその具体的な形も表現しており$f(x)=(x$の式$)$と表したりもする。

ところで関数は単に，関数$f(x)$と表すこともある。では関数$y=f(x)$と関数$f(x)$は何が異なりどう使い分けられているのだろう。

例えば，グラフやその平行・対称移動を表すときは$y=f(x)$としている。点(x, y)の軌跡として関数xとyの対応関係を図形として表すことで関数を代数的に捉えているのだろう。

これに対して最大値や最小値は関数$f(x)$とする場合が多い。$f(x)=x^2+2x+3$のときは$f(1)=6$のような$f(x)$はxの値によって定まる数値という捉え方で，$f(x)$は関数を表す固有名詞として用いられる。$y=f(x)$は方程式であり，(x, y)はその解と見る解析的な捉え方である。



この違いはブラックボックスでの数量の入出力に眺めることができる。

関数$y=f(x)$は右から入力(input)した数量xに機能(function)が働き左から数量yが出力(output)するとき，相関的関係の作用を示すものである。従属変数yは，独立変数xに対して従属というよりは，対等あるいは上位の位置にある。

関数$f(x)$では，左から入力した数量xは，個々に役割(function)を担い，数量yは右から出力されてその機能を果たす。従属変数yはxに対応する固有な値であり，集合全体よりもその中の一つの要素という意味合いが強い。

これから関数概念は，$f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$として，単純に集合の対応関係を示す写像と比較すると結構柔軟な対応関係といえる。だから数学以外の種々の分野でも関数は扱われる。

ユダヤ系の心理学者であるクルト・レヴィン(1890-1947)は，人間の行動(B:Behavior)は，人間(P:Person)とその環境(E:Environment)の関数であり，$B=f(P, E)$で表すことができると主張した。確かに人間の行動はその成育歴や生活環境から大きな影響を受けることは経験則から理解はできる。しかしこの関数は因果関係は示しても具体的な方程式としては表現してはいない。

ドイツの物理学者グスタフ・フェヒナー(1801-1887)は，感覚量(R)は，刺激の強さ(E)の対数に比例することを提唱する。比例定数をCとすると，$E=C\log R$となる。$y=\log x$は上に凸の緩やかな単調増加の関数である。ある刺激Rとその２二乗の刺激R^2は$\log R^2=2\log R$より感覚としてしは２倍ほどにしかならない。刺激が強ければ強いほど感覚は麻痺していくということであり対数を刺激と感覚の間にクッションとして挟まなければ人間は発狂してしまうかもしれない。この関数はレヴィンの関係より関数式が与えられた分，より肯定的に受け止めることができる。

このような心理学的因果関係は法則(law)と呼ばれる。ただ，関数の定義では複数のインプットの数量に対応するアウトプットの数量は唯一つである。しかしレヴィンの法則では$f(P, E)$のように人間と環境が同じ要素であっても得られる行動Bは変容する可能性もある。一価ではなく多価的な関数とみてよい。一般的な法則として関数を認識するのは妥当とはいえイメージに留まり，だからどちらかというと関数$y=f(x)$に近い。

これに対して，関数電卓，パソコンのような計算機は，引数の入力に対して返値である出力は常に一つである。ハード内の演算はさほど重要視するわけではなく出力したものを結果，結論とする。すなわち関数$f(x)$的な扱いをしていることになる。

このように私たちの生活空間には関数概念は散在し，絡み合ってまた関数を合成している。現代社会では作用因子はあまりに複雑であり，多次元的視点でも関数を把握することは難しい。人の人生も然り。人間関係等により構成される関数$y=f(x)$はおぼろに漂っており，関数$f(x)$が辿り着く値は確定できるはずもないのだ。

○排反と独立

確率は，試行の結果で得られた事象により得られる。2 つの事象が同時に起こらないとき，２つの事象は互いに排反であるという。これに対して，一方の事象の起こり方が他方の事象が起こる確率に影響を与えないとき，２つの事象は互いに独立であるという。排反と独立の２つの事象の状態は一見すると同じように思える。排反は数学用語だが，言葉の意味としては反対方向に押し出す(排)ことであり，押し出された２つの事象は互いに影響を与えることはない。独立という言葉は相手に干渉せずわが道を行くということであり，こちらも相手に影響を与えることはない。排反と独立はどう違うのだろう。

