

メネラウスで三角形を巡る

札幌旭丘高校 中村文則

はじめに

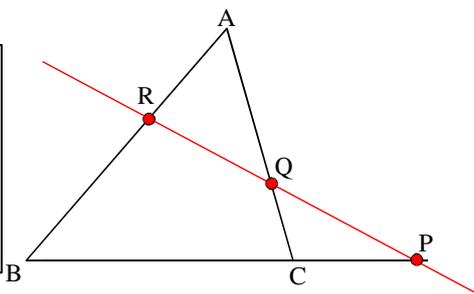
平面幾何は補助線のヒラメキを解法の主たる要素とすることが多く、引き方如何により結論までの距離がずいぶん違うものとなる。補助線により角の相等、図形の相似関係が浮き上がり、解法へと導かれることになるが、この過程を一気にバイパスし普遍化したものがメネラウスの定理である。

メネラウス(Menelaus, 98 頃)はヘレニズム後期に活躍した学問の杜アレクサンドリアの天文学者であり、著書「球面論」では球面幾何学を論じている。科学的価値に重きをおいて幾何学が研究されたこの時代において、彼はEuclid原論に倣い球面三角形の合同の定理を証明している。彼の名を冠するメネラウスの定理は「球面論」の中に記されており「直線が三角形を切る」ことにより分割された辺の比のバランスを謳っている。

《メネラウスの定理》
 三角形 ABC の頂点を通らない直線が、3 辺 BC, CA, AB またはその延長と交わる点をそれぞれ P, Q, R とすると、

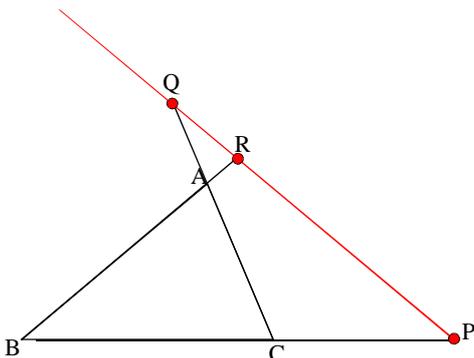
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

である。



頂点から頂点へ分点を中継して巡る(メネル)と、一周したときに辺と分点を結ぶ線分の比の積が1となるわけだが、これほど簡潔に美しくバランスを内存する定理は類を見ない。この定理から図形の補助線はヒラメキではなく、実は任意の直線に仕組まれたものであり、論理的に比が配置されていることが分るのである。

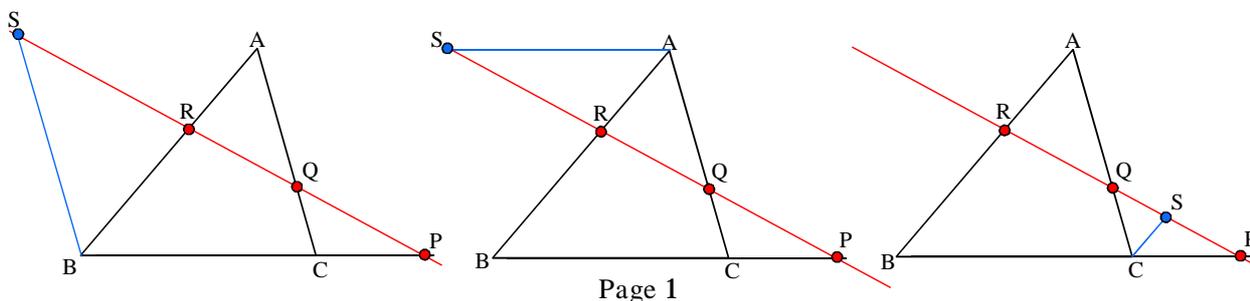
図形を直線が切るというイメージは俗物的ではあるが、科学や論証を重ねたこの時代においてには妙に新鮮に映る。メネラウスがこの定理にどれだけの価値を見出したかは分らぬが、既にユークリッド、アルキメデス、アポロニウスの3大数学者により古代幾何学は円熟し、図形の性質は枝葉を整える程度しか残されていなかったヘレニズム後期においては傑出した定理といえる。この定理からは様々な性質が生まれ出され、後生の射影幾何の萌芽をさえ感じさせるのである。さらには、定理が記される「球面論」では、メネラウスは球面においてもほぼ同様の性質が成り立つことを示しており、ユークリッド幾何の土壌にありながらも独自の幾何学を展開することで、意識はせずに非ユークリッド幾何学に到達していたともいえる。時代を超えて横たわるメネラウスの定理を巡ってみよう。



定理の証明

補助線を引くことで、潜んでいる相似比を浮かびあがらせればよい。この場合の補助線もけっしてヒラメキではない。相似な図形を作ろうとすれば自然に引き方は決まってしまう。幾つかの例で考えよう。なお、以後三角形を切る直線は l として話を進める。

(1) 頂点を通り対辺に平行な直線を補助線とする



頂点 A を通り対辺 BC に平行な直線の場合で証明してみよう。直線 l との交点を S とする。

$$\triangle RAS \sim \triangle RBP \text{ より } \frac{AR}{RB} = \frac{AS}{BP}$$

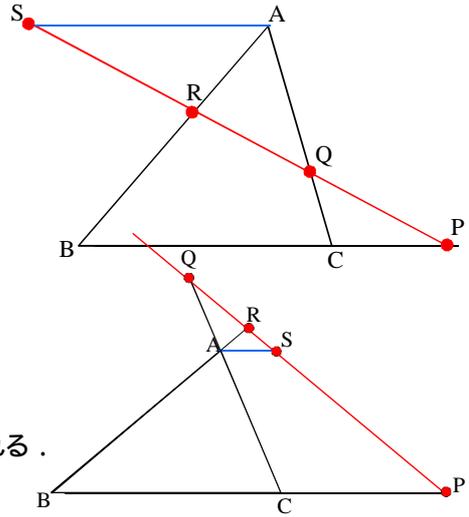
$$\triangle QAS \sim \triangle QCP \text{ より } \frac{CQ}{QA} = \frac{CP}{AS}$$

よって、

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{AS}{BP} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{PC}{AS} = 1 \quad \text{Q.E.D}$$

同様に、頂点を通る対辺に平行な直線と対辺の2直線に辺の分点の比を移すことで他の場合の証明もできる。

また、直線 l が三角形の各辺と交わらない場合も同様に証明される。



(2) 頂点を通り直線 l に平行な直線を補助線とする

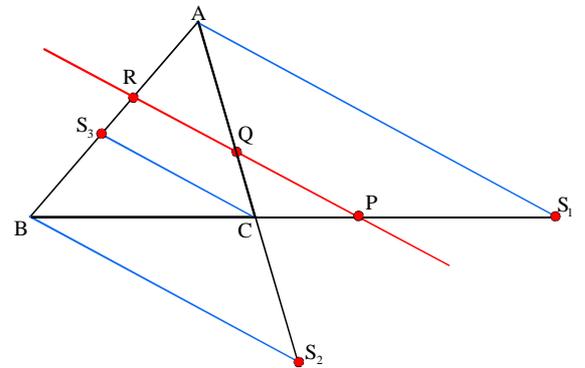
頂点 A を通り直線 l に平行な直線が辺 BC の延長と交わる点を S_1 とする。

$$AS_1 \parallel PQ \text{ より } \frac{AR}{RB} = \frac{S_1P}{PB}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{CP}{PS_1}$$

よって、

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{S_1P}{PB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CP}{PS_1} = 1$$

頂点 B, C を通り直線 l に平行に引いた直線と、辺 CA, AB またはその延長との交点をそれぞれ S_2, S_3 とした場合も同様に証明される。



(3) 三角形の面積比を利用する

右図において、

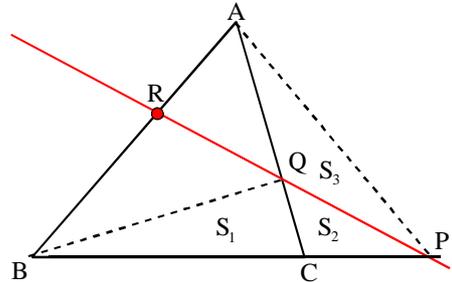
$$\triangle QBC = S_1, \triangle QCP = S_2, \triangle QPA = S_3$$

とすると、

$$\frac{AR}{RB} = \frac{S_3}{S_1 + S_2}, \quad \frac{BP}{PC} = \frac{S_1 + S_2}{S_2}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{S_2}{S_3}$$

よって、

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{S_3}{S_1 + S_2} \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_2} \cdot \frac{S_2}{S_3} = 1$$



(4) 各頂点から直線 l に垂線を引く

頂点 A, B, C から直線 l に下ろした垂線の足をそれぞれ A', B', C' とすると、

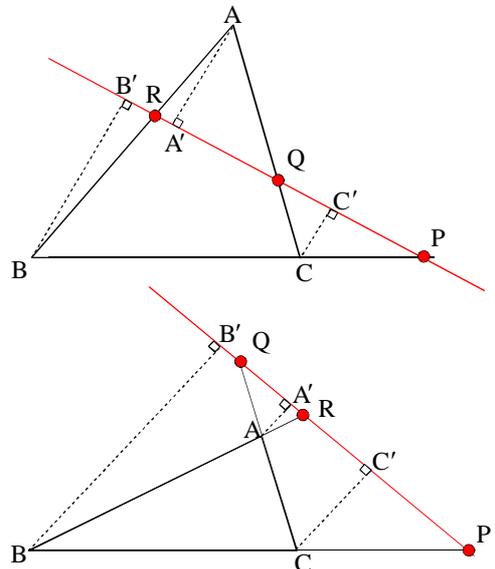
$$\triangle RAA' \sim \triangle RBB' \text{ より } \frac{AR}{RB} = \frac{AA'}{BB'}$$

$$\triangle PBB' \sim \triangle PCC' \text{ より } \frac{BP}{PC} = \frac{BB'}{CC'}$$

$$\triangle QCC' \sim \triangle QAA' \text{ より } \frac{CQ}{QA} = \frac{CC'}{AA'}$$

以上より、

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} = 1$$



他の証明に比して補助線の本数が多い分だけ面倒な証明に思える。しかし、頂点を直線 l に落としてその射影を考えることは、後述するメネラウスの定理の一般化につながるのである。

