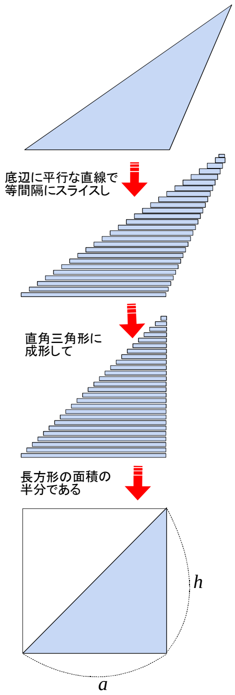
三角形の面積をひも解く

札幌旭丘高校
中村文則

○はじめに

原公式 T1)　三角形の面積Sは，底辺の長さをa，高さをhとすると，

$$S=\frac{1}{2}ah$$



三角形の面積公式である．ahで求められる値は，横a，縦hの長方形の面積の半分とみなすことができるが，このことは，右図のように，カバリエリの原理により三角形を底辺に平行にスライスし，直角三角形に整形しても面積が変わらない(等積変形)ことから，容易に理解することができる

原公式は，「底辺かける高さ割る２」と諳んじられるが，正確には頂点からその対辺またはその延長線に引いた垂線の長さhと対辺の長さaが与えられたときの面積公式である．しかし，これらの要素は必ずしも三角形の面積を求めるときに与えられているわけでもないから，その面積公式は条件要素によって様々な形を為してくる．また，視点を変えて，図形の置かれる環境(平面)を新しく設定することによっても解法のアプローチは随分異なるであろう．

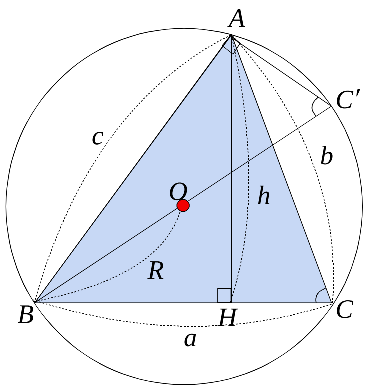
ここでは，いろいろな観点から三角形の面積公式を考察してみよう．

なお，以下，三角形ABCの面積はS，辺の長さは$BC=a, CA=b, AB=c$とする．

○幾何的にひも解く

公式 T2)
三角形の外接円の半径をRとすると，

$$S=\frac{abc}{4R}$$



証明）右図の鋭角三角形において，$\Delta ACH \backsim \Delta BC'A$であるから，

$BC':AB=AC:AH$　より　$2R:c=b:h$

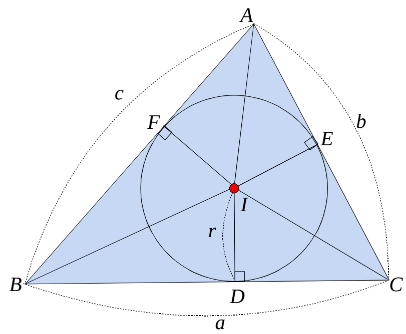
$h=\dfrac{bc}{2R}$　以上より $S=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{abc}{4R}$

鈍角三角形の場合も同様である．　(終)

内接円の半径が与えられた場合は，

公式 T3)
三角形の内接円の半径をr，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$とすると，

$$S=rs$$



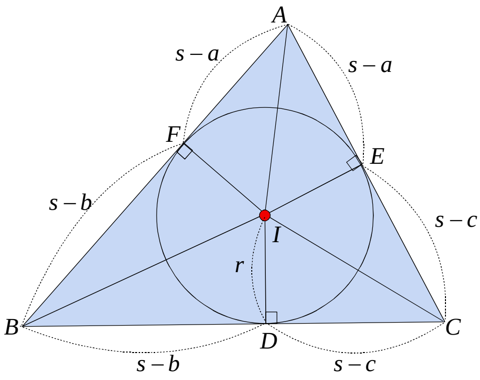
証明）三角形ABCの内接円の中心をIとすると，

$$\Delta ABC=\Delta IBC+\Delta ICA+\Delta IAB$$
$$=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc$$
$$=r\cdot\frac{a+b+c}{2}$$
(終)

「周の長さの半分」である s は，三角形の面積公式に大きく関与する．

右図において， $BD=BF$ より，

$$BD=\frac{BD+BF}{2}$$
$$=\frac{(BC-CD)+(AB-AF)}{2}$$
$$=\frac{(BC-EC)+(AB-AE)}{2}$$
$$=\frac{AB+BC-AC}{2}$$
$$=\frac{c+a-b}{2}$$



であるから，

$$BD=\frac{a+b+c-2b}{2}=s-b$$

同様に計算して，

$$BD=BF=s-b,\ AF=AE=s-a,\ CD=CE=s-c$$

を得る．

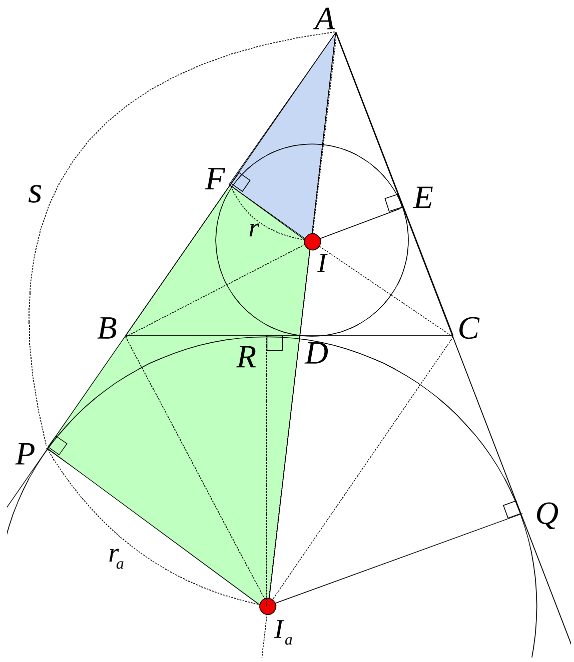
このように，内接円の接点で切られる各辺の長さは， s で表すことができる．

また， s は三角形の傍接円を考えることでもその長さを表現することが可能である．

$\angle A$ 内にできる傍接円(頂点 A の対辺と A を挟む２辺の延長線に内接する円)の中心(傍心)を I_a とする．傍接円と辺 AB,BC,CA またはその延長線との接点をそれぞれ P,Q,R とする．

$AP=AQ$ より，

$$AP=\frac{AP+AQ}{2}$$
$$=\frac{(AB+BP)+(AC+CQ)}{2}$$
$$=\frac{(AB+BR)+(AC+CR)}{2}$$
$$=\frac{AB+AC+(BR+CR)}{2}$$
$$=\frac{AB+AC+BC}{2}$$
$$=s$$



よって， s の長さは，頂点から，その頂点の角内に作られる傍接円の接点(頂点を共有する２辺の延長線での接点)までの距離である．

この s と，傍接円の半径を利用すると，

> 公式 T4)
> 三角形の角 A,B,C 内にできる傍接円の半径を
> それぞれ r_a,r_b,r_c とすると，
> $$S=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)$$

証明) $\Delta AFI \backsim \Delta API_a$ であるから，

$$AF:AP=FI:PI_a$$

よって， $s-a:s=r:r_a$ 　より，

$$rs=r_a(s-a)$$

ここで， $S=rs$ より結論を得る．他の傍接円についても同様である． 　(終)

なお，この面積公式から，

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{s-a}{S}+\frac{s-b}{S}+\frac{s-c}{S}$$
$$=\frac{3s-(a+b+c)}{rs}$$
$$=\frac{1}{r}$$

