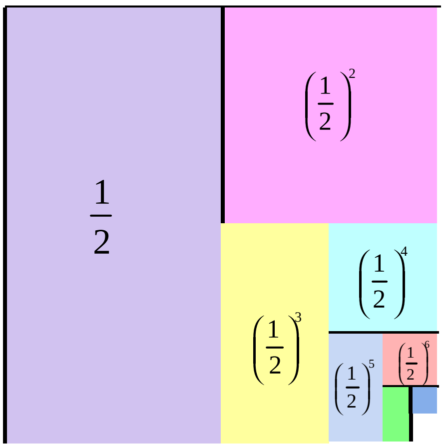
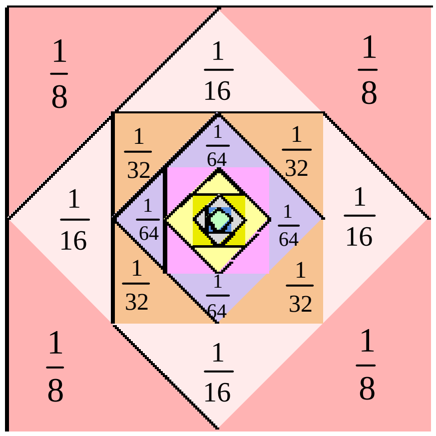
無限等比級数の収束を見る

札幌藻岩高校　中村文則

初項$\frac{1}{2}$、公比$\frac{1}{2}$の無限等比級数は正方形の面積を利用することで図のように1に収束することを見ることができます。同様に、収束する無限等比数列の和を三角形を分割した面積の和とみて視覚的に表現することを考えて見ましょう。





(1) 公比$r=\frac{1}{2}$の無限等比級数

$$S=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\cdots$$

ΔABC において、BC の中点を M_1 とすると、

$$\Delta ABM_1=\Delta ACM_1=\frac{1}{2}$$

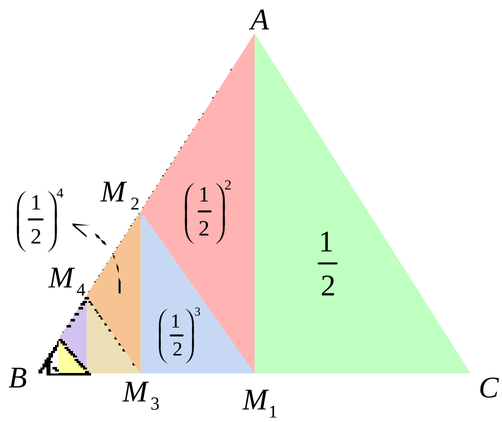
ΔABM_1 において、AB の中点を M_2 とすると、

$$\Delta AM_2M_1=\Delta BM_1M_2=\frac{1}{4}$$

以下同様に、右図のように中点をとっていくと、

$$\Delta M_{n-1}M_nM_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad (n\in N,M_0=A)$$

$$S=\Delta AM_1C+\sum_{n=1}^{\infty}M_{n-1}M_nM_{n+1}=\Delta ABC=1$$



(2) 公比$r=\frac{1}{3}$の無限等比級数

$$S=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\cdots$$

三角形 ABC の重心を G_1 とすると、

$$\Delta ABG_1=\Delta BCG_1=\Delta CAG_1=\frac{1}{3}\Delta ABC=\frac{1}{3}$$

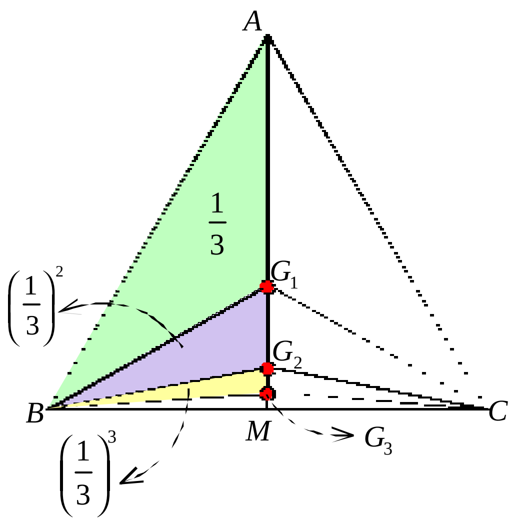
次にΔG_1BC の重心を G_2 とすると、

$$\Delta G_1BG_2=\Delta BCG_2=\Delta CG_1G_2=\frac{1}{3}\Delta G_1BC=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