さいころを１個投げる試行では，目の出方を事象とするとき，全事象は$U=\{1,2,3,4,5,6\}$である。このとき偶数である事象は$A=\{2,4,6\}$，奇数である事象は$B=\{1,3,5\}$，素数である事象は$C=\{2,3,5\}$である。さいころの目が偶数でありかつ奇数であることはないので２つの事象AとBは同時に起こらず排反である。さいころの目が偶数でありかつ素数である場合，根元事象$\{2\}$は事象Aと事象Cのどちらにも含まれていて２つの事象は同時に起こる。よって事象Aと事象Bは排反ではない。AとBが排反であるとは$A\cap B=\phi$のことであるが，分かりやすくいうと，事象のすべての要素が２つ以上の事象に属さないということである。試行で作られる全事象を表す集合の要素に条件をつけたものが事象であり，２つの条件に共通する規則がないことが排反といえばいいだろうか。根元事象$\{3\}$は奇数であり３の倍数なので，そのような条件で２つの事象を作ると２つの事象は排反ではなくなってしまう。

では独立であるとはどういうことだろう。偶数の目がでる事象Aと，奇数の目がでる事象Bは独立だろうか。偶数の目がでる事象の起こり方は奇数の目がでる事象の起こり方に影響を与えるわけではないから独立としてよいだろうか。事象Aと事象Bは排反でもあるから，２つの事象は排反であり独立ということになってしまう。もちろんこれは誤りである。このように考えてしまうのは幾つかの誤解によるものである。

独立の定義は排反と違い非常に概括的なものである。一方の事象の起こり方と他方の事象の起こり方がどう影響を及ぼすかということが曖昧であり影響を与えない状態が分かり難くそのため同時に起こらない排反も影響を及ぼさない一つとして考えてしまう。

概括的な独立は定義も「試行の独立」，「事象の独立」の２つがある。

さいころを投げること，コインを投げることはまったく異なる試行であるからお互いに影響を及ぼすことはない。これを試行の独立という。袋の中に赤玉３個，白玉３個の６個が入っていて，１個取り出す試行を２回繰り返す。このような複数の同じ試行の繰り返しはその操作方法により独立・従属は異なる。１回目に取り出した玉を袋の中に戻さなければ(非復元抽出)２回めに取り出す玉の色は１回目の影響を受けて独立ではなくなる(従属)。１回目に取り出した玉を袋の中に戻せば(復元抽出)，袋の中は常に一定の状態に保たれているので独立である。このように操作としての試行の独立は直観的に判断することができる。なお繰り返しの試行(反復試行)によりその標本空間もまた変わる。１回目に取り出す試行の全事象をU_1，２回目に取り出す試行の全事象をU_2とするとき，その直積$U_1\times U_2$が全事象になる。例えば１個のさいころを１回投げる試行を２回繰り返す。１回目に偶数の目が出る事象をA，奇数の目がでる事象をBとすると事象A，事象Bはそれぞれ$A\times U_2$，$B\times U_2$を表しており２つの事象は排反である。１回目に偶数の目が出る事象をA，２回目に奇数の目がでる事象をBとすると，それぞれの事象は$A\times U_2$，$U_1\times B$のことであり事象AとBは排反ではなく独立で$P(A\times B)=P(A\times U_2)P(U_1\times B)$である。ここで，$P(A\times U_2)=P(A)$，$P(\mathrm{U}_1\times B)=P(B)$であるから，さいころを１個投げる試行の事象$A$，$B$のそれぞれの確率$P(A)$，$P(B)$に対して，$P(A\times B)=P(A)P(B)$が成立する。独立は試行に対して，そして排反は事象に対して定義するのであれば両者はまったく異なったものであるからそれを比較して論ずることは無意味なことである。

「事象の独立」の定義も互いに他の事象に影響を与えないという概括的な説明から始まる。２つの事象A,Bがお互いに影響を与えないとは「Aという条件の元でBの起こる確率を$P_A(B)$とすると$P_A(B)=P(B)$」となることである。$P_A(B)=P(B)$はAという条件があってもなくてもBの確率は変わらないことであり，これもまた概括的である。

$P_A(B)$は事象Aが起こったときの事象Bが起こる条件つき確率であり，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