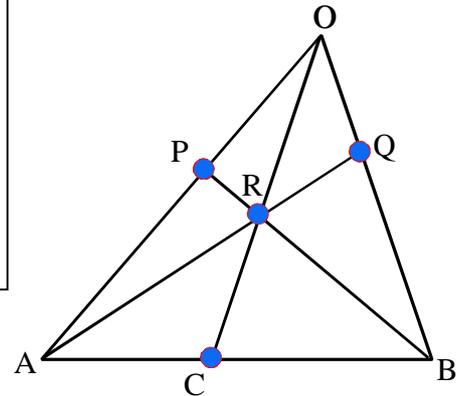
メネラウスの定理の利用

例 1)

三角形OABにおいて、辺OA,OB上の2点をそれぞれP,Qとし、線分BP,AQの交点をRとする。さらに直線ORと辺ABとの交点をCとすると、

$$\frac{OP}{PA} + \frac{OQ}{QB} = \frac{OR}{RC}$$

が成り立つ。



証明)

直線PBが三角形OACを切るとき、メネラウスの定理より

$$\frac{OP}{PA} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CR}{RO} = 1$$

これより、 $\frac{OP}{PA} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{RO}{CR}$ ……

直線QAが三角形OCBを切るとき、メネラウスの定理より

$$\frac{OQ}{QB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CR}{RO} = 1$$

これより、 $\frac{OQ}{QB} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{RO}{CR}$ ……

、を辺々加えて、

$$\frac{OP}{PA} + \frac{OQ}{QB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{RO}{CR} + \frac{AC}{AB} \cdot \frac{RO}{CR} = \frac{OR \cdot (AC + CB)}{AB \cdot RC} = \frac{OR \cdot AB}{AB \cdot RC} = \frac{OR}{RC}$$

Q.E.D

例えば、OAを1:2の比に内分する点をP、OBを3:1の比に内分する点をQとすると、

$$\frac{OR}{RC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$OR : RC = 5 : 6$$

が得られる。

例 2)

三角形ABCの辺BC,CA,ABをそれぞれm:n (m≠n)の比に内分した点をD,E,Fとする。

線分AD,BE,CFで囲まれる三角形の面積と三角形ABCとの面積比を求めよ。

解) 各線分との交点を右図のようにP,Q,Rとして△PQRの面積を求める。

$$\Delta PQR = \Delta ABC - (\Delta PAB + \Delta QBC + \Delta RCA)$$

である。

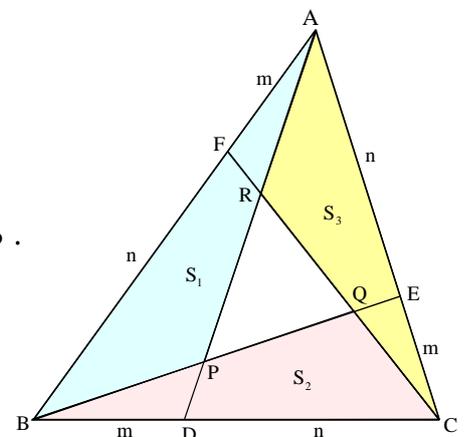
ここで、 $S = \Delta ABC$ 、 $m < n$ とし、 ΔPAB の面積を求めてみよう。

直線BEが三角形ADCを切ると考えると、メネラウスの定理より、

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

よって、 $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{n} = 1$ より、

$$AP : PD = (m+n)n : m^2$$



である .

$$\begin{aligned}\Delta PAB &= \frac{n^2 + mn}{m^2 + mn + n^2} \Delta ABD \\ &= \frac{n^2 + mn}{m^2 + mn + n^2} \cdot \frac{m}{m+n} \Delta ABC \\ &= \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} S\end{aligned}$$

同様に考えると明らかに

$$\Delta PAB = \Delta QBC = \Delta RCA$$

であることが分かる . よって ,

$$\Delta PQR = S - 3\Delta PAB = S - \frac{3mn}{m^2 + mn + n^2} S = \frac{(m-n)^2}{m^2 + mn + n^2} S$$

以上より , ($m > n$ も同様に考えると)

$$\Delta ABC : \Delta PQR = m^2 + mn + n^2 : (m-n)^2$$

(終)

また , 直線 EC が , 三角形 ABD を切ると考えると , メネラウスの定理より ,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{FC}{CD} \cdot \frac{DR}{RA} = 1$$

よって , $\frac{m}{n} \cdot \frac{m+n}{n} \cdot \frac{DR}{RA} = 1$ より ,

$$AR : RD = m(m+n) : n^2$$

である .

これから ,

$$AR : RP : PD = m^2 + mn : |m^2 - n^2| : m^2$$

であり , 他の線分についても同様の比が成り立つ .

例えば , 2:1 の比に各辺を内分すると ,

その面積比は $\frac{1}{7}$ であり , $AR : RP : PD = 5 : 3 : 4$

となる .

メネラウスの定理の逆

平面幾何において辺の長さや面積を求める問題にはメネラウスの定理の利用が有用である .

とるこで , 平面幾何では ,

3つの点が同一直線上に存在する (共線問題)

3つの直線が1点で交わる (共点問題)

であることが重要な性質として扱われる . これらのことの証明は , メネラウスの定理の逆を考えることにより容易になることがある .

《メネラウスの定理の逆》

三角形 ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長上にある 3 点を P, Q, R とする . このとき ,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

であれば , 3 点 P, Q, R は一直線上にある .

証明)

R, Q が辺の内分点であるとき , 辺 BC の延長と直線 RQ が交わる点を P' とする .

メネラウスの定理より ,

$$\frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots\dots$$

また, 条件より,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots\dots$$

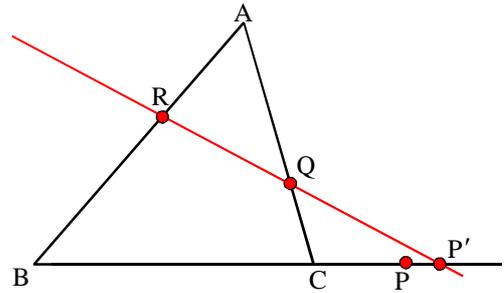
, より

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}$$

ここで, 点P, P' はともに直線BC上の点であるから, $P = P'$ 以上より, P, Q, R は一直線上にある.

3点P, Q, R が各辺の延長上にある場合も同様に証明される.

Q.E.D



正確にはこの性質は必ずしもメネラウスの定理の「逆」にはなっていない. 外分点の個数が「奇数個」の制限に対して成立するものである. 外分点がない場合は,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}$$

である点P は, 辺BCの内分点としてとることもできる.

この場合, 3点P, Q, R は一直線上にはない.

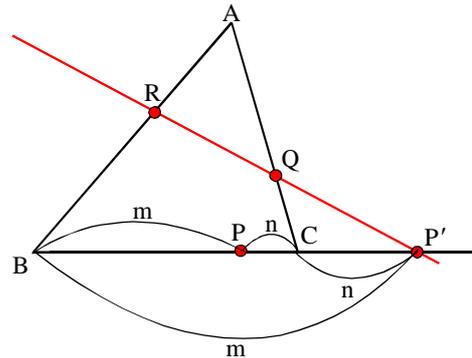
ただ, 奇数個の外分点は,

内分点2個と外分点1個, 内分点0個と外分点3個であり, メネラウスの定理においてもこのCaseのみである. そう考えれば, メネラウスの定理とその逆の関係は, 共線であるための必要十分条件とみてもいいことになる.

なお, 辺(線分)を有向線分とみることにより(ベクトル, 複素数的な考え方をすることで),

$$3 \text{ 点 } P, Q, R \text{ は共線} \quad \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

とみなすこともできる.



メネラウスの定理の逆による共線問題

【シムソンの定理】
 三角形 ABC の外接円上の任意の点 P から, 3 辺 BC, CA, AB またはその延長へ下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする. このとき, この3点は一直線上にある.

証明) $\angle PBC = \alpha, \angle PCB = \beta, \angle ABC = \gamma$ とする.

BC ⊥ PD より,

$$BD = PB \cos \angle PBC = PB \cos \alpha$$

$$DC = PC \cos \angle PCB = PC \cos \beta$$

CA ⊥ PE より,

$$CE = PC \cos \angle PCE = PC \cos(\alpha + \gamma)$$

$$EA = PA \cos \angle PAE = PA \cos \alpha$$

PF ⊥ AB より,

$$AF = PA \cos \angle PAB = PA \cos \beta$$

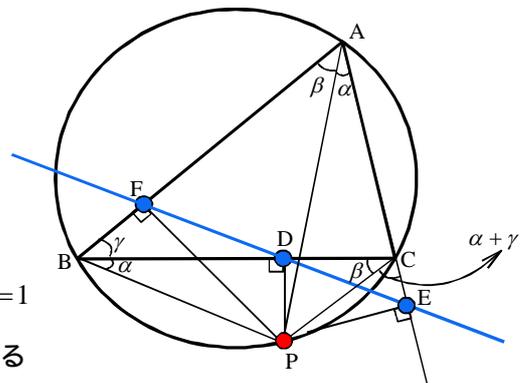
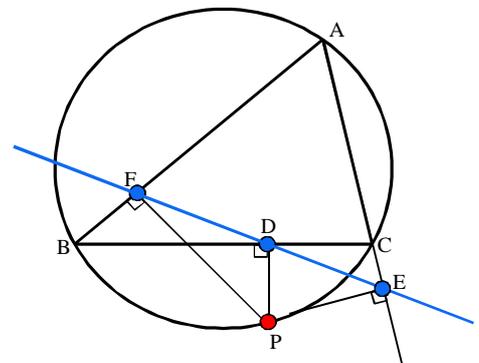
$$FB = PB \cos \angle PBA = PB \cos(\alpha + \gamma)$$

以上より,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{PB \cos \alpha}{PC \cos \beta} \cdot \frac{PC \cos(\alpha + \gamma)}{PA \cos \alpha} \cdot \frac{PA \cos \beta}{PB \cos(\alpha + \gamma)} = 1$$

よって, メネラウスの定理の逆より, D, E, F は一直線上にある

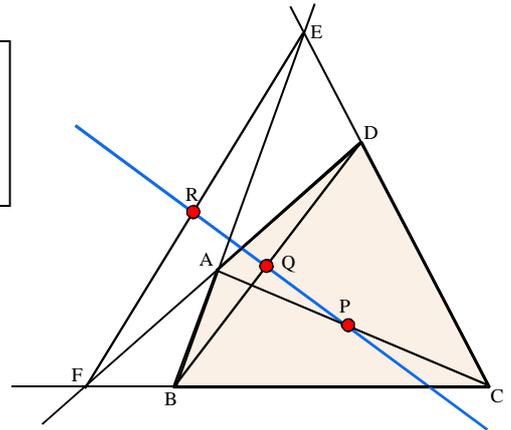
この共線をシムソン線という.