なるきれいな関係式も求められる．
さらに，公式 T4 からは，

公式 T5）
三角形 ABC の３辺の長さを a,b,c，内接円の半径を r とすると，

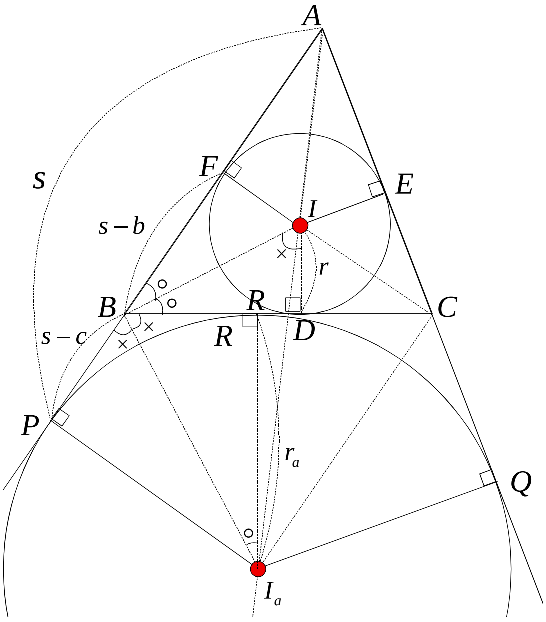
$$S=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}$$

証明）$BR=PB=AP-AB=s-c$.
また，BI,BI_a は，それぞれ $\angle FBD,\angle DBP$ の二等分線であるから，$\angle IBI_a=90°$.
$\angle IBD+\angle DIB=90°$ より，$\angle DIB=\angle RBI_a$
よって，$\Delta I_aRB \backsim \Delta BDI$
これから，$I_aR:BR=BD:ID$
∴　$r_a:(s-c)=(s-b):r$　より，

$$r_a=\frac{(s-b)(s-c)}{r}$$

以上より

$$S=r_a(s-a)=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}$$　（終）



この公式 T5 からは初等幾何の代表的な面積公式が得られる．

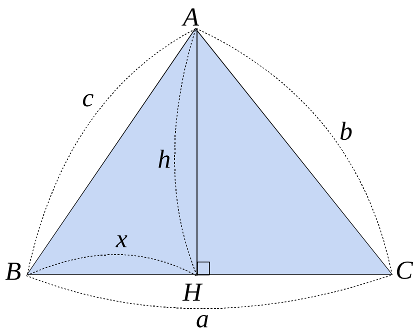
公式 T6）**〈ヘロンの公式〉**
三角形の３辺の長さを a,b,c とすると，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

証明）

$$S=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{rs}$$
$$=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{S}$$

∴　$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$　より結論を得る　（終）

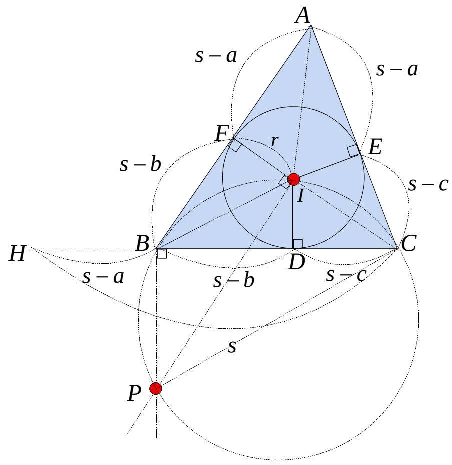


アレキサンドリアの数学者ヘロン(B.C.80 頃)は，エジプト生まれのギリシア人で，工学，測量学の分野でも活躍した人物である．面積・体積計算に数々の業績を残しているが，これは数学的というよりもっと実益的に天文・測量に寄与するものであり，古典幾何学とはその立場を異にしたようだ．

彼の名を冠するこの公式は，高さが分からなくても三角形の３辺の長さが測定できれば(土地の)面積が求められる極めて実用的なものである．自著”Metrica” にその証明があるが，ヘロン以前にこの性質はアルキメデス(B.C.287～212)などは知っていたとも言われており，ヘロンが見つけたものであるかは疑わしい．また，式の中の４つの数の積は次元的に当時の概念を超越しており，極めて特殊であったと考えられ，バビロニアの数学観を彷彿させるものである．

ヘロン自身が考えた証明法は，上述のように三角形の傍接円を利用したものではなく，辺 CB の延長上に

点 H を $AF=BH$ となるようにとることで， $CH=s$ となることを利用したものである．



　辺 CB に垂直な点 B を通る直線と，線分 CI に垂直な点 I を通る直線との交点を P とすると，$\angle CIP=\angle CBP=90°$ であるから，B, I は，線分 CP を直径の両端とする円周上の点である．

　補角の関係から $\angle BIC+\angle BPC=180°$

また， I は三角形 ABC の内心であるから， $\angle AIF+\angle BIC=180°$

よって， $\angle AIF=\angle BPC$ 　より，

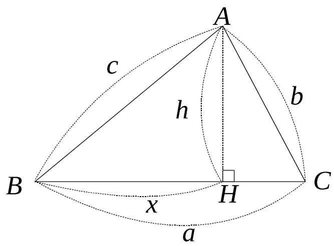
$$\Delta BPC \backsim \Delta FIA$$

この相似比を利用して，

$$CH^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r^2}$$

を導いている．

　しかし， s に図形的な意味を見出さないのであれば，右図のように，頂点からその対辺に下ろした垂線 AH の長さを求め，原公式 $S=\frac{1}{2}ah$ に代入することで証明することもできる．



$$x^2+h^2=c^2$$

$$(a-x)^2+h^2=b^2$$

　辺々引いて， $x=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$.

　これから h が求められるのである．

　ところで，ヘロンの公式は「三角形の決定条件」のひとつである「三辺の長さ」が与えられたときの求積法である．３辺以外の外接円・内接円・傍接円の半径といった他の要素を必要とした公式に対し，最小要素の条件で求められるわけであるから，ヘロンの公式から面積比較をすることで，他の要素の値を抜き出すことができる．

　公式 T2 からは， $R=\dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ ， 公式 T3 からは， $r=\dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

　これから， $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

　また，傍接円との関係から，

公式 T7)　　**〈マイユーの公式〉**

三角形 ABC の内接円の半径を r ,

頂点 A, B, C 内にできる傍接円の半径をそれぞれ r_a, r_b, r_c とすると，

$$S=\sqrt{rr_ar_br_c}$$

証明）公式 T3 と T4 を辺々掛けて，

$$S^4=s(s-a)(s-b)(s-c)rr_ar_br_c=S^2rr_ar_br_c$$

よって， $S^2=rr_ar_br_c$ より明らか　　　　　(終)

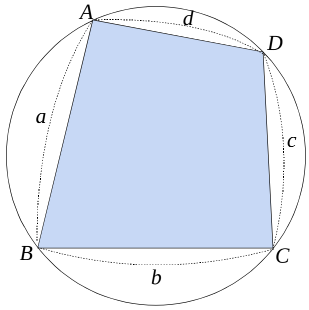
　ヘロンの公式は，公式 T5 からその生成を眺めれば見事に調和が取れている公式であることが分かるが，根号内の s の配置のバランスの悪さはよく指摘されるところである．しかし，四角形の面積の特殊系とみることで，その公式の美しさは再認識されるのである．

四角形の面積公式 S1)**〈ブラマグプタの公式〉**

円に内接する四角形の４辺の長さを a, b, c, d とし，

$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおくと，面積 S は，

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



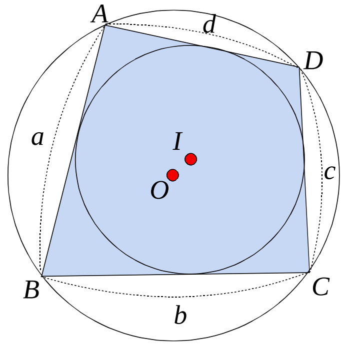
この公式において，辺の長さ d を限りなく０に近づけると四角形は三角形となりヘロンの公式を得る．四角形の面積公式から眺めると， s は「周の長さの半分」と捉える方が自然といえるのである．

ブラマグプタ(598～660)は，アリヤバータ(476～550)とともにグプタ王朝時代のインドを代表する大数学者の一人であり，この公式は著書”Brahma-Sphuta-Siddhanta”に記されている．インド幾何学の特徴は，図形の性質を重んじるよりは，辺や角の間の関係を計算によって導き出す代数的な手法が主にとられており，体系的幾何学からは程遠いものであった．彼が見出した円に内接する四角形の性質として，「辺の中点と直交する対角線の交点を通る直線は，その対辺に垂直である」いわゆる「ブラマグプタの定理」があるが，この証明を彼はしてはいない．幾何に関しては直感的な結論が述べられているだけなのである．内接四角形の面積を与えるこの公式も同様である．なお，公式 S1 の証明については後述する．