である。すなわち，全事象をAとするときの事象Bの起こる確率でありこれから事象の独立の具体的状態が見えてくる。式を変形すると$P(A)\cdot P_A(B)=P(A\cap B)$より，

$$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$$

であるから事象Aと事象Bが独立であるとは，それぞれの事象の確率の積が積事象の確率に等しいことである。

さいころを１回投げて，２の倍数，３の倍数，４の倍数の目が出る事象をそれぞれA,B,Cとする。

$$A=\{2,4,6\}\ ,\ B=\{3,6\}\ ,\ C=\{4\}$$

であるから，

$$P(A)=\frac{1}{2}\ ,\ P(B)=\frac{1}{3}\ ,\ P(C)=\frac{1}{6}$$

また，$A\cap B=\{6\}$ ，$B\cap C=\phi$ ，$C\cap A=\{4\}$ であるから，

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\ ,\ P(B\cap C)=0\ ,\ P(C\cap A)=\frac{1}{6}$$

である。これから，

事象Aと事象Bは排反でなく独立である
事象Bと事象Cは排反であり独立でない
事象Cと事象Aは排反でなく独立でない

となり排反と独立の様々な状態が起こる。ただし，空事象でない事象A,Bが排反であるとき，AとBは独立にはならない。なぜなら

$A\cap B=\phi$ より，$P(A\cap B)=0$。

$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$ より $P(A)P(B)\neq 0$。

これから，$P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$。

よって独立ではない。すなわち２つの事象の独立は排反でないときに起こっている。

このように独立であることは確率を計算することで確かめられるがお互いに影響を与えないという概括的な定義の解釈としては曖昧である。

> 次の２つの事象は独立，従属のいずれか。
> ⑴ ジョーカーを除く 52 枚のトランプから１枚引くとき，ハートを引く事象Aとエースを引く事象B。
> ⑵ Ａ，Ｂを含む７人の生徒から３人を選ぶとき，Ａが含まれる事象AとＢが含まれる事象B。

⑴，⑵ともにそれぞれの選び方は直観的には片方に影響を及ぼすとは思えず独立と答えたくなるが実際に乗法定理の計算により求めてみる。

⑴

$$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}\ ,\ P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}\ \text{より，}\ P(A)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{52}$$

事象$A\cap B$は，ハートのエースを引くことだから，$P(A\cap B)=\frac{1}{52}$。

これから，$P(A)P(B)=P(A\cap B)$ が成立するから独立である。

⑵

$P(A)=\frac{1\times {}_6C_2}{{}_7C_3}=\frac{3}{7}$。同様に，$P(B)=\frac{3}{7}$

また，$P(A\cap B)=\frac{1\times {}_5C_1}{{}_7C_3}=\frac{1}{7}$

$$P(A)P(B)=\left(\frac{3}{7}\right)^2\neq\frac{1}{7}=P(A\cap B)$$

これからAとBは従属である。

このように独立，従属は調べられても影響の及ぼし方については釈然としない。

これを，$P(A)=P_A(B)$ から調べてみよう。

⑴ $P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$。

$P_A(B)$は，ハートを選んだという条件でエースを選ぶことより，$P_A(B)=\frac{1}{13}$。よって独立。

⑵ $P(B)=\frac{1\times {}_6C_2}{{}_7C_3}=\frac{3}{7}$。

$P_A(B)$はＡが選ばれたという条件でＢを選ぶことより，$P_A(B)=\frac{1\times {}_5C_1}{1\times {}_6C_2}=\frac{1}{3}$

$$P(B)=\frac{3}{7}=\frac{9}{21}>\frac{7}{21}=\frac{1}{3}=P_A(B)$$

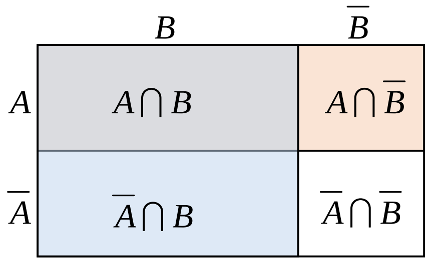
Ａが選ばれたことにより，残り６人からＢが選ばれる確率は若干低くなり影響を受けて従属になる。

このように，乗法定理よりは条件つき確率$P_A(B)$を見る方がAがBに及ぼす影響が分かり易い。

これはカルノー図を用いるとより明確なものとなる。

カルノー図は，事象の確率を面積で表したものである。

右図のように面積で表された全事象を横方向の仕切りで事象Aとその余事象$\overline{A}$，縦方向の仕切りで事象Bとその余事象$\overline{B}$に分ける。そして２つのパーテーションにより分けられた領域に４つの事象$A\cap B$， $A\cap\overline{B}$， $\overline{A}\cap B$， $\overline{A}\cap\overline{B}$を配置したものである。このとき事象$A$と事象$B$の従属，独立は，領域の面積の割合をみることで判定できる。