Q.E.D

シムソンの定理は一般化され、外接円上の点から、三角形の各辺へ同じ向きに同じ角をなす直線を引いたときの3辺との交点も一直線上にある。これをカルノーの定理という。

【ニュートンの定理】
 四角形 ABCD の対辺 AB, CD の延長の交点を E , AD, BC の延長の交点を F とする。このとき、AC, BD, EF の中点をそれぞれ P, Q, R とするとき、この3点は一直線上にある。



証明)

線分 BC の中点を G とする。

三角形 ABC において、

二辺中点連結定理より、GP // BA

直線 GP と線分 CE との交点を H とすると、

$$GH // BE \text{ より } \frac{GP}{PH} = \frac{BA}{AE} \quad \dots\dots$$

三角形 BCD において、

二辺中点連結定理より、GQ // CD

直線 GP と線分 BE との交点を I とすると、

$$GI // CE \text{ より } \frac{IQ}{QG} = \frac{ED}{DC} \quad \dots\dots$$

また、CH : HE = CG : GB = 1:1

$$BI : IE = BG : GC = 1:1$$

より H, I はそれぞれ CE, BE の中点であり、

R も EF の中点であることから、

3点 R, I, H は一直線上にあり、RH // FC である。

$$\text{よって } \frac{HR}{RI} = \frac{CF}{FB} \quad \dots\dots$$

ここで、直線 FD が ΔEBC を切るとみると、メネラウスの定理より

$$\frac{BA}{AE} \cdot \frac{ED}{DC} \cdot \frac{DF}{FB} = 1$$

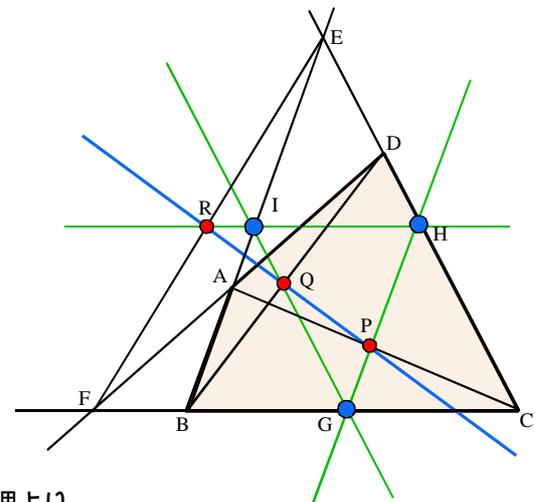
、 、 により、

$$\frac{GP}{PH} \cdot \frac{HR}{RI} \cdot \frac{IQ}{QG} = \frac{BA}{AE} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{ED}{DC} = 1$$

よって、三角形 GHI においてメネラウスの定理の逆より3点 P, Q, R は一直線上にある。

Q.E.D

この共線を三角形のニュートン線という。



【デザルグの定理】
 ΔABC と ΔA'B'C' において、直線 AA', BB', CC' が一点 O で交わっているとき、直線 AB と A'B', BC と B'C', CA と C'A' の交点をそれぞれ P, Q, R とするとき、この3点は一直線上にある。

証明)

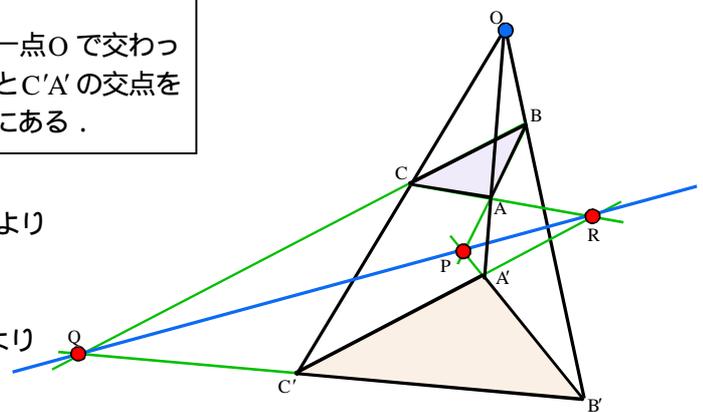
直線 A'B' と三角形 OAB において、メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{AA'} = 1 \quad \dots\dots$$

直線 B'C' と三角形 OBC において、メネラウスの定理より

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = 1 \quad \dots\dots$$

直線 C'A' と三角形 OCA において、メネラウスの定理より



$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = 1 \quad \dots\dots$$

, , を辺々かけて,

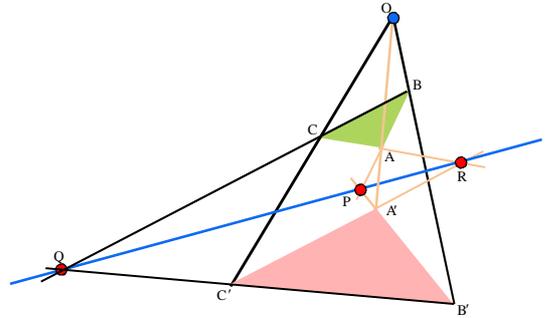
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

よって、メネラウスの定理の逆より3点P,Q,Rは一直線上にある。

Q.E.D

この証明は、平面上の図形に対してメネラウスの定理およびその逆を用いている。

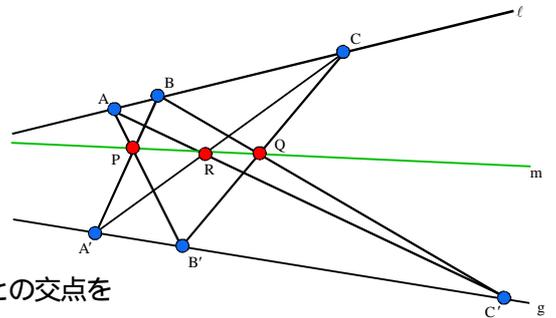
ところで2つの三角形ABC, A'B'C'が、空間内の異なる2平面上の図形とみれば、その証明は自明となる。四面体OABCがある平面と交わってできる切断面を△A'B'C'と考えれば、3点P,Q,Rは△ABC, △A'B'C'を含む2つの平面の交線となり、一直線上に並ぶのである。



この定理はフランスの数学者デザルグ(Gerard Desargues 1593-1662)が考えたものである。デザルグはもともとリヨンの建築家であったが、引退後、老後の趣味として幾何学を勉強したという。彼は直線を半径が無限大(中心が無限遠点)である円の円周とみること、直線は無限遠点で自分自身に再会すると考えた。また、平行線は無限遠点で交わるとも考え、幾何学に新しい射影幾何というルールを敷いた。それは、メネラウスの球面幾何学を純粋に発展させたものであり、非ユークリッド幾何を予感させるものでもある。メネラウス以後、古典幾何はトレミーを最後に後継者がいなくなり暗黒時代に突入するが、17世紀に入り、デカルトが代数的に幾何学を処理する解析幾何学を、対極的な一方の旗頭であるデザルグは射影幾何学をそれぞれ建設し、幾何学は新たな黎明期を迎えることになる。

【パップスの定理】

2直線l, g 上の3点をそれぞれ, A, B, C; A', B', C' とする。線分 AB' と A'B, BC' と B'C, AC' と A'C の交点をそれぞれP, Q, R とするとき、この3点は一直線上にある。



証明)

直線 AB' と BC' の交点を D, 直線 A'C と 2つの直線 AB', BC' との交点をそれぞれ E, F とする。

三角形 DEF を切る直線に関してメネラウスの定理を使う。

3点 A, P, B を通る直線において,

$$\frac{DP}{PE} \cdot \frac{EA'}{A'F} \cdot \frac{FB}{BD} = 1$$

よって, $\frac{DP}{PE} = \frac{A'F}{EA'} \cdot \frac{BD}{FB} \quad \dots\dots$

3点 A, R, C' を通る直線において,

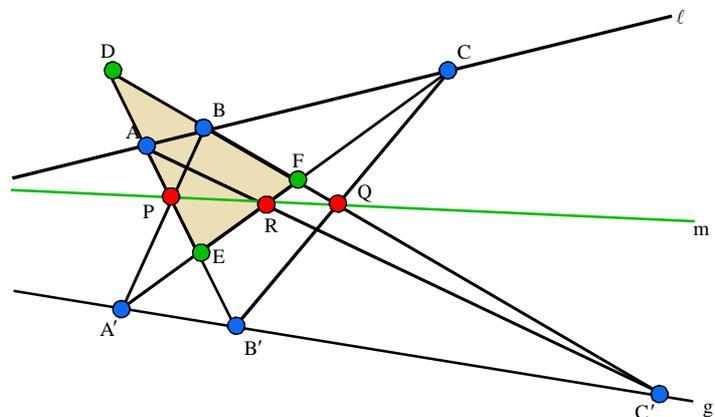
$$\frac{ER}{RF} \cdot \frac{FC'}{C'D} \cdot \frac{DA}{AE} = 1$$

よって, $\frac{ER}{RF} = \frac{C'D}{FC'} \cdot \frac{AE}{DA} \quad \dots\dots$

3点 C, Q, B' を通る直線において,

$$\frac{FQ}{QD} \cdot \frac{DB'}{B'E} \cdot \frac{EC}{CF} = 1$$

よって, $\frac{FQ}{QD} = \frac{B'E}{DB'} \cdot \frac{CF}{EC} \quad \dots\dots$



3点 A, B, C を通る直線において,

$$\frac{EA}{AD} \cdot \frac{DB}{BF} \cdot \frac{FC}{CE} = 1 \quad \dots\dots$$

3点 A'B'C' を通る直線において

$$\frac{EB'}{B'D} \cdot \frac{DC'}{C'F} \cdot \frac{FA'}{A'E} = 1 \quad \dots\dots$$

, , を辺々かけて,

$$\frac{DP}{PE} \cdot \frac{ER}{RF} \cdot \frac{FQ}{QD} = \frac{AF}{EA} \cdot \frac{BD}{FB} \cdot \frac{AE}{DA} \cdot \frac{C'D}{FC'} \cdot \frac{B'E}{DB'} \cdot \frac{CF}{EC} \quad \dots\dots$$

, を辺々かけて,

$$\frac{EA}{AD} \cdot \frac{DB}{BF} \cdot \frac{FC}{CE} \cdot \frac{EB'}{B'D} \cdot \frac{DC'}{C'F} \cdot \frac{FA'}{A'E} = 1 \quad \dots\dots$$

に右辺と の左辺は一致するから .

$$\frac{DP}{PE} \cdot \frac{ER}{RF} \cdot \frac{FQ}{QD} = 1$$

よって, 三角形 DEF と 3点 P, Q, R においてメネラウスの定理の逆により,

3点 P, Q, R は一直線上にある

【パスカルの定理】

円に内接する六角形 ABCDEF において, AB と DE, BC と EF, CD と FA のそれぞれの交点 P, Q, R とすると, この 3 点 は一直線上にある .