さらに，この四角形が円に外接する，いわゆる双心四角形についてはその面積は次のような美しい公式にまとめられる．

四角形の面積公式 S2)
内接円と外接円の両方をもつ双心四角形の面積 S は，

$$S = \sqrt{abcd}$$



証明）四角形が円に外接するとき，「向かい合う２辺の和は等しい」から，

$$a + c = b + d = s$$

これより， $s - a = c,\ s - c = a,\ s - b = d,\ s - d = b$ となり導かれる． (終)

また，四角形が内接円をもつときには三角形と同様に，「周の長さの半分」を利用したものとして，

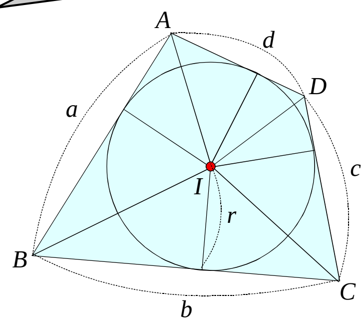
四角形の面積公式 S3)
円に外接する四角形の周の長さの半分を s，四角形の内接円の半径 r とすると，

$$S = rs$$

証明）

$$\begin{aligned} S &= \Delta IAB + \Delta IBC + \Delta ICD + \Delta IDA \\ &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr \\ &= \frac{a+b+c+d}{2}r \\ &= rs \end{aligned}$$

(終)



○三角比でひも解く

古代エジプトにおいては，村落が集中していたナイル川の河畔では，毎年，雨期に川が氾濫するため，破壊された家屋や田畑の復旧のために測量学が発達し，辺の長さと角の大きさの相互関係を調べる三角法が考え出された．これから角を関数として表現することが可能となり，三角形の面積も，ひとめぐりして土地の面積を計測する「三辺が与えられる」場合の面積のみならず，

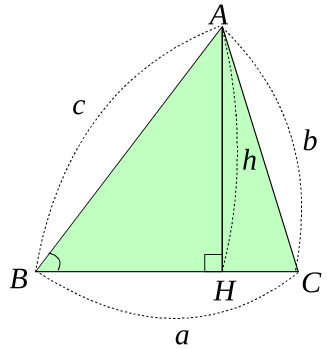
「一辺とその両端の角が与えられる」,「二辺とその間の角が与えられる」

といった三角形の決定条件に対しても求めることが可能となるのである．

公式 T8)
２辺とその間の角が与えられたとき，

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$

証明）原公式において， $h = b\sin C$ から得られる．他も同様 (終)



公式 T9）
１辺とその両端の角が与えられたとき，

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$$

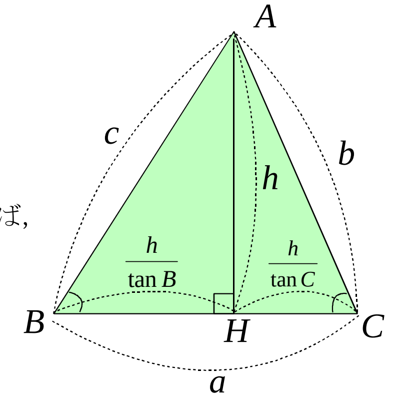
証明）正弦定理から，

$$b=\frac{\sin B}{\sin A}a=\frac{\sin B}{\sin(180^\circ-B-C)}a=\frac{\sin B}{\sin(B+C)}a$$

これを公式 T8 の $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ に代入して求められる．他も同様．　(終)

公式 T10）
１辺と両端の角が与えられたとき，

$$S=\frac{a\tan B\tan C}{2(\tan B+\tan C)}=\frac{b\tan C\tan A}{2(\tan C+\tan A)}=\frac{c\tan A\tan B}{2(\tan A+\tan B)}$$



証明）公式 T9 を変形して得られるが，ここでは原公式から求める．
頂点 A から対辺 BC またはその延長に下ろした垂線の足を h とすれば，

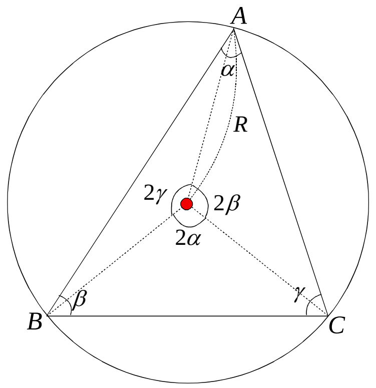
$$\frac{h}{\tan B}+\frac{h}{\tan C}=a$$

から，$h=\frac{\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}a$.
これを原公式に代入．　(終)

２つの内角が与えられただけでは三角形は決定しないが，その形は決まるから，内接円や外接円の半径で三角形の大きさを固定して考えると，

公式 T11）
三角形の外接円の半径を R とすると，

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$



証明）正弦定理より，

$$a=2R\sin A,\ b=2r\sin B,\ c=2r\sin C$$

これを公式 T2 に代入．
また，外接円の中心を O とすると，

$$\Delta ABC=\Delta OBC+\Delta OCA+\Delta OAB$$
$$=\frac{1}{2}R^2\sin 2A+\frac{1}{2}R^2\sin 2B+\frac{1}{2}R^2\sin 2C$$

から後半を得る．　(終)

なお，公式 T11 で面積比較をすることにより，三角形の内角の性質，

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

がいえる．

公式 T12）
三角形の外接円の半径を R，内接円の半径を r とすると，

$$S=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$

証明）$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$ を，公式 T3 に代入する　(終)

公式 T11 と T12 からは,

$$\frac{r}{R}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{2\sin A+2\sin B+2\sin C}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

が得られる.

このように，角という要素を扱うことにより，三角形も様々な角度から求積され，間接的に面積比較をすることによって，副産物としての辺や角に関する公式が得られる.

三角形の決定条件「三辺が与えられる」ときの「ヘロンの公式」も三角比を使うことでその証明も機械的にできてしまう.

〈ヘロンの公式の証明〉

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

ここで， $0<\frac{A}{2}<90^\circ$ であるから， $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

同様に， $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

公式 T8 に２倍角の公式を使って,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ (終)

公式 T13)

$$S=s(s-a)\tan\frac{A}{2}=s(s-b)\tan\frac{B}{2}=s(s-c)\tan\frac{C}{2}$$

証明)

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$ であるから,

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=s(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=s(s-a)\tan\frac{A}{2}$$ (終)

なお，ここで内接円の半径は,

$$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$$

であることより，公式 T2 が得られる.

しかし，ここではもう幾何の発想や s の図形的意味などは計算に呑み込まれてしまっている.

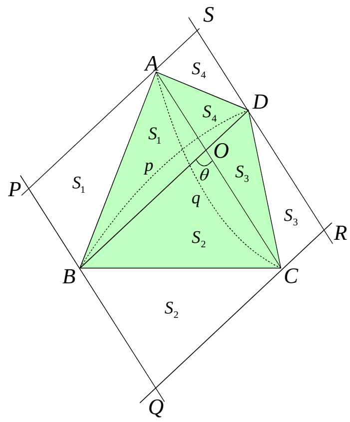
次に，四角形の面積についても考えてみよう.

四角形は，辺の長さのみではその形は決まらない．したがって，付加要素として角の大きさ等を必要とするため，三角比からのアプローチがし易くなる.

四角形の面積公式 S4)

四角形の２つの対角線の長さを p,q ，対角線のなす角を θ とすると,

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$



証明)

右図のように各頂点を通り対角線に平行な直線で囲まれる四角形 $PQRS$ の面積は， $S=pq\sin\theta$.

ここで，平行四辺形 $APBO, BQCO, CRDO, DSAO$ は，その対角線によって面積が等分されることより明らか.