以下同様に、中線 AM 上に重心をとっていくと、

$$\Delta G_{n-1}BG_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\quad (n\in N,G_0=A)$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}G_{n-1}BG_n=\Delta ABM=\frac{1}{2}$$



(3) **公比$r=\dfrac{1}{4}$の無限等比級数**

$$S=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots\cdots$$

三角形 ABC の各辺 AB, BC, CA の中点をそれぞれ P_1, Q_1, R_1 とします。

$$\Delta AP_1R_1=\Delta P_1BQ_1=\Delta R_1Q_1C=\Delta P_1Q_1R_1=\frac{1}{4}\Delta ABC=\frac{1}{4}$$

ΔP_1BQ_1 の各辺 P_1B, BQ_1, Q_1P_1 の中点をそれぞれ P_2, Q_2, R_2 とすると、

$$\Delta P_2Q_2R_2=\frac{1}{4}\Delta P_1Q_1R_1=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

となります。

以下同様に P_n, Q_n, R_n をとっていくと、

$$\Delta P_nQ_nR_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n\in N)$$

よって、$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P_nQ_nR_n$

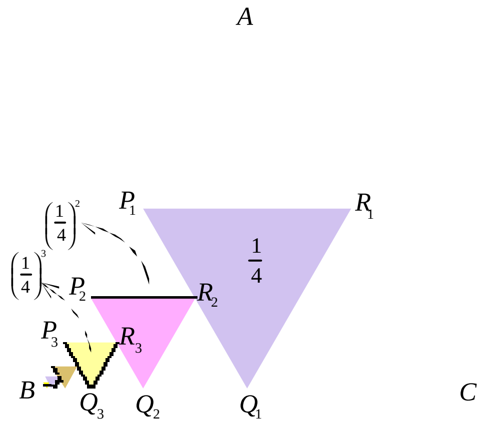
ここで、

$T_n=$**四角形**$P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$**の面積** $(n\in N, A=P_0, C=Q_0)$

とおくと、

$$T_n:\Delta P_nQ_nR_n=3:1$$

$$\therefore \quad S=\sum_{n=1}^{\infty}P_nQ_nR_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3}\Delta ABC=\frac{1}{3}$$



(4) **公比$r=\dfrac{1}{m}$ $(m\in N, 4\leqq m)$の無限等比級数**

$$S=\frac{1}{m}+\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\right)^3+\left(\frac{1}{m}\right)^4+\cdots\cdots$$

三角形 ABC の辺 AB, CB 上にそれぞれ、$1:\sqrt{r}$ となる点 P_1, Q_1 をとり、 さらに辺CB 上に、$Q_1B=Q_1B_1$ なる点 B_1 をとると、

$$\Delta P_1Q_1B_1=\Delta P_1BQ_1=r\Delta ABC=r$$

次にΔP_1BQ_1 の辺 P_1B, Q_1B 上にそれぞれ、$1:\sqrt{r}$ となる点 P_2, Q_2 をとり、辺BQ_1 上に、$Q_2B=Q_2B_2$ なる点 B_2 をとると、

$$\Delta P_2Q_2B_2=\Delta P_2BQ_2=r\Delta P_1BQ_1=r^2$$

以下、同様に$\Delta P_nQ_nB_n$ を作ると、

$$\Delta P_nQ_nB_n=r^n \quad \text{よって、} S=\sum_{n=1}^{\infty}P_nQ_nB_n \quad \text{となります。}$$

ここで、

$$\Delta P_{n-1}BQ_{n-1}:\Delta P_nQ_nB_n=1:r \ ((n\in N, A=P_0, C=Q_0)$$

ですから、

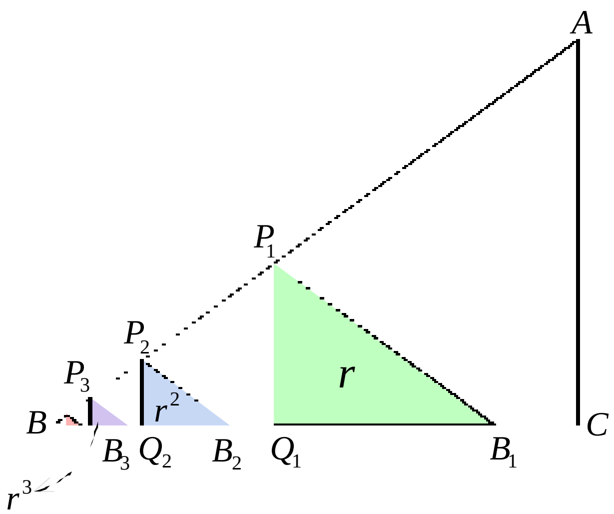
$T_n=$ 四角形 $P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$ の面積