証明)

AB と CD の交点を L, AB と EF の交点を M, CD と EF の交点を N とする . 三角形 LMN に対し, その各辺または延長と交わる直線に関してメネラウスの定理の逆を考える .

三点 D, E, P を通る直線に関して

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{ME}{EN} \cdot \frac{ND}{DL} = 1$$

三点 B, C, Q を通る直線に関して

$$\frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NC}{CL} \cdot \frac{LB}{BM} = 1$$

三点 A, F, R を通る直線に関して

$$\frac{NR}{RL} \cdot \frac{LA}{AM} \cdot \frac{MF}{FN} = 1$$

三式を辺々かけて,

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NR}{RL} \cdot \frac{LB \cdot LA}{LC \cdot LD} \cdot \frac{ME \cdot MF}{MB \cdot MA} \cdot \frac{ND \cdot NC}{NE \cdot NF} = 1 \dots\dots(*)$$

また, 方べきの定理より,

$$LB \cdot LA = LC \cdot LD$$

$$ME \cdot MF = MB \cdot MA$$

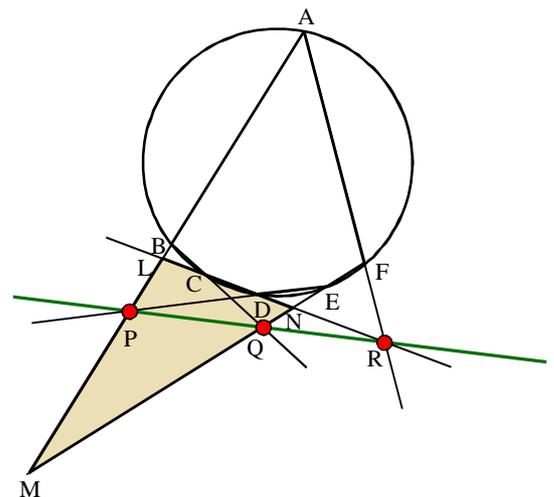
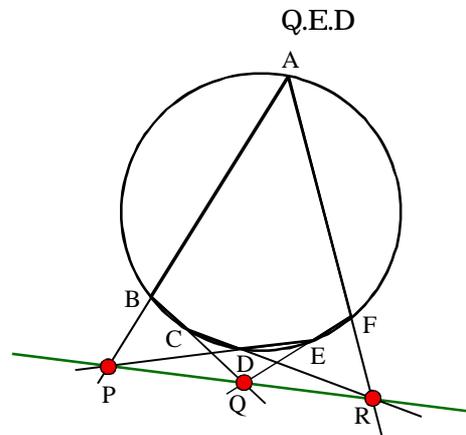
$$ND \cdot NC = NE \cdot NF$$

よって, (*) の式より,

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1$$

三角形 LMN と 3点 P, Q, R において, メネラウスの定理の逆により,

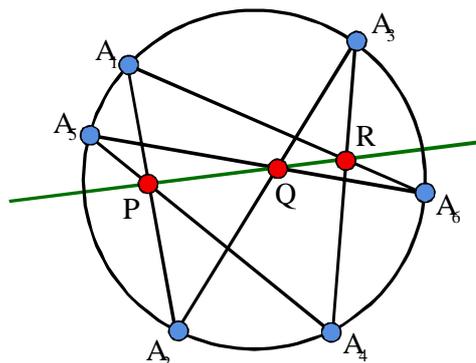
3点 P, Q, R は一直線上にある .



この三点P,Q,R を通る直線(共線)をパスカル線という。

パスカル(Blaise Pascal 1623-1662)はデザルグの弟子であり,この定理は16歳のときに著した「円錐曲線論」の中に記されている。なお,上述のパスカルの定理は円周上の6点についても次のように拡張される。

【パスカルの定理】
 円周上に,6点 A_k ($k=1,2,3,4,5,6$) をとる。このとき2直線 $A_i A_{i+1}$ と $A_{i+3} A_{i+4}$ ($i=1,2,3$ $A_7 = A_1$) の交点P,Q,Rは一直線上にある。



したがって円周上の6点に対し,結ぶ順番を考慮すると

$$(6-1) \times \frac{1}{2} = 60 \text{ (本)}$$

のパスカル線が存在することとなる。

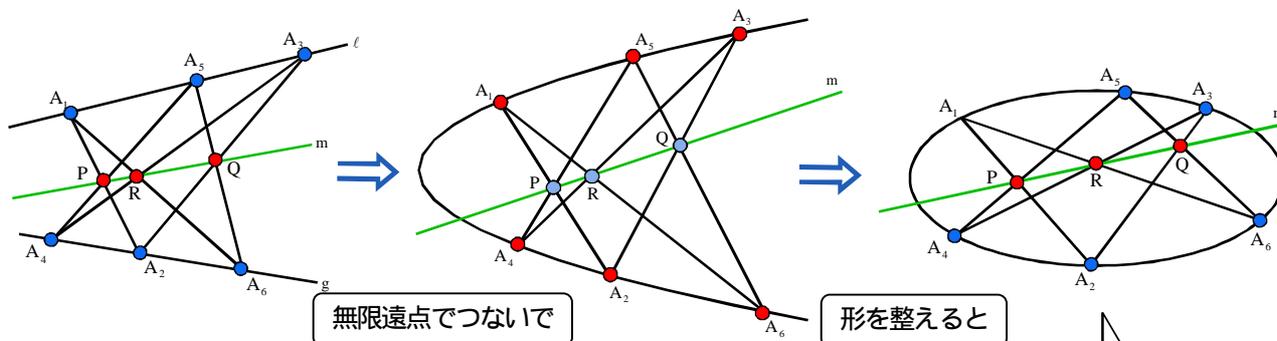
さらに,この性質は円錐曲線においても成立することをパスカルは示す。

デザルグは,同時代のデカルトが図形を代数化して処理することで解析幾何学を築いたのに対して,レオナルド・ダ・ヴィンチの投影図法といった絵画の世界の遠近法を幾何に取り入れ,図形を射影という変換概念を用いて動的に扱おうとした。ある意味ではユークリッドから連綿と続いた静的な古典幾何学の歴史はここに終止符を打つのである。デザルグは,空間内のある平面上の1点Oを中心として(配景の中心),別の平面に図形を射影することで,図形の複雑な性質を単純明快なものとした。

「直線の両端の点は一致する」

「平行な二直線や二平面は無限遠で交わることで,それぞれ交点,交線となる」

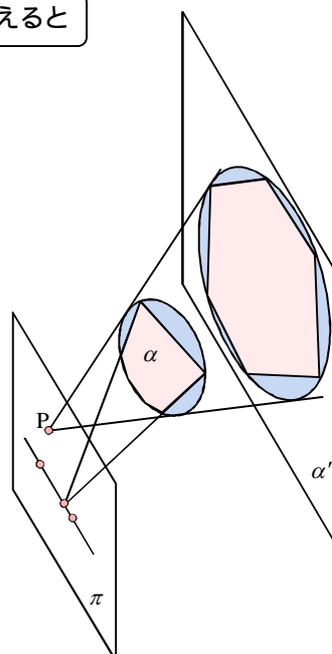
といった性質を認めることで,直線は半径が無限大の円ともいえる。パスカルはこの理論をさらに発展させ,適当な射影平面を考えることで円の性質は楕円や放物線でも保存されると考えた。「円錐曲線に内接する六辺形の3組の対辺の3つの交点は一直線上にある」というパスカルの定理は射影幾何学の基本的な定理であり,彼はこの定理から400以上の図形の性質を導き出したといわれる。後世,その功績を称えパスカルの六辺形は「神秘六辺形」とよばれた。



射影を用いてパスカルの定理を証明してみよう。

パスカルの図形を含む平面を α とし,パスカルの図形の共線 l を含む α と異なる平面 π を考える。

平面 π 上の1点で,共線 l 上にない1点をPとする。点Pを射影の中心としてパスカルの図形を平面 α と平行な平面 α' に写すと,共線 l は平面 α' 上では無限の彼方に飛んでいってしまう。これからパスカルの図形の向かい合う辺は無限遠点で交わることになり,向かい合う辺は平行となる。次に,平面 α' を $\alpha \parallel \alpha'$ であるように適当に動かし調整するとパスカルの図形に外接する二次曲線は円にすることが可能となる。したがって,パスカルの定理は射影平面では,次のようになる。



【射影平面上のパスカルの定理】
 円に内接する六角形 ABCDEF において,
 $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$
 であれば $BC \parallel FE$ である。

証明) $AB \parallel ED$ より, $\angle BAD = \angle ADE$
 $AF \parallel CD$ より, $\angle DAF = \angle CDA$
 , を辺々加えて,
 $\angle BAD + \angle DAF = \angle CDA + \angle ADE$

ここで,
 $\angle BAF = \angle BAD + \angle DAF$
 $\angle CDE = \angle CDA + \angle ADE$

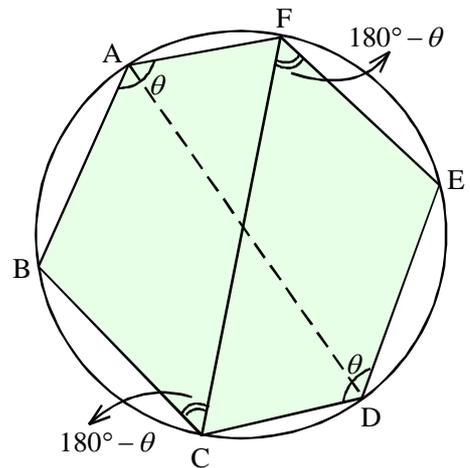
より,
 $\angle BAF = \angle CDE = \theta$

また, 四角形 $ABCF$ は円に内接するから補角の関係より,
 $\angle BCF = 180^\circ - \theta$

四角形 $CDEF$ についても同様に,
 $\angle EFC = 180^\circ - \theta$

よって, $\angle BCF = \angle EFC$
 錯角が等しいから, $BC \parallel FE$

Q.E.D



前述のパプスの定理も共線が無遠になるような射影面を考えることで, 交点は無限遠点で交わることになり, 次のように定理は表現される.