四角形の面積公式 S5)
四角形の４辺の長さを a,b,c,d とし，向かい合う頂点の内角の和を θ とするとき，

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

証明)

三角形 ABD，三角形 BCD において余弦定理より，

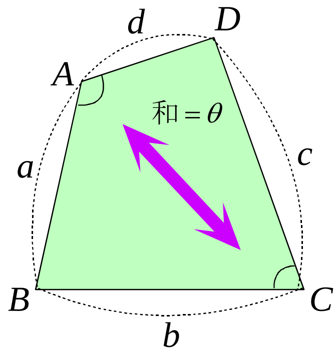
$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$$

これから，

$$a^2-b^2-c^2+d^2=2ad\cos A-2bc\cos C \qquad \cdots\cdots①$$

また，$S=\Delta ABD+\Delta BCD=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$ より

$$4S=2ad\sin A+2bc\sin C \qquad \cdots\cdots②$$



①と②の平方和を求めて，

$$16S^2+(a^2-b^2-c^2+d^2)^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$$

$$\begin{aligned}16S^2&=-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2+4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd\cos(A+C)\\&=-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2+4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd\left(2\cos^2\frac{A+C}{2}-1\right)\\&=-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2+4(ad+bc)^2-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\\&=\{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2\}-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\\&=(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(-a+b+c+d)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\\&=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\end{aligned}$$

(終)

この公式に拠らなくとも，四角形の面積は１つの対角線により分割される２つの三角形の面積和であるから，向かい合う角の和 θ を適当な２つの角に分けてそれぞれの三角形の面積を求めればよい．しかし，この公式の価値は，前述した内接・外接そして双心四角形の面積がここから導けることにある．

外接円をもつ四角形は，向かい合う角が補角の関係にあるから，$\theta=A+C=180°$ より，$\cos^2\frac{\theta}{2}=0$．

公式 S5 に代入して，プラマグプタの公式が得られる．

なお，S5 から，辺の長さの和が一定である四角形は，円に内接するときにその面積が最大となることも分かる．

四角形の面積公式 S6)
内接円をもつ四角形の向かい合う角の和を θ とすると，

$$S=\sqrt{abcd}\sin\frac{\theta}{2}$$

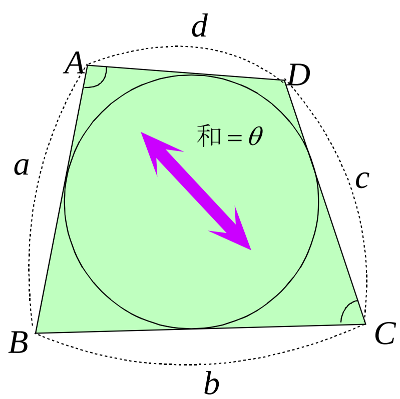
証明) 四角形が円に内接するとき，

$$a+c=b+d=s$$

であるから，

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\sqrt{abcd}\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\sqrt{abcd}\sin\frac{\theta}{2}\qquad\left(\because \sin\frac{\theta}{2}>0\right)\end{aligned}$$

(終)



ここで，$\theta=180°$ とすると，$\sin\frac{\theta}{2}=1$ となり公式 S2 双心四角形の面積を得る．

○解析幾何でひも解く

デカルト(1596～1650)は，図形を紙上に表し遊戯的発想で知恵比べをする古典幾何を否定し，図形の解法を系統的に統一することで，解法のマニュアルを作ろうとした．その結果「座標の概念」が生み出される．図形を座標上の点や曲線が満足すべき方程式として表現し，その方程式を幾つかの公式を利用して解析したのである．直線図形においてはその公式には，

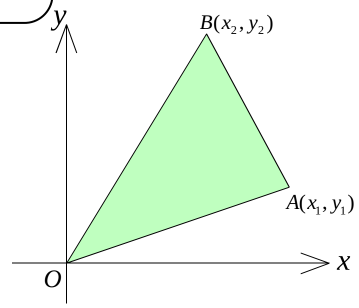
①線分の長さ　②分点　③点と直線の距離

といったものがあり，これらを利用することで三角形の面積を求めることができる．

具体的には，①からは底辺の長さ，③からは高さが計算される．なお，③は，古典幾何のピタゴラスの定理を読み替えたものである．

公式 T14)
異なる３点 $O(0,0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ で作られる ΔOAB の面積は，

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$$



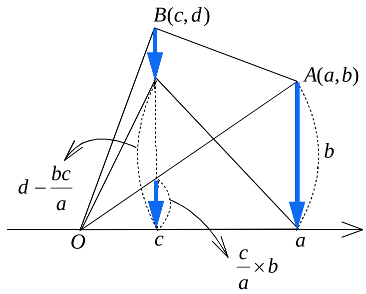
証明) $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

直線 AB の方程式は，$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$

原点と直線 AB との距離 h は，

$$h=\frac{\left|-x_1(y_2-y_1)+y_1(x_2-x_2)\right|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot h$ に代入して結論を得る．　　　　　　(終)



あるいは，右図のように，三角形を y 軸に平行にスライスした線分を x 軸上に落としてできる三角形の面積を求める(カバリエリの原理)とよい．

このとき，高さ h は，

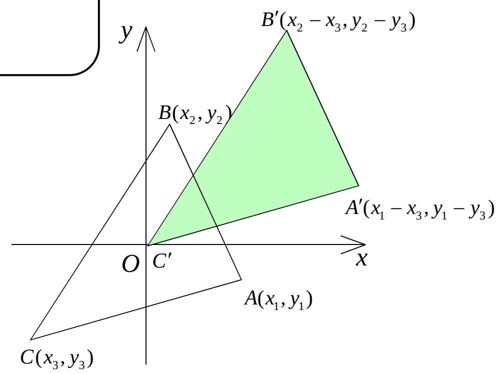
$$h=\left|d-\frac{bc}{a}\right|$$

であるから，原公式に代入して，

$$S=\frac{1}{2}a\left|d-\frac{bc}{a}\right|=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right|$$

公式 T15)
異なる３点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ で作られる ΔABC の面積は，

$$y=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$



証明）点 C が原点になるように平行移動した３点

$A'(x_1-x_3, y_1-y_3)$, $B'(x_2-x_3, y_2-y_3)$, $C(0,0)$

について，公式 T14 を適用して，

$$\Delta ABC=\Delta A'B'C'$$
$$=\frac{1}{2}\left|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right|$$

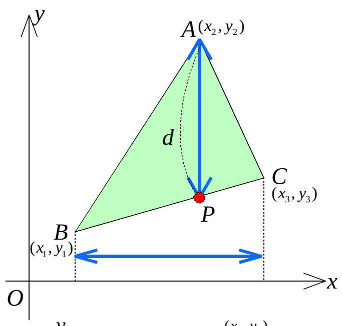
これを整理すればよい．　　　　　　　　　　　(終)

解析(座標)幾何では，もっとも単純な直線図形である三角形の面積は，辺をなす３つの直線の交点である頂点の座標から，最終的にはすべて公式 T14 に帰結してしまうのである．古典幾何が遊戯的であるなら，あまりに味気ない合理的解法手段といえるかもしれない．

そこで頂点の座標以外に幾つかの条件を加えることで少し色をつけてみよう．

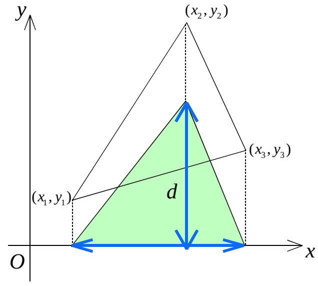
公式 T16)
頂点の x 座標が，x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ である三角形により，
直線 $x = x_2$ が切り取られる線分の長さを d とすると，

$$S = \frac{1}{2}d(x_3 - x_1)$$



証明）線分 d によって分けられる２つの三角形の面積和とみる．

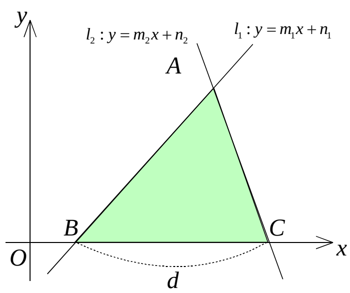
$$S = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d$$
$$= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)d \qquad \text{(終)}$$



なお，直感的には右図のように等積変形をすると明らかである．
また，切り取られる線分の端点 P の座標は，BC を $(x_2 - x_1):(x_3 - x_2)$ の比に分ける点として求めればよい．

公式 T17)
２直線
$$l_1 : y = m_1x + n_1,\ l_2 : y = m_2x + n_2 \quad (m_1 \neq m_2,\ m_1 \neq 0,\ m_2 \neq 0)$$
と x 軸とで囲まれる三角形の面積は，
三角形によって x 軸が切り取られる線分の長さを d とすると，