とおくと、

$$T_n:\Delta P_nQ_nB_n=1-r:r$$

よって、

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}P_nQ_nB_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r}{1-r}T_n=\frac{r}{1-r}\Delta ABC=\frac{r}{1-r}$$



(1),(2),(3),(4)より、公比$r=\dfrac{1}{m}$ $(m\in N)$ について、無限等比数列の和を見ることができました。

(5) 公比 $r=-\frac{1}{2}$ の無限等比級数

$$S=1-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\cdots$$

三角形 ABC において、辺 BC の中点を M_1 とすると、

$$\Delta ABM_1=\Delta AM_1C=\frac{1}{2}\Delta ABC$$

よって

$$\Delta AM_1C=\Delta ABC-\Delta ABM_1=1-\frac{1}{2}$$

次に辺 AB の中点を P_1 とすると、

$$\Delta AM_1P_1=\Delta M_1P_1B=\frac{1}{2}\Delta ABM_1$$

さらに辺 BM_1 の中点を M_2 とすると、

$$\Delta M_1P_1M_2=\frac{1}{2}\Delta M_1P_1B=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Delta ABM_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

以下同様の操作を続けていくと、

$$\Delta M_{n-1}P_{n-1}M_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\quad(n\in N, M_0=C, P_0=A)$$

ここで、

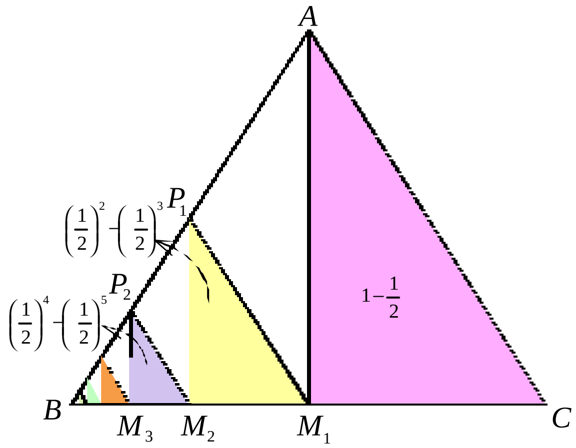
T_n =四角形 $P_{n-1}P_nM_nM_{n-1}$ の面積

とおくと、

$$T_n:\Delta M_{n-1}P_{n-1}M_n=3:2$$

ですから、

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta M_{n-1}P_{n-1}M_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}T_n=\frac{2}{3}\Delta ABC=\frac{2}{3}$$



(6) 公比 r $(-1<r<0)$ の無限等比級数

$$S=1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots$$
$$r=-s\ (0<s<1)$$

とすると、

$$S=1-s+s^2-s^3+s^4+\cdots\cdots$$

三角形 ABC において、辺 BC を $s:1-s$ の比に内分する点を P_1 とすると、

$$\Delta P_1AB=s, \Delta P_1CA=1-s$$

辺 BA を $s:1-s$ の比に内分する点を Q_1 とすると、

$$\Delta P_1Q_1B=s\Delta P_1AB=s^2$$

辺 BP_1 を $s:1-s$ の比に内分する点を P_2 とすると、

$$\Delta P_1Q_1P_2=(1-s)P_1Q_1B=(1-s)s^2=s^2-s^3$$

以下同様の操作を続けていくと、

$$\Delta P_{n-1}Q_{n-1}P_n=s^{2n-2}-s^{2n-1}\ (P_0=C, Q_0=A, n\in N)$$

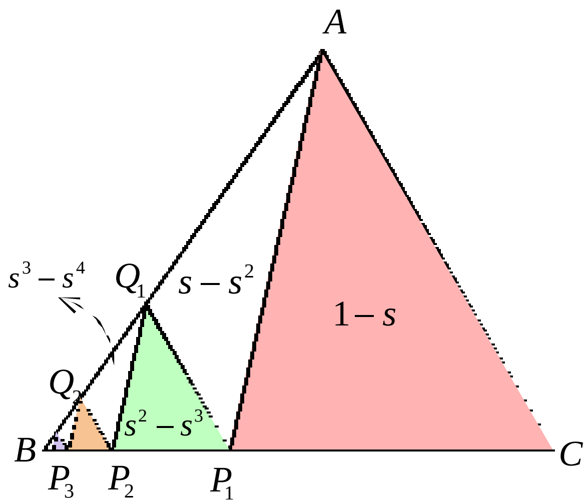
また T_n = 四角形 $Q_{n-1}Q_nP_nP_{n-1}$ の面積とおくと、