【射影平面上でのパプスの定理】
 2直線 l, g 上の3点をそれぞれ, $A, B, C; A', B', C'$ とする.
 $AB' \parallel A'B$, $BC' \parallel B'C$ ならば, $AC' \parallel A'C$ である.

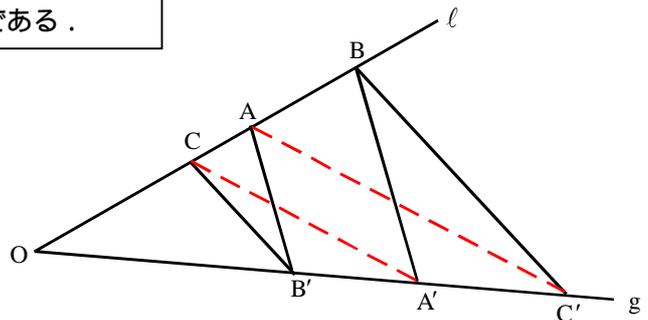
証明) 2直線 l, g の交点を O とする.

$AB' \parallel A'B$ より $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$

$BC' \parallel B'C$ より $\frac{OB}{OC'} = \frac{OC}{OB'}$

, を辺々かけて,
 $\frac{OA}{OC'} = \frac{OC}{OA'}$ $AC' \parallel A'C$

Q.E.D



デザルグによって芽生えた射影幾何の概念は パスカルに引き継がれて発展し 近世幾何学の道を拓く. その後, パリ工芸大学創立の中心人物であったモンジュ(Gaspard Monge, 1746 ~ 1818)により「完成された芸術」といわれた画法幾何学として確立する. そのモンジュのパリ工芸大学での弟子の一人にポンスレ(Jean-Victor Poncelet 1788-1867)がいた. 彼はナポレオンのロシア遠征に工兵少尉として出兵し, 捕虜となりサラトフの収容所に送られるが, そこでの幽閉の2年間に同房の捕虜相手に中心射影などのパリ工芸大学で学んだことを思い出して講義したという. ポンスレは戦争終結後, 母国フランスに戻りその講義の内容をまとめ「図形の射影的性質に関する概論」を発表する. この中で彼は相反極線の理論をもとに双対の原理を打ち立てて, ここに射影幾何は完成するのである.

双対の原理とは, 「ある命題において, 点を直線, 直線を点と置き換えた双対(duality)の命題は, 一方が成立すれば他方も成立する」というものである.

「点 直線」
 「交わる 結ぶ」
 と置き換えると

「2点 A, B を結ぶ直線 2直線 a, b が交わる点」

と読み替えることができ, これから双対の命題の一方が証明できれば他方は証明の必要がないことになる. たとえば,

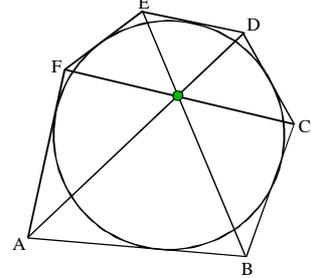
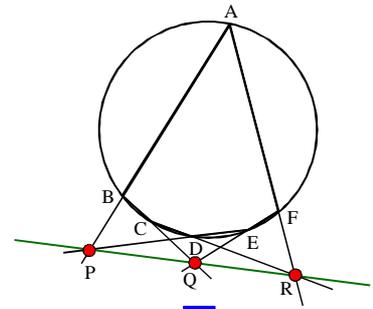
パスカルの定理

「円錐曲線に内接する六辺形の向かい合う3対の辺またはその延長線の交点は一直線上にある」

を読み替えると，

「円錐曲線に外接する六辺形の向かい合う3対の頂点を結ぶ直線の交点は1点で交わる」

となるが，この定理を「プリアンションの定理」といいその証明はパスカルの定理の証明から自明となる．



デザルグの定理については，その双対定理はデザルグの定理の逆となり，逆も真であることが示されたことになる．

パップスの定理については，その双対定理はまたもとの定理と同じになる．このように双対定理ともとの定理が一致する(双対不変)定理を，自己双対的定理という．

このように射影変換により図形を眺めることで，定理の証明は格段に簡約されるのである。「図形を動かす」ことはユークリッド幾何でももちろん扱われるが，射影幾何は図形のキャンパスである平面そのものを変換により動かす．射影平面上で代数的処理をするならば，解析幾何も射影幾何に含まれるといえ「射影幾何はすべての幾何を含む」といっても過言ではない．

メネラウスの定理についても，直線が三角形 ABC の各辺を切るときの辺の比の関係を表わすその性質は，直線が1辺と平行である場合は無限遠点で交わると考えれば，右図のように，

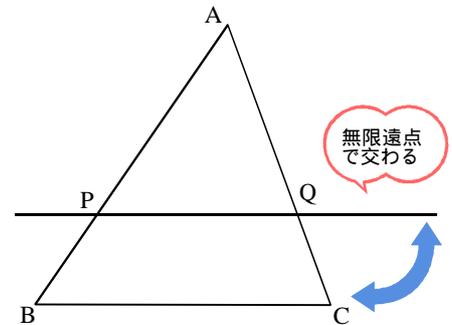
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

すなわち，

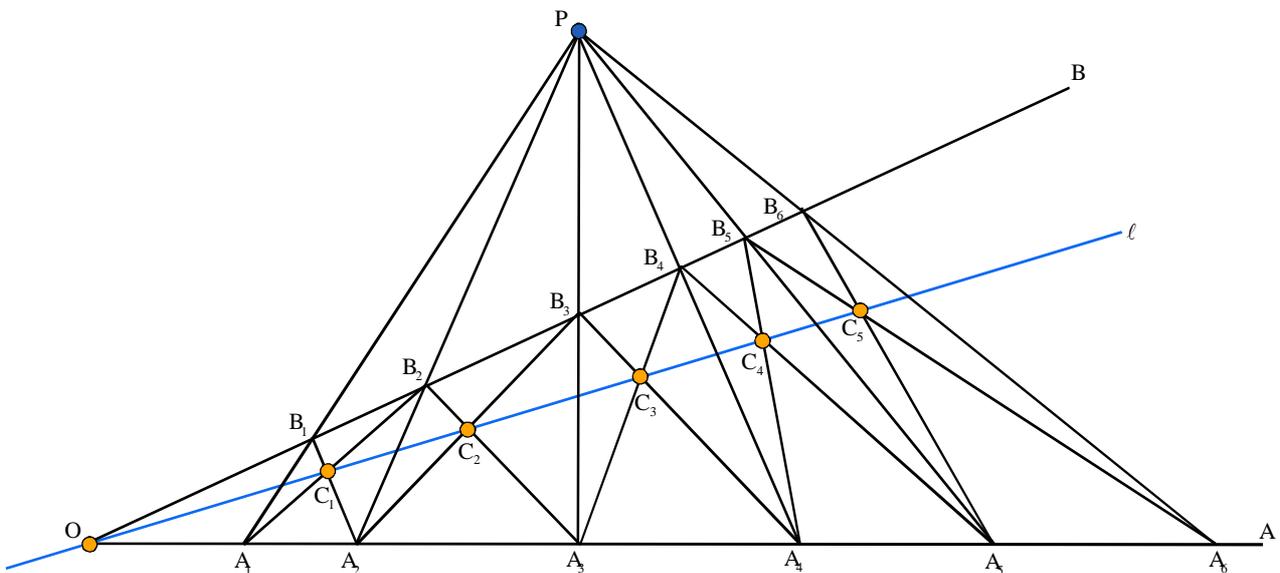
$$AP : PB = AQ : QC$$

となり，平行線の基本性質に読み替えることができるのである．

1つ，共線に関する興味ある問題を紹介しよう．



点Oを始点とする半直線OA, OBに直線外の点Pから引いたn本の直線が，OA, OBとそれぞれA_k, B_k (k=1,2,3,...,n)で交わっている．このとき，線分A_kB_{k+1}と線分A_{k+1}B_kのn個の交点C_kと点Oは一直線上にある．



証明) 3点O, C₁, C₂が一直線上にあることを示す.

直線OBが三角形PA₁A₃を切ると考えると, メネラウスの定理より,

$$\frac{AO}{OA_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3P} \cdot \frac{PB_1}{B_1A} = 1 \quad \dots\dots$$

直線B₁A₂が三角形OA₁B₂を切ると考えると,

$$\frac{C_1B_2}{AC_1} \cdot \frac{B_1O}{B_2B_1} \cdot \frac{A_2A_1}{OA_2} = 1 \quad \dots\dots$$

直線A₂B₃が三角形PB₂A₃を切ると考えると,

$$\frac{A_3C_2}{C_2B_2} \cdot \frac{B_2A_2}{A_2P} \cdot \frac{PB_3}{B_3A_3} = 1 \quad \dots\dots$$

, , を辺々かけて,

$$\frac{AO}{OA_3} \cdot \frac{C_1B_2}{AC_1} \cdot \frac{C_2A_3}{B_2C_2} = \frac{B_1A_1}{PB_1} \cdot \frac{B_2B_1}{B_1O} \cdot \frac{OA_2}{A_2A_1} \cdot \frac{A_2P}{B_2A_2} \quad \dots\dots(*)$$

また, 直線PA₁が三角形OA₂B₂を切ると考えると,

$$\frac{A_2P}{PB_2} \cdot \frac{B_2B_1}{B_1O} \cdot \frac{OA_1}{A_1A_2} = 1 \quad \dots\dots$$

直線OBが三角形PA₁A₂を切ると考え,

$$\frac{B_1A_1}{PB_1} \cdot \frac{OA_2}{A_1O} \cdot \frac{B_2P}{A_2B_2} = 1 \quad \dots\dots$$

, を辺々かけて,

$$\frac{B_1A_1}{PB_1} \cdot \frac{B_2B_1}{OB_1} \cdot \frac{OA_2}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2P}{A_2B_2} = 1 \quad \dots\dots$$

は(*)の右辺に一致するから,

$$\frac{AO}{OA_3} \cdot \frac{C_1B_2}{AC_1} \cdot \frac{C_2A_3}{B_2C_2} = 1$$

3点O, C₁, C₂と, 三角形B₂A₁A₃においてメネラウスの定理の逆より,

3点O, C₁, C₂は一直線上にある.