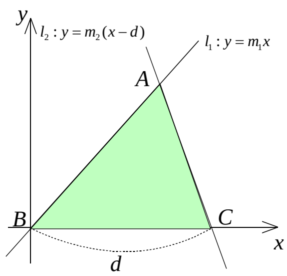
$$S = \frac{d^2}{2\left|\dfrac{1}{m_1} - \dfrac{1}{m_2}\right|}$$



証明）２直線　$y = m_1x,\ y = m_2(x - d)$ で考えても一般性は失わない．

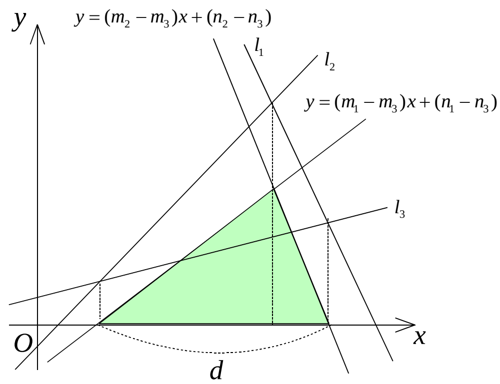
２直線の交点を求めて，$x = \dfrac{dm_2}{m_2 - m_1},\ y = \dfrac{dm_1m_2}{m_2 - m_1}$

$$S = \frac{1}{2}d\left|\frac{dm_1m_2}{m_2 - m_1}\right| = \frac{d^2}{2\left|\dfrac{1}{m_1} - \dfrac{1}{m_2}\right|}$$



公式 T18)
３直線
$$l_1 : y = m_1x + n_1,\ l_2 : y = m_2x + n_2,\ l_3 : y = m_3x + n_3$$
で囲まれる三角形の面積は，

$$S = \frac{\{(m_1(n_2 - n_3) + m_2(n_3 - n_1) + m_3(n_1 - n_2)\}^2}{2(m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)}$$



証明）右図の配置において，直線 l_3 が x 軸に重なるようにせん断，
平行移動すると，l_1, l_2 はそれぞれ，
$$y = (m_1 - m_3)x + (n_1 - n_3),\ y = (m_2 - m_3)x + (n_2 - n_3)$$
となる．この２直線と x 軸で囲まれる三角形の面積を求めればよい．
x 軸との交点の x 座標はそれぞれ，

$$x=-\frac{n_1-n_3}{m_1-m_3},\ x=-\frac{n_2-n_3}{m_2-m_3}$$

$$d=\left|\frac{-n_1+n_3}{m_1-m_3}+\frac{n_2-n_3}{m_2-m_3}\right|$$

$$=\left|\frac{m_1(n_2-n_3)+m_2(n_3-n_1)+m_3(n_1-n_2)}{(m_1-m_3)(m_2-m_3)}\right|$$

よって,

$$S=\frac{d^2}{2}\cdot\frac{1}{\left|\dfrac{1}{m_1-m_3}-\dfrac{1}{m_2-m_3}\right|}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{m_1(n_2-n_3)+m_2(n_3-n_1)+m_3(n_1-n_2)}{(m_1-m_3)(m_2-m_3)}\right|^2\cdot\frac{|(m_1-m_3)(m_2-m_3)|}{|m_2-m_1|}$$

$$=\frac{\{m_1(n_2-n_3)+m_2(n_3-n_1)+m_3(n_1-n_2)\}^2}{2(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)}$$

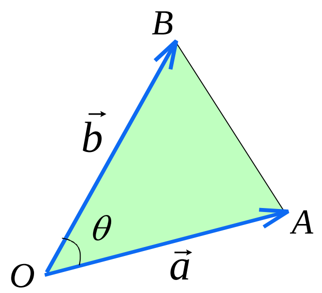
カバリエリ(1598〜1647)もまた解析幾何学の端緒を築いた数学者であり,「曲線は点の集合である」ことより等積変形の扉を開いた．等積変形は一次変換であるが，これを図形の変換ではなく，座標軸そのものの変換と捉え，基底を変えることによって，斜交座標とベクトルの概念が導入される．

三角形の１頂点を原点とし，その頂点を共有する２辺を軸とする座標系では，三角形は合理的に配置され，その要素を求めることが容易になる．三角形の２辺を基底ベクトルとして張られる斜交座標系では，三角形の面積は次のように表される．

公式 T19)

三点を $O(\vec{0}),\ A(\vec{a}),\ B(\vec{b})$ とすると,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$



証明) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ であるから,

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}$$

原点が頂点ではない三角形の面積は，１つの頂点が原点になるように，図形全体を平行移動することで公式 T19 に帰結する．

また，平面において，内積に対し外積を

$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \qquad (\theta\text{は２つのベクトルのなす角})$$

と定義することで，面積は次のように表現できる．

公式 T20)

三点を $O(\vec{0}),\ A(\vec{a}),\ B(\vec{b})$ とすると,

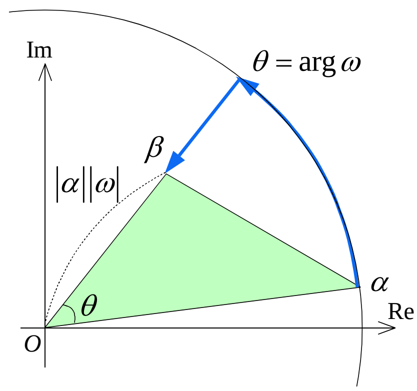
$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

複素数は，除法の演算を認めたベクトルである．

ウェッセル(1745～1818)が考案し，ガウス(1777～1855)によって完成された複素数平面に図形を置くことで，回転・拡縮を自由自在に操ることができるようになる．三角形の面積もまた，辺を頂点のまわりに回転させることで求めることができる．

公式 T21)
複素数平面上の３点， $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形の面積は

$$S=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta})\right|$$



証明） OA, OB のなす角を θ とすれは，

$$S=\frac{1}{2}|\alpha||\beta|\sin\theta$$

$\beta=w\alpha$ とすると，

$$S=\frac{1}{2}|\alpha|^2|w|\sin\theta=\frac{1}{2}|\alpha|^2\cdot\frac{w-\overline{w}}{2i}=\frac{1}{4i}|\alpha|^2\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right)=\frac{1}{4i}(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})$$

ここで， $\alpha\overline{\beta}$ は $\overline{\alpha}\beta$ の共役複素数である．

頂点の配置により面積が負となることから，絶対値をとることで，結論を得る．　　　（終）

公式 T22)
三点を， α, β, γ とすると，三角形 $\alpha\beta\gamma$ の面積は

$$S=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha})\right|$$

証明） $-\gamma$ 平行移動した３点， $0, \alpha-\gamma, \beta-\gamma$ で公式 T21 を適用する．

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{4i}\left\{(\alpha-\gamma)\left(\overline{\beta-\gamma}\right)-\left(\overline{\alpha-\gamma}\right)(\beta-\gamma)\right\}\\
&=\frac{1}{4i}\left\{(\alpha-\gamma)\left(\overline{\beta}-\overline{\gamma}\right)-\left(\overline{\alpha}-\overline{\gamma}\right)(\beta-\gamma)\right\}\\
&=\frac{1}{4i}\left\{\left(\alpha\overline{\beta}-\alpha\overline{\gamma}-\overline{\beta}\gamma+\gamma\overline{\gamma}\right)-\left(\overline{\alpha}\beta-\overline{\alpha}\gamma-\beta\overline{\gamma}+\overline{\gamma}\gamma\right)\right\}\\
&=\frac{1}{4i}\left\{\left(\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}\right)-\left(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha\right)\right\}\\
&=\frac{1}{4i}\left\{\left(\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}\right)-\left(\overline{\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

（終）

斜交座標を，一次変換，

$$f:A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

による基底の変換とみると，作用素 A の行列式 $ad-bc$ が，図形の面積の倍率を表すことになる．
行列で，三角形の面積をまとめてみよう．

公式 T23)三角形 ABC の３頂点の座標を $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)$ とすると，

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&\vec{a}\\1&\vec{b}\\1&\vec{c}\end{vmatrix}=\frac{i}{4}\begin{vmatrix}1&\alpha&\overline{\alpha}\\1&\beta&\overline{\beta}\\1&\gamma&\overline{\gamma}\end{vmatrix}$$

ただし， $\vec{a}=(x_1,y_1), \vec{b}=(x_2,y_2), \vec{c}=(x_3,y_3)$
$\alpha=x_1+y_1i, \beta=x_2+y_2i, \gamma=x_3+y_3i$　とする．