また、$T_n:\Delta P_{n-1}Q_{n-1}P_n=1+s:1$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}Q_{n-1}P_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+s}T_n=\frac{1}{1+s}$$

したがって

$$S=\frac{1}{1-r}$$



(7) 公比 $r\ (-1<r<1)$ の無限等比級数

(1)〜(6)までで、公比 $r=\dfrac{1}{m}\ (m\in Z-\{0\})$ の場合についてその収束をみることができました。

さらに、(4)の無限等比級数の証明は $0\leqq r\leqq\dfrac{1}{4}$ である実数 r についても成立するのは明らかですから(6)とあわせて、$-<r\leqq\dfrac{1}{4}$ および、$r=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$ で無限等比級数はその収束を三角形の面積として見ることができます。

では、$\dfrac{1}{4}<r<1$ なる実数 r を公比とする場合はどうかというと、無限等比数列の和は $\dfrac{1}{1-r}$ で与えられ、

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{1-r}=\infty$$

となりますから、面積1の三角形を分割して表現することは難しくなります。

そこで、座標平面上の直線を利用することで、三角形の面積を切り出すことを考えてみましょう。

等比数列の公比を $r\ (0<r<1)$ とし、直線

$$y=(r-1)x+1$$

を考えます。この直線と x 軸との交点は、

$$\left(\frac{1}{1-r},0\right)$$

ですから、直線の傾き $r-1$ から無限等比級数の収束、発散が分かります。

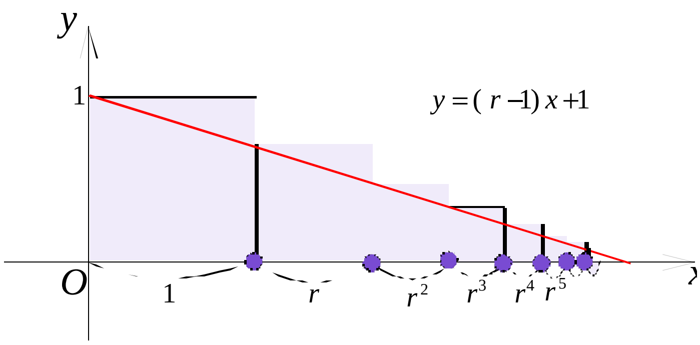
ここで、x に順次、

$$1,\ r+1,\ r^2+r+1,\ r^3+r^2+r+1,\cdots$$

を代入すると、

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\cdots\cdots$$

これから右図のように正方形を作っていくと、等比数列の無限個の和を見ることができます。



次に、直線 $y=(r-1)x+1$ を y 軸方向に2倍に拡大した直線

$$y=2(r-1)x+2$$

を考えてみます。

このとき、

$P_n\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1},0\right)$ に対応した直線上の点 Q_n は、

$Q_n\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1},2r^n\right)$ となります。

したがって、

$$S_n=\Delta Q_{n-1}P_{n-1}Q_n\text{ の面積},\quad T_n=P_{n-1}Q_nP_n\text{ の面積}\quad (P_0=O,Q_0=A)$$

とすると

$$S_n=\frac{1}{2}P_{n-1}P_n\cdot P_{n-1}Q_{n-1}=\frac{1}{2}r^{n-1}\cdot 2r^{n-1}=r^{2n-2},\ T_n=\frac{1}{2}P_{n-1}P_n\cdot P_nQ_n=\frac{1}{2}r^{n-1}\cdot 2r^n=r^{2n-1}$$

これから

$$\Delta AOB=\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots$$

となります。また、

$$OB=\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}P_n=1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots$$

極限は線分の長さと、三角形の面積の両方でみることができます。

以上より、公比 $0<r<1$ の場合もその収束を三角形の面積として表現できますから、$-1<r<1$ のすべての収束が目で見るようになりました。