同様に, 3点O, C_k, C_{k+1}についても一直線上にあることは明らかであるから,

以上より, 点Oと, C_k (k=1,2,3,...n)は一直線上にある.

Q.E.D

また, 線分A_kB_nと線分A_nB_k (k ≠ n)の交点も一直線上にあることも容易に分かる.

したがって,

$${}_n C_2 + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2} \quad (\text{個})$$

の点が一直線上に並ぶことになる.

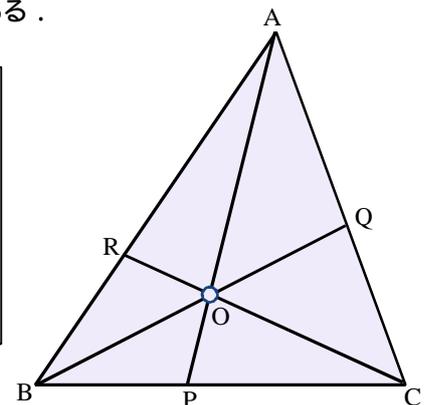
チェバの定理

メネラウスの定理とまるで双対のような関係をなすのがチェバの定理である.

《チェバの定理》
 三角形ABCの3頂点A, B, Cと, 三角形の辺またはその延長上にない点Oを結ぶ直線が, 辺BC, CA, ABまたはその延長と交わる点をそれぞれP, Q, Rとすると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

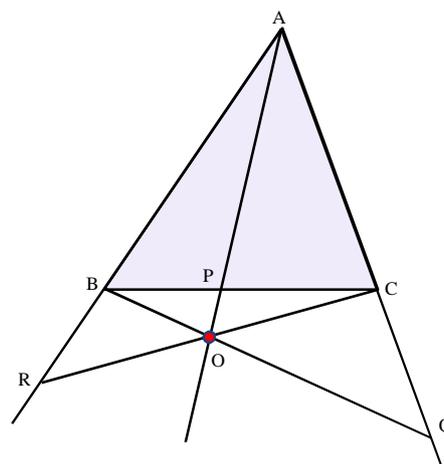
である.



平面上の点が三角形の周上になければ、この定理は常に成立し、点と三角形の各頂点を結ぶ線分により、頂点の対辺が一定の比に分けられる。メネラウスの定理が、「直線によって辺を切る」定理であるのに対してチェバの定理は、「点によって辺を切る」定理であるといえる。

チェバ(Giovanni Ceva 1647~1734)はイタリアの数学者であり、メネラウスからは1600年ほどの時代を経ている。チェバがアレキサンドリアの数学者メネラウスのことを知っていたかどうかは明らかではない。チェバはメネラウスの定理も類似の性質として自著の中で発表している。17世紀のこの時代は既にデザルグやデカルトといった新しい幾何の旗手が世に現れ、幾何の変革の真っ只中であつたわけだから、なぜいまさら平面幾何なのかという気持ちは拭えないし、もしかしたらメネラウスもメネラウスの定理の応用としてチェバの定理を導いていたかも知れぬ(後述するが、チェバの定理はメネラウスの定理により証明される)。しかしチェバのこの定理はメネラウスの双対のようなひとつの定理と捉えることで平面幾何の重要な性質のひとつである共点問題の多くが解決できるわけで、その意味では停滞していた平面幾何の「盲点」であつたのかもしれない。

定理を幾つかの方法で証明しよう。



(1) 頂点を通り対辺に平行な直線を補助線とする

点Aを通過して対辺BCに平行な直線と、直線BO, COとの交点をそれぞれS, Tとする。

$\triangle OBP \sim \triangle OSA, \triangle OCP \sim \triangle OTA$, 同じ相似比であるから,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{SA}{AT} \dots\dots$$

$\triangle QBC \sim \triangle QSA$ より,

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{SA} \dots\dots$$

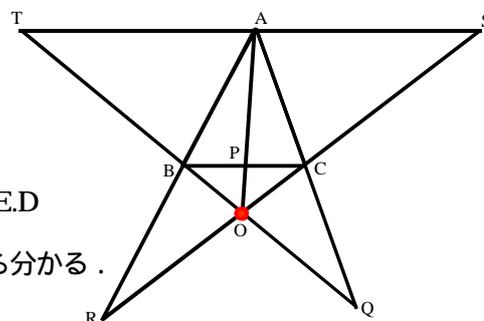
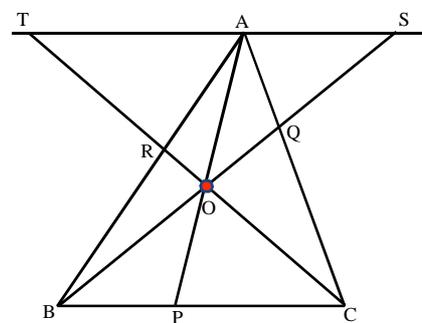
$\triangle RAT \sim \triangle RBC$ より,

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AT}{BC} \dots\dots$$

, , を辺々かけて,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{SA}{AT} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{AT}{BC} = 1$$

三角形の外部に点がある場合も同様に証明できることが右図から分かる。



Q.E.D

(2) 面積比を利用する

$\triangle OBC = S_1, \triangle OCA = S_2, \triangle OAB = S_3$ とおく。

$BP : PC = \triangle OBP : \triangle OCP = \triangle ABP : \triangle ACP$

よって, $\triangle OBP = kBP, \triangle OCP = kPC$

$\triangle ABP = hBP, \triangle ACP = hPC$

これから,

$$\triangle OAB : \triangle OCA = (\triangle ABP - \triangle OBP) : (\triangle ACP - \triangle OCP)$$

$$= (h - k)BP : (h - k)PC$$

$$= BP : PC$$

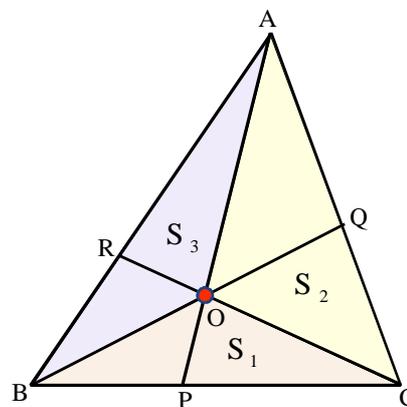
$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA} = \frac{S_3}{S_2} \dots\dots$$

同様に考えて, $\frac{CQ}{QA} = \frac{S_1}{S_3} \dots\dots, \frac{AR}{RB} = \frac{S_2}{S_1} \dots\dots$

, , を辺々かけて,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{S_2}{S_1} = 1$$

Q.E.D



後述するチェバの定理の多角形への拡張もこの面積比による方法で証明される。

(3) メネラウスの定理を利用する

三角形 ABP を直線 RC が切ると考え、メネラウスの定理より

$$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots\dots$$

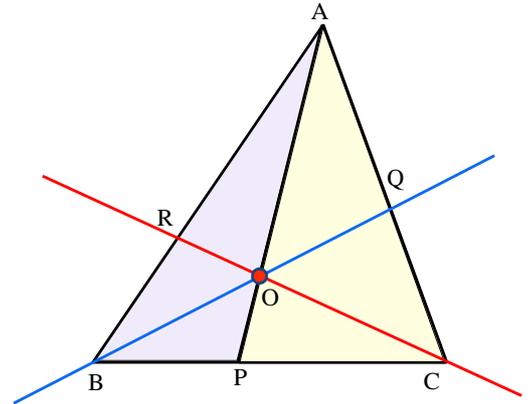
三角形 APC を直線 BQ が切ると考え、メネラウスの定理より、

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{PB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 \quad \dots\dots$$

、を辺々かけて、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

Q.E.D



チェバの定理の逆と共点問題

メネラウスの定理と同様、チェバの定理についてもその逆は成立する。

《チェバの定理の逆》

三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB の 辺 または その 延長 上 に それ ぞ れ P, Q, R を と る . この とき ,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

であれば、3 直線 AP, BQ, CR は一点で交わる。

証明) 直線 AP と BQ の 交 点 を O と し , 直 線 CO と 辺 AB と の 交 点 を R' と す れ ば

チェバの定理より、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR'}{R'B} = 1$$

である。ここで、

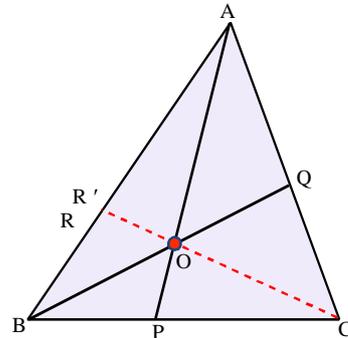
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

であるから 2 式を比較して、

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AR'}{R'B}$$

これから、点 R と R' は一致することより 3 直線は 1 点で交わる。

Q.E.D



チェバの定理では、点が辺をその延長上で切るのは、点が三角形の内部にあるときは0個、三角形の外部にあるときは2個であるから、線分比の方向を考えると比の積は1である。

また、点Pを線分BCの中点とし、APに平行で点Bを通る直線と直線ACとの交点をQ、APに平行で点Cを通る直線とBAとの交点をRとすると、二辺中点連結定理より、

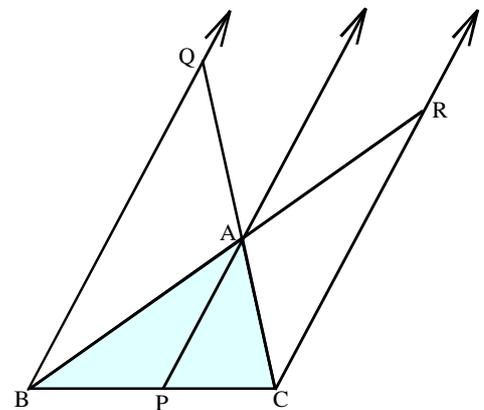
$$CQ:QA=2:1 \quad AR:RB=1:2$$

であるから、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

である。この場合は、AP, BQ, CR は平行となり交わらないが、無限遠点で共有点をもつと考えれば、チェバの定理の逆は成立するといえる。

ところで、チェバの定理の逆は、メネラウスの定理の逆が共線問題に応用できたのに対して、図形の共



点問題に効果的に利用することができる。

ここでは、三角形の五心(重心、内心、垂心、外心、傍心)の共点について考える。

(1) 重心

三角形の中線は共点である

重心G は頂点と対辺の中点を結ぶ線分(中線)の交点である。

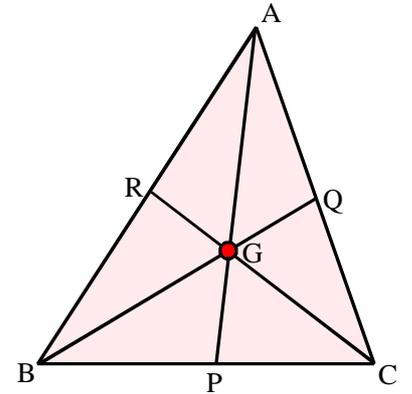
辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ P, Q, R とし、

$$BP = PC = p, CQ = QA = r, AR = RB = r$$

とおくと、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{p}{p} \cdot \frac{r}{r} \cdot \frac{r}{r} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により中線は一点で交わる。