○ピックの定理でひも解く

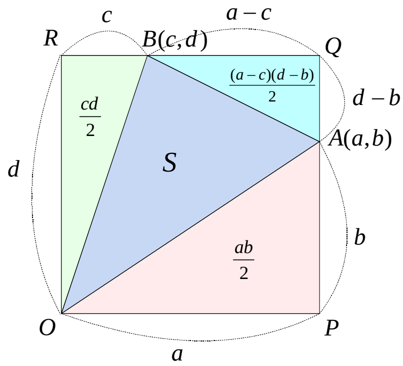
原始的には座標平面上の三角形の面積は次の方法で求めることができる．

> 公式 T24)
> ３点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ を頂点とする三角形の面積は，
> 直線 $x=Max(x_i),\ x=Min(x_i)$
> 直線 $y=Max(y_i),\ y=Min(y_i)\qquad (i=1,2,3)$
> で囲まれる長方形の面積から S 以外の図形の面積を引いたものである．

公式にまとめるまでもなく自明である．

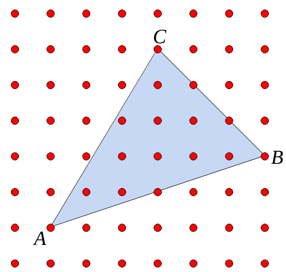
右図であれば，

$$S=\square OPQR-(\Delta OPA+\Delta AQB+\Delta OBR)$$
$$=ad-\frac{1}{2}\{ab+cd+(a-c)(d-b)\}$$
$$=ad-\frac{1}{2}(ad+bc)$$
$$=\frac{1}{2}(ad-bc)$$



このように，図形の切り分けで面積を求めることができるが，この応用として次の面白い定理を導くことができる．

> 公式 T25) **〈ピックの定理〉**
> 間隔 1 に配置された格子点のみを頂点にもつ多角形の面積 S は，
> 多角形の周上の点の個数を E，内部の点の個数を F とすると，
> $$S=\frac{1}{2}E+F-1$$



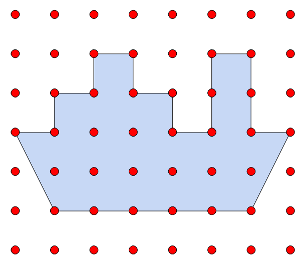
右図の三角形 ABC では周上の点は $E=6$ 個であり，内部の点は $F=10$ 個であるから，

$$S=\frac{1}{2}\times 6+10-1=12$$

である．実際， $A(0,0),\ B(6,2),\ C(3,5)$ として公式 T14 で確認すると，

$$S=\frac{1}{2}(30-6)=12$$

である．



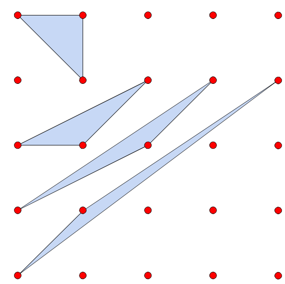
*ピック(1859-1942)*はオーストリア・ウィーン生まれの数学者である．1888 年にプラハ大学の教授に就任し，1899 年に格子点多角形における面積公式を発表する．晩年はユダヤ人であったことから収容所に送られてその生涯を閉じる．

ピックの定理は頂点が「格子点」という制約はあるが，格子点でない場合も，ある程度は図形を拡大縮小し，頂点の座標を整数化することで対応可能である．しかし何よりも多角形全般において(凹多角形も含み)その面積が求められることは他に例がなく，「点を数えて面積を求める」ことがユニークなのである．

その証明は多角形を構成する頂点を結んで，多角形を最小面積の三角形の和として表現することから始める．この面積最小の基本三角形は頂点のみを格子点とし，内部，および周に格子点を含まない三角形であり，ピックの定理に拠れば，$E=3,F=0$ であるから，その面積は

$$S=\frac{3}{2}+0-1=\frac{1}{2}$$

となる．右図がその基本三角形の例である．



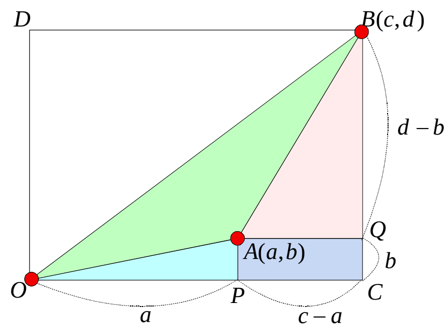
補題 P）基本三角形の面積は $\frac{1}{2}$ である．

まずこのことを証明しよう．

証明）

基本三角形 OAB は右図のような配置で考えてよい．その頂点を

$O(0,0),\ A(a,b),\ B(c,d) \quad (a,b,c,d \in N)$



とする．長方形 $OCBD$ の内部の点の個数は $(c-1)(d-1)$ 個であるから三角形 OCB の内部点の個数 N は，

$$N=\frac{(c-1)(d-1)}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

である．

同様に，三角形 OPA，三角形 AQB，四角形 $APCQ$ の内部点の個数 N_1, N_2, N_3 は，それぞれ，

$$N_1=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

$$N_2=\frac{(c-a-1)(d-b-1)}{2}$$

$$N_3=(c-a-1)(b-1)$$

である．また，線分 AP, AQ の両端を除く内部点（線分上の点）の個数 L_1, L_2 は，それぞれ，

$$L_1=b-1,\ L_2=c-a-1$$

よって，三角形 OCB の内部点の個数は，点 A を含めて，

$$N=\left(N_1+N_2+N_3\right)+\left(L_1+L_2\right)+1$$

ここで，

$$N_1+L_1+\frac{N_3}{2}=\frac{(b-1)(a+1)}{2}+\frac{(c-a-1)(b-1)}{2}=\frac{(b-1)c}{2}$$

$$N_2+L_2+\frac{N_3}{2}=\frac{(c-a-1)(d-b+1)}{2}+\frac{(c-a-1)(b-1)}{2}=\frac{(c-a-1)d}{2}$$

であるから，

$$N=\left(N_1+L_1+\frac{N_3}{2}\right)+\left(N_2+L_2+\frac{N_3}{2}\right)+1=\frac{(b-1)c+(c-a-1)d+2}{2} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より，

$$\frac{(c-1)(d-1)}{2}=\frac{(b-1)c+(c-a-1)d+2}{2}$$

これを整理して

$$ad-bc=1$$

一方，公式 S より，

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|=\frac{1}{2} \qquad \text{（終）}$$

この結果を用いて，ピックの定理を証明する．

ピックの定理において，E, F は整数であるから面積 S は，$\frac{1}{2}$ の整数倍の値 $\frac{n}{2}\ (n \in N)$ となる．自然数 n の命題と考え，数学的帰納法で証明する．

証明）

(1) $n=1$ のとき，

多角形は基本三角形であるから，$E=3, F=0$ より，

$$S=\frac{E}{2}+F-1=\frac{3}{2}+0-1=\frac{1}{2}$$

で明らかに成立する．

(2) $n≦k$ であるすべての自然数 n について成立すると仮定し，

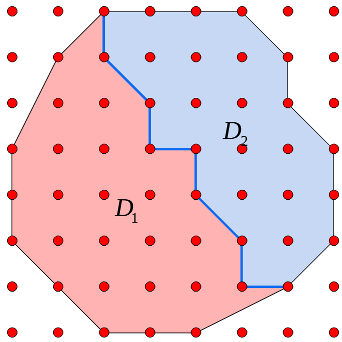
$n=k+1$ で成立することを証明する．

面積$\dfrac{n}{2}=\dfrac{k+1}{2}$である多角形を右下図のように，格子点を結んできる折れ線で２つの図形D_1, D_2に分割する．この２つの図形D_1, D_2の面積，内部点の個数，周上の点の個数をそれぞれ，$S_i, E_i, F_i\ (i=1,2)$とすると，$S_i \leqq \dfrac{k}{2}$であるから，仮定より，

$$S_i=\frac{E_i}{2}+F_i-1\ (i=1,2),\quad S=S_1+S_2$$

である．ここで，格子点を結んでできた折れ線の両端を抜かした格子点の個数をmとすると，

$$E=(E_1-m)+(E_2-m)-2$$
$$F=F_1+F_2+m$$

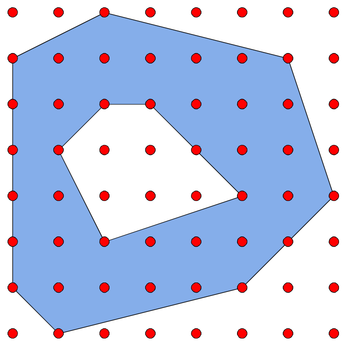


以上より，

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\&=\frac{E_1+E_2}{2}+(F_1+F_2)-2\\&=\frac{E+2m+2}{2}+(F-m)-2\\&=\frac{E}{2}+F-1\end{aligned}$$