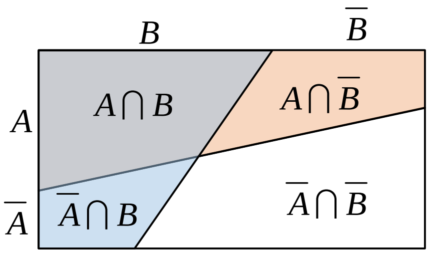


右図では水平方向の仕切りで全事象の面積を二等分しAと$\overline{A}$に分けている。また，垂直方向の仕切りで面積比２：１でBと$\overline{B}$を分けている。これから，

$$P(B)=\frac{2}{3} \quad , \quad P_A(B)=\frac{2}{3}$$

であるからAとBは独立である。

このようにカルノー図では，全事象を表す長方形の縦と横にそれぞれ平行な仕切りで分けた場合は独立である。これに対して斜め縦線，斜め横線をパーテーションとした場合に従属の関係が得られる。



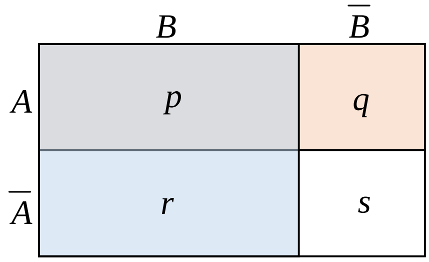
さて，いま，

$$P(A\cap B)=p \quad , \quad P(A\cap\overline{B})=q \quad , \quad P(\overline{A}\cap B)=r \quad , \quad P(\overline{A}\cap\overline{B})=s$$

とする。このとき，

$$P(B)=\frac{p+r}{p+q+r+s}$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{p}{p+q}$$



これを整理すると， $ps=qr$ 。

よって， $p:q=r:s$ より，

$$p=kr \ , \quad q=ks$$

である。このとき，

$$P(B)=\frac{p+r}{p+q+r+s}=\frac{kr+r}{kr+ks+r+s}=\frac{(k+1)r}{(k+1)(r+s)}=\frac{r}{r+s}=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=P_{\overline{A}}(B)$$

これから， $P_{\overline{A}}(B)=P(B)$ より，事象$\overline{A}$とBは独立である。すなわち，

$$P_A(B)=P(B)=P_{\overline{A}}(B)$$

であるから，事象Aが起きても起きなくても事象Bが起こる確率は変わらないということである。同様に，

$$P_B(A)=\frac{p}{p+r}=\frac{kr}{kr+r}=\frac{k}{k+1}$$

$$P_{\overline{B}}(A)=\frac{q}{q+s}=\frac{ks}{ks+s}=\frac{k}{k+1}$$

$$P(A)=\frac{p+q}{P+q+r+s}=\frac{kr+ks}{kr+ks+r+s}=\frac{k(r+s)}{(k+1)(r+s)}=\frac{k}{k+1}$$

よって， $P_B(A)=P(A)=P_{\overline{B}}(A)$

事象Bが起きても起きなくても事象Aが起こる確率は変わらないことになる。

さらに，事象$\overline{A}$と事象$\overline{B}$についても独立であることが示される。

そして，これらは比例式の性質

　合比の理　$p:q=r:s \Rightarrow (p+q):q=(r+s):s$

　加比の理　$p:q=r:s \ \Rightarrow \ (p+r):(q+s)=p:q=r:s$

によって保障されているものである。

このように事象Aと事象Bが独立であるとは，２つの事象のうち，一方の事象が起きるまたは起きないに関わらず他方の事象の起きるまたは起きない確率は影響を受けないということでなる。起きないことに対しても影響を与えてはいないのである。

以上のことより，２つの事象が排反であるとは，２つの事象がお互いまったく相容れない状態であるのに対して，独立であるとは相手を受け入れても無視をする。集団の中でのスタンスとして見れば排反のほうが他の集団に気を使うことはなく気楽だが逃避ともいえる。独立は望まない無視がある一方，望み獲得した立場もあるかもしれない。