また、三角形 ABP を直線 RC が切ると考えるとメネラウスの定理より

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BC}{CP} \cdot \frac{PG}{GA} = 1$$

ここで、AR:RB=1:1, BC:CP=2:1であるから、

$$AG:GP = 2:1$$

重心の基本性質が得られる。

(2) 垂心

三角形の3頂点から対辺に下ろした垂線は共点である

頂点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とする。

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB \cos B}{AC \cos C} \dots\dots$$

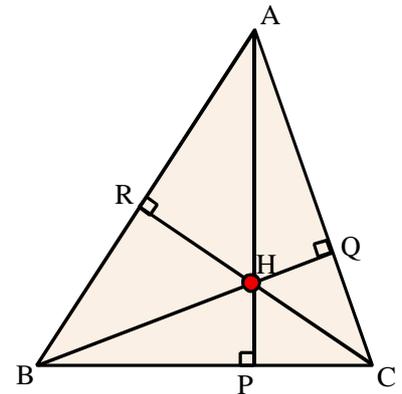
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BC \cos C}{AB \cos A} \dots\dots$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AC \cos A}{BC \cos B} \dots\dots$$

、 、 を辺々かけて、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB \cos B}{AC \cos C} \cdot \frac{BC \cos C}{AB \cos A} \cdot \frac{AC \cos A}{BC \cos B} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、AP, BQ, CR は共点である。



(3) 内心

三角形の3頂点の内角の二等分線は共点である

頂点 A, B, C の角の二等分とその対辺との交点をそれぞれ P, Q, R とする。

角の二等分線の性質より、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \dots\dots$$

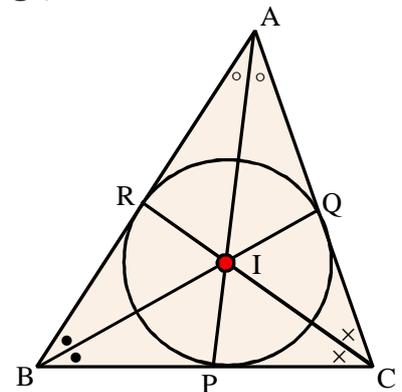
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{BA} \dots\dots$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{CA}{CB} \dots\dots$$

、 、 を辺々かけて、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、AP, BQ, CR は共点である。



(4) 傍心

三角形の1頂点の内角の二等分線と、他の2頂点の外角の二等分線は共点である

頂点 A, B, C の内角あるいは外角の二等分線とその対辺またはその延長との交点をそれぞれ P, Q, R とすると、内心同様に、角の二等分線の性質より、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \dots\dots$$

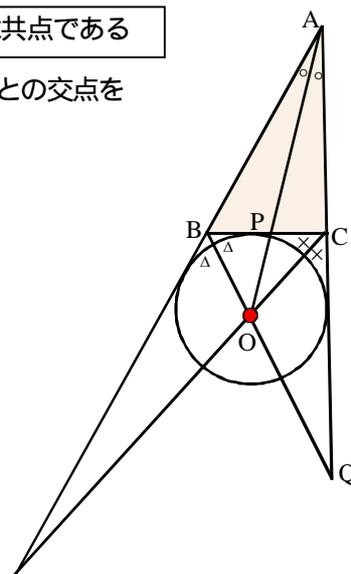
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{BA} \dots\dots$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{CA}{CB} \dots\dots$$

, , を辺々かけて、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、AP, BQ, CR は共点である。



(5) 外心

三角形の3辺の垂直二等分線は共点である

外心は、辺(弦)の垂直二等分線の交点であるから、他の4心と異なり頂点とその対辺の関係ではない。したがってこのままではチェバの定理の逆から共点を示すことは難しい。そこで、三角形 ABC の各頂点 A, B, C の対辺の中点をそれぞれ P, Q, R とし、三角形 PQR を作る。二辺中点連結定理により、

$$BC \parallel RQ$$

であるから、BC の垂直二等分線は辺 RQ に対しても垂直となる。他の辺についても同様のことがいえ、三角形 ABC の垂直二等分線の交点は、三角形 PQR においては、頂点から対辺に下ろした垂線の交点、すなわち、垂心に一致する。

ここで、垂心については、チェバの定理の逆により共点であることが既に証明されているから外心の共点についても示されたことになる。

なお、三角形の各頂点からその対辺に下ろした垂線の足を頂点とする三角形をもとの三角形の垂足三角形というが、鋭角三角形の垂心は、垂足三角形の内心であり、鈍角三角形の垂心は、垂足三角形の傍心である。したがって、垂心の共点から内心・外心・傍心の共点は保障されているのである。

また、三角形 ABC の各辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ P, Q, R とすると、中点連結定理より三角形 ABC と三角形 PQR は相似であり、2つの三角形の重心は一致する。重心 G は相似の中心であり、相似比は 2 : 1 であるから、三角形 ABC の垂心を H、三角形 PQR の垂心を H' とすれば、

$$GH : GH' = 2 : 1$$

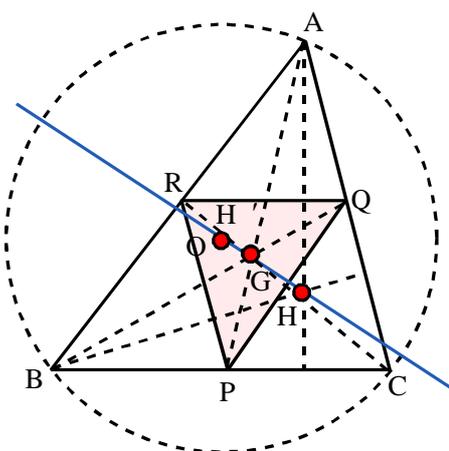
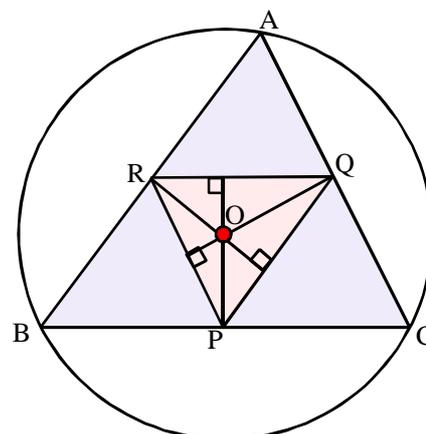
が成り立ちこの3点は共線である。

ここで、三角形 PQR の垂心 H' は、三角形 ABC の外心 O と一致することより、

$$GH : GO = 2 : 1$$

である。

以上より、三点 H, G, O はこの順に一直線上に並び、垂心と外心を結ぶ線分を 2 : 1 の比に内分する点が重心であることが分かる。この共線をオイラー線という。



これで、三角形の五心の共点はすべて示されたことになるが、次にこの五心に関する共点問題の例を2つ挙げる。

三角形 ABC の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とすれば AP, BQ, CR は共点である。

証明)

三角形の内心を I とすると、
 $\triangle IRA \equiv \triangle IQA$ であるから、

$$AR = AQ = a$$

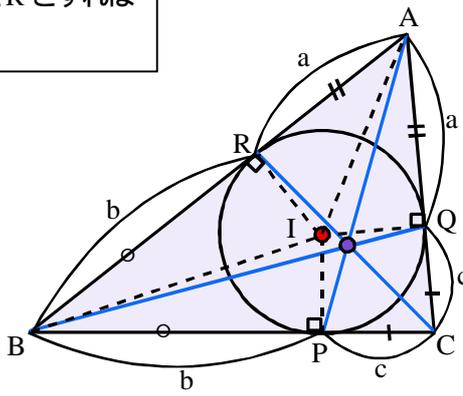
同様に考えて、

$$BR = BP = b, \quad CP = CQ = c$$

よって、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

以上よりチェバの定理の逆により、AP, BQ, CR は共点である。



Q.E.D

この点を、三角形 ABC のジュールゴンヌ点(Gergonne Point)という。

同様に、三角形 ABC の1つの傍接円が3辺 BC, CA, AB またはその延長と接する点をそれぞれ P, Q, R とするとき、

AR = AQ, BR = BP, CP = CQ であるから、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{CQ} \cdot \frac{CQ}{AR} \cdot \frac{AR}{BP} = 1$$

よって、AP, BQ, CR も共点である。

三角形 ABC の3つの傍接円が、BC, CA, AB と接する点をそれぞれ P, Q, R とすれば、AP, BQ, CR は共点である。

解)

BC = a, CA = b, AB = c とし、 $2s = a + b + c$ とおく。

図の BC に内接する傍接円において、

$$\begin{aligned} AS &= \frac{AS + AT}{2} \\ &= \frac{(AB + BS) + (AC + CT)}{2} \\ &= \frac{(AB + BP) + (AC + CP)}{2} \\ &= \frac{AB + BC + CA}{2} = s \end{aligned}$$