(終)

ピックの定理は，格子点で作られていれば凸多角形のみならず凹多角形でもその面積を「数える」ことができる．しかし，右図のように，内部に穴があるドーナツ状の図形に対しては成立しない．この場合，内部の穴の内側の部分は，図形としては「外側」になる．格子点の個数を数えてみると，境界線上の点の個数は，$E=12+6=18$．内部の点の個数は，$F=21$．よって，面積Sは，



$$S=\frac{18}{2}+21-1=29$$

として得られるはずである．しかし実際は，穴を埋めた図形D_1の面積S_1から穴の部分D_1の面積S_2を引いて求めると，

D_1の境界線上，内部の点の個数はそれぞれ$E_1=12, F_1=32$であるから，

$$S_1=\frac{12}{2}+32-1=37$$

D_2の境界線上，内部の点の個数はそれぞれ$E_2=6, F_2=5$であるから，

$$S_2=\frac{6}{2}+5-1=7$$

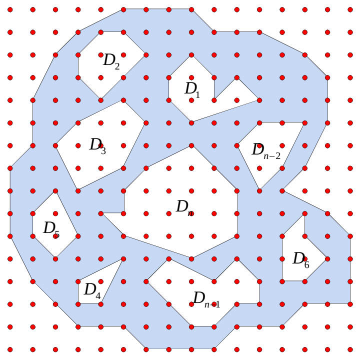
よって，$S=S_1-S_2=30$となるから，公式にあてはめると面積が減ってしまう．
そこで，この場合にも適用できるようにピックの定理を拡張してみよう．

公式 T26）内部にn個の穴が空いている格子点多角形の面積Sは，境界線上，内部の点の個数をそれぞれE, Fとすると，

$$S=\frac{E}{2}+F+(n-1)$$

証明）

図形の内部の穴を$D_i\ \ (i=1,2,\cdots n)$とし，D_iの内側をすべて埋めた場合の面積をS_iとする．また，D_iの境界線上，内側の点の個数をそれぞれ，$E_i, F_i\ (i=1,2,3,\cdots n)$とする．
さらに，図形の穴をすべて埋めた図形の面積をS_0，境界線上の点，内部の点の個数をそれぞれE_0, F_0とする．



$$E=\sum_{i=0}^{n}E_i,\quad F=F_0-\sum_{i=1}^{n}F_i-\sum_{i=1}^{n}E_i$$

であり， $S=S_0-\sum_{i=1}^{n}S_i$ となる．公式 T25 のピックの定理より，

$$S_i=\frac{E_i}{2}+F_i-1 \quad (i=0,1,2,\cdots\cdots n)$$

よって

$$\begin{aligned}
S&=\frac{E_0}{2}+F_0-1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{E_i}{2}+F_i-1\right)\\
&=\left(F_0-\sum_{i=1}^{n}F_i\right)+\frac{E_0}{2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i}{2}+(n-1)\\
&=F+\sum_{i=1}^{n}E_i+\frac{E_0}{2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i}{2}+(n-1)\\
&=F+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}E_i+(n-1)\\
&=F+\frac{E}{2}+(n-1) \qquad \text{(終)}
\end{aligned}$$

ピックの定理は平面上の任意の格子点図形に対して応用できるのである．

ところでピックの定理は「点を数える」ことで面積を求めるものであるが，「面を数える」ことで求積する面白い公式がインターネット上で公開されていた．(www10.plala.or.jp/h-nukaga/math/mathematics.htm)

公式 T27)〈**額賀の定理**〉
格子多角形の面積 S は，
格子１マス(完全な枠)の個数を m，
１本の辺と格子枠に囲まれている枠(不完全な枠)の個数を n とするとき，

$$S=m+\frac{n}{2}$$

下図において，格子１マスは１辺の長さ１の正方形のことであり，その個数は， $m=4$
不完全な枠は，マスの中に図形の１辺のみが含まれる場合で， $n=12$
よってその面積は，

$$S=4+\frac{12}{2}=10$$

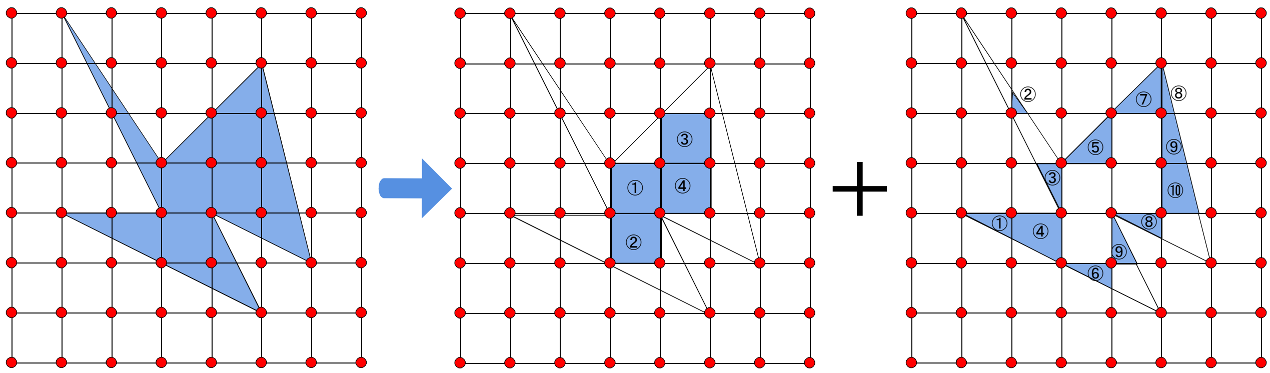
また，ピックの定理から， $E=12, F=5$ より，

$$S=\frac{12}{2}+5-1=10$$

確かに一致している．

この定理は額賀博氏(茨城県旭村立旭北小学校教諭)が発見したものであり，その証明は本人(帰納的)，中谷清茂(幾何学的)，平井安久(代数的)の三氏により，三様の方法で証明されており，内部に穴が空いている図形に対してもこの定理は成立している．

諸氏で証明を試みられたい．



○あとがき（文献抄）

三角形の面積の求め方はあまりに当たり前すぎて，その当たり前のことをまとめるのは難しいものだ．

三角形の面積公式は，古くは古代エジプトの「アーメスのパピルス」にその記述がある．底辺の長さに他の１辺をかけて(すなわち２辺の積で)面積を求めていた．円の面積は，直径から$\dfrac{1}{9}$を引いたものの２乗としており，どちらも経験だけが根拠の大雑把なものであった．ナイル川氾濫による復旧工事はなによりも実用性を重んじ，経験則としてのみの公式を集積していったのである．対して，地中海を隔ててエジプトの対岸に位置するギリシアは，温暖な気候に恵まれ，人々はゆっくりと文化を育んでいく．自然の中の数理性を論理的に解明することに努め，それは哲学へと昇華していった．幾何は科学性を帯びるようになり，「定理の証明」に重きが置かれ，ピタゴラス(学派)による三平方の定理の発見は，論理化にさらなる拍車をかけていく．

アテナイ郊外のアカデモスの森に学校アカデメイアを建設したプラトン(BC427～BC347)は，校門の上に，

「幾何学を知らざるものは入るべからず」

と掲げた．この学問の杜は多くの数学者を輩出し，その中にユークリッドという若者がいた．敗戦により国の独立を失ったギリシアは，文化も衰退し，その座を再びエジプトのアレキサンドリアに譲ることになるが，この地にプトレマイオス王に請われ渡ったユークリッドは，幾何学の難しさに根をあげた王に，

「幾何学に王道なし」

といったという．やがてユークリッドは，幾何学の教科書「原本」(B.C280 頃)を完成させ，古典幾何学はここに完熟期を迎えるのである．

「原論」は，発刊から 2200 年以上たった現在でも愛読されている聖書につぐベストセラーと言われている．内容は 48 の命題からなり，その第 34 番目には，

「三角形の面積は底辺が共通で，頂点が他の頂点である平行四辺形の面積の半分」

であることが記され，続いて，第 35 番目には，

「平行四辺形の面積は，辺の長さと高さが等しい長方形の面積に等しい」

ことが述べられている．原論は当時の教科書でもあり，原論で学んだ人たちにより，三角形の求積は研究され続けるのである．

さて，本稿では，その求積を４つの観点から眺めることにした．

１つめは，古典幾何学の観点．外接円が与えられた場合の面積は正弦定理から，同様に，ヘロンの公式は余弦定理から容易に面積が得られるが，ここでは，伝統幾何学を重んじ扱わないことにした．特にヘロンの公式に関しては，「周の長さの半分」の図形的意味を大事にした．土地をひとめぐりすることで，面積が求められることは興味深いものであり,その距離(の半分)が,核になっているのである．(**参考文献** 1,2)．

２つめは，三角比(法)の観点．辺の長さだけでなく角の大きさを測ることで，古典幾何では証明が困難な性質も導くことが可能となった．異端的なヘロンの公式は三角比を使った代数的解法により，四角形の特殊形としてその価値を見出していく．(**参考文献** 3,4,5)

３つめは，解析幾何の観点．White paper の上にあった図形は，方眼紙の上に置かれることによって，曲線・直線の方程式としてそのフィギァが読み取られる．ただこのことにより，図形は周(皮)のみとなってその内部は失われたかもしれない．余計，求積への欲求は深まるのである．さらに，斜交座標・複素数平面といった土台を選ぶことで面積表現も異なってくることになる．(**参考文献** 6)

最後は，初等整数論の観点．ピックの定理は，三角形の決定条件に対してその面積を求める公式ではない．個々の図形に対してそれが三角形でなくとも面積を数えることができる．格子点という制約はあるが，知恵(古典幾何)や知識(解析幾何)と違い，手と目から面積が求められるのである．その証明は，帰納法によるが，そのために必要な補題Ｐは，図形の切り分けがとても興味深く，インターネット上で公開されていたものを参考にさせていただいた(**参考文献** 7)．ピックの定理そのものは，幾つかの書物で解説されている(**参考文献** 8,9,10)

さて，本稿では２７通り三角形の面積公式を用意した(公式 T26 は三角形の公式とはいえぬが)．中には執筆中に作ったものもあるから，玉石混交である．

「幾何学とはつまらないことを考える学問だ．三角形の２辺の和が１辺より大を証明したりする．
こんなことは犬でも知っている」

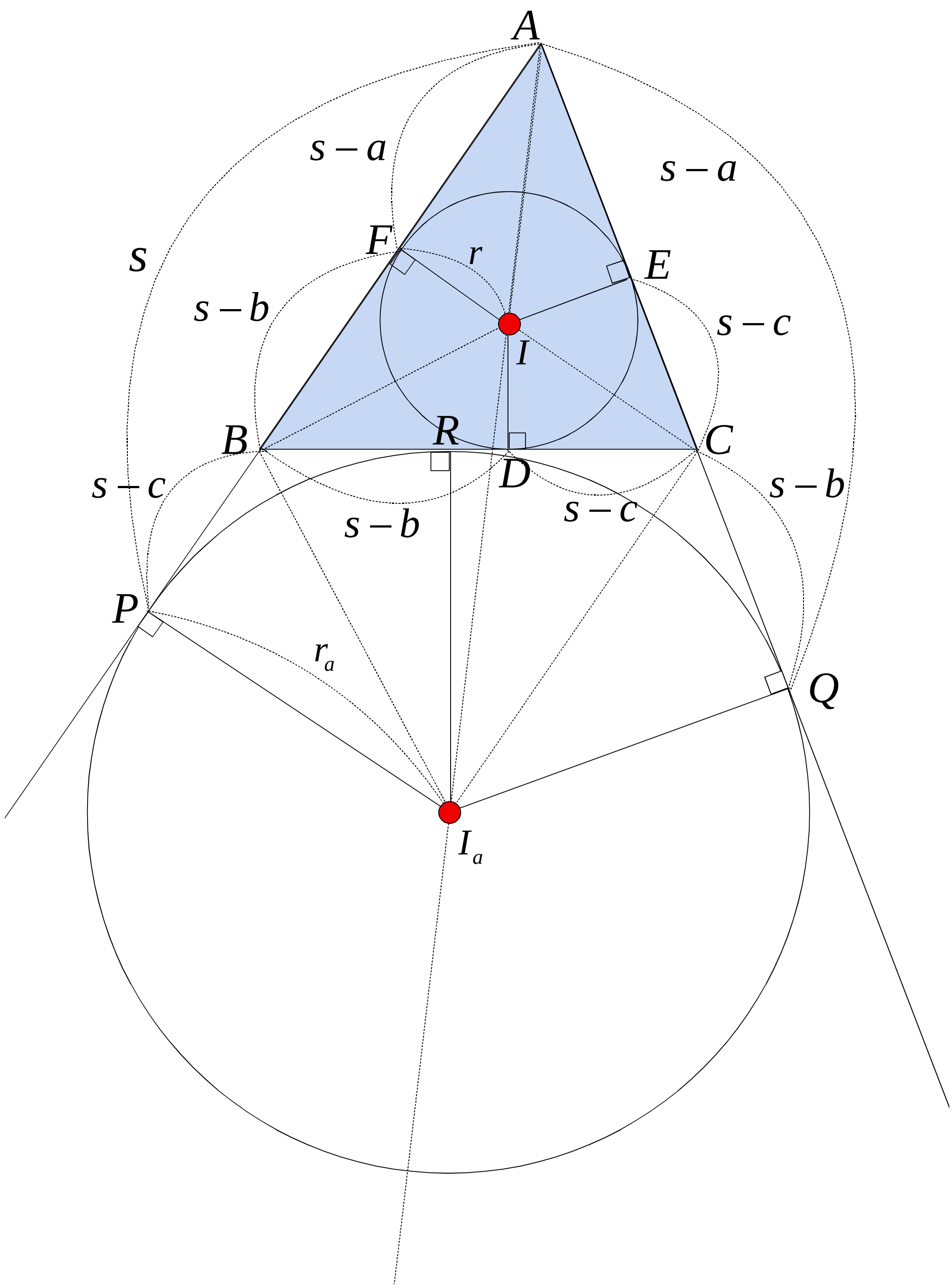
といったのは，文豪菊池寛であるが，三角形の面積も然り．

「底辺かける高さ割る２」

どんなに数学から離れてしまった人だって，誰だって唱えることができる．それほど当たり前の公式である．当たり前のことだから，なぜ当たり前なのかとあがきたくて公式を乱造してしまった．でもそれは，「原論」から始まった，もっとも単純な図形の求積という知的欲求なのである．

「原論」（ストイケイア）はギリシア語でアルファベットという意味であるが，それは１から始めるということでもある．感興の赴くままに悠久のとき(刻)に身(心)をゆだねるのもいいのかなと思う．

(2004.8.7)



《参考文献》
1　「数学の広場　ふく面の数学」　遠山　啓　著(ほるぷ出版)
2　「数学史」　矢野健太郎　著(科学新興社)
　ヘロン自身が解いたといわれるヘロンの公式の証明法
3　「数学史」　　小杉　肇　著(槇書店)
4　「○△□の遊学」　佐藤健一　著(研成社)
5　「定理公式証明辞典」　笹部貞一郎　編　(聖文社)
6　公式 T17 は，数実研「あなたの意見のまとめ」(2002/2/3)に寄せられた，「小松の公式」に証明を与えたものです．それを拡張して３つの直線で囲まれる三角形の面積を求めました．
7　www2.ocn.ne.jp/~mizuryu/hadai/kadai9kaitou.html このページでは平面図形におけるオイラーの定理を利用して求めている．参考にされたし．
8　「数学の広場　数学サロン」　遠山　啓　著(ほるぷ出版)
9　「幾何学入門」　コクセター著(明治図書)
10　「中高一貫数学コース　数学１をたのしむ」　志賀浩二　著(岩波書店)