よって、 $BP = BS = AS - AB = s - c$

同様に考えて、

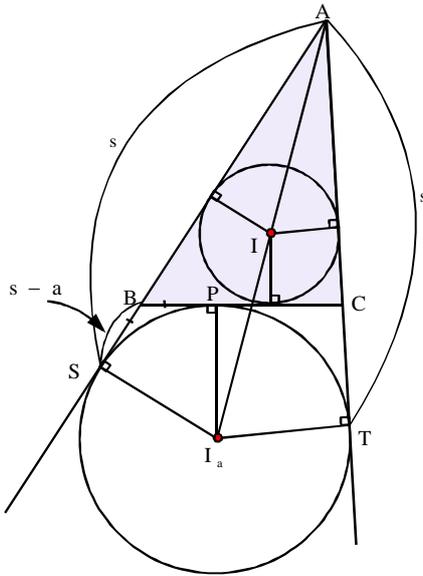
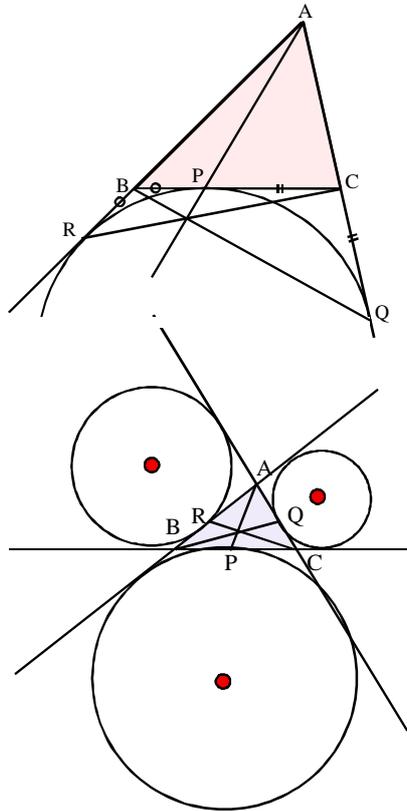
$$CP = s - b, \quad CQ = s - a, \quad AQ = s - c, \quad AR = s - b, \quad BR = s - a$$

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、AP, BQ, CR は共点である。

この点を三角形 ABC のナーゲル点(Nagel Point)という。

なお、三角形 ABC の内心 I は、三角形の各辺の中点を結んでできる三角形のナーゲル点 N に一致する。したがって、オイラー線と同じように、重心 G を相似の中心とすると、 $IG : GN = 1 : 2$ が成立し、三点 I, G, N はこの順に共線である。



チェバの定理の逆は三角形の三辺の比から共点を示すものであるが、これを三角形の内角の比に置き換えることができる。

《チェバの定理の逆の三角比表現》
 三角形 ABC において、3 辺 BC, CA, AB の辺またはその延長上にそれぞれ P, Q, R をとる。このとき、

$$\frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle CAP} \cdot \frac{\sin \angle CBQ}{\sin \angle ABQ} \cdot \frac{\sin \angle ACR}{\sin \angle BCR} = 1$$

 であれば、3 直線 AP, BQ, CR は一点で交わる。

$\angle BAP = \alpha_1, \angle CAP = \alpha_2, \angle CBQ = \beta_1, \angle ABQ = \beta_2, \angle ACR = \gamma_1, \angle BCR = \gamma_2$
 とする。

頂点 A から対辺に下ろした垂線の長さを h とすると、

$$\Delta ABP = \frac{1}{2} BP \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot AP \sin \alpha_1$$

$$\Delta ACP = \frac{1}{2} PC \cdot h = \frac{1}{2} AP \cdot AC \sin \alpha_2$$

二式を辺々割って、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB \sin \alpha_1}{AC \sin \alpha_2} \dots\dots$$

同様に考えて、

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BC \sin \beta_1}{BA \sin \beta_2} \dots\dots$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AC \sin \gamma_1}{CB \sin \gamma_2} \dots\dots$$

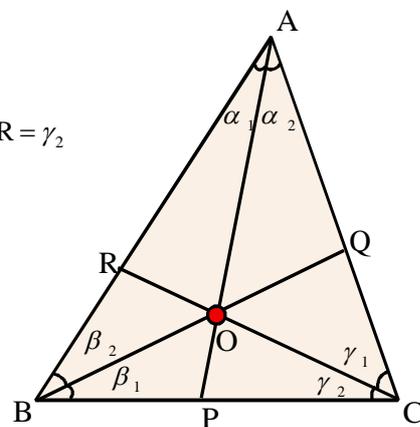
、 、 を辺々かけて、

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} &= \frac{AB \sin \alpha_1}{AC \sin \alpha_2} \cdot \frac{BC \sin \beta_1}{BA \sin \beta_2} \cdot \frac{AC \sin \gamma_1}{CB \sin \gamma_2} \\ &= \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \end{aligned}$$

ここで、チェバの定理の逆により、 $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ であるから

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$$

Q.E.D



角の比(正弦比)によって、三角形の五心の共点問題を考えると、重心以外は、比較的容易に共点の確認をすることができるだろう。

メネラウスとチェバに潜む調和点列

線分 AB を一定の比に内分、外分する点をそれぞれ C, D とする。このとき、

$$\frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD} \dots\dots$$

が成り立ち、この 4 点 A, B, C, D を調和点列(harmonic range)という。

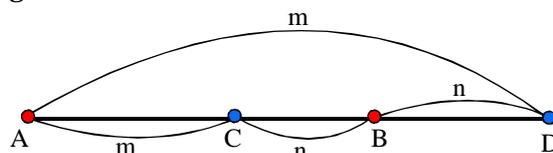
ここで、

$$CB = AB - AC, \quad BD = AD - AB$$

であるから より、

$$\frac{AB - AC}{AC} = \frac{AD - AB}{AD}$$

両辺を AB で割ると、



$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$$

すなわち、調和点列とは AC, AB, AD がこの順に調和数列をなしていることである。

三角形 ABC の内部の点 O に対して、O と頂点 A, B, C を結ぶ直線が対辺 BC, CA, AB と交わる点をそれぞれ P, Q, R とする。また、直線 QR と BC との交点を D とするとき、4点 B, C, P, D は調和点列である。

証明) 三角形 ABC と点 O において、チェバの定理より、

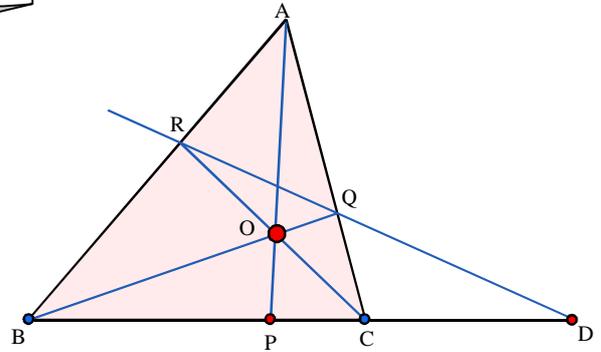
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots\dots$$

また、三角形 ABC と直線 QR において、メネラウスの定理より、

$$\frac{DC}{BD} \cdot \frac{QA}{CQ} \cdot \frac{RB}{AR} = 1 \quad \dots\dots$$

、を辺々かけて、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{DC}{BD} = 1 \quad BD : DC = BP : PC$$



Q.E.D

実はこの三角形の中の点にはいくつもの調和点列が潜んでいる。

例えば DR と AP の交点を E とすると、R, E, Q, D も調和点列である。

三角形 OQR に対して、

直線 BD で切ると考えるとメネラウスの定理より、

$$\frac{RD}{DQ} \cdot \frac{QB}{BO} \cdot \frac{OC}{CR} = 1 \quad \dots\dots$$

点 A で切ると考えるとチェバの定理より、

$$\frac{EQ}{RE} \cdot \frac{BO}{QB} \cdot \frac{CR}{OC} = 1 \quad \dots\dots$$

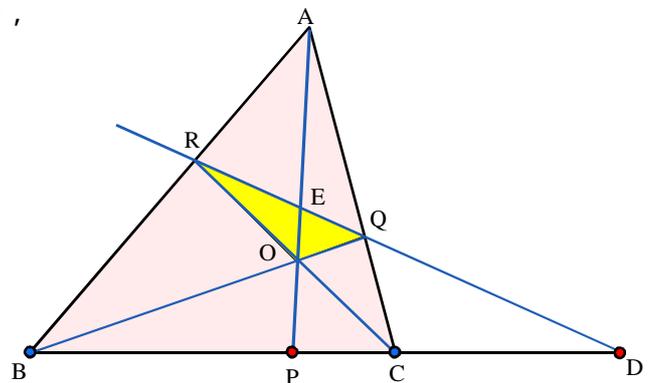
、を辺々かけて、

$$\frac{RD}{DQ} \cdot \frac{EQ}{RE} = 1$$

$$RE : EQ = RD : DQ$$

よって、R, E, Q, D は調和点列である。

この図形に潜む調和点列を調べるために、次の定理を証明しよう。

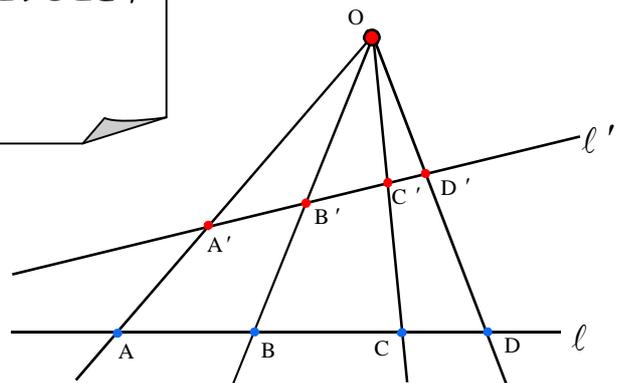


【パップスの定理】
 平面上の 1 点 O を通る 4 本の直線がある。これらの直線が O を通らない 1 本の直線 l と交わる点を順に A, B, C, D とするとき、

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

 の値は、直線 l に関わらず一定である。

$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ の値を複比(非調和比)といい、(A, B; C, D) と表す。また、直線 OA, OB, OC, OD を O を中心とする束線という。



証明)

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\Delta AOC}{\Delta BOC} = \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OC \sin \angle AOC}{\frac{1}{2}OB \cdot OC \sin \angle BOC} = \frac{OA \sin \angle AOC}{OB \sin \angle BOC}$$

同様に,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA \sin \angle AOD}{OB \sin \angle BOD}$$

よって,

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{OA \sin \angle AOC}{OB \sin \angle BOC} \cdot \frac{OB \sin \angle BOD}{OA \sin \angle AOD} = \frac{\sin \angle AOC \cdot \sin \angle BOD}{\sin \angle BOC \cdot \sin \angle AOD}$$

これは束線のなす角度だけで決まる値であるからどんな直線 l に対しても一定である.

Q.E.D

パップスの定理を利用すると, 調和点列は,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$$

であるから, 複比において,

$$(A, B; C, D) = 1 \quad (\text{外分} \cdot \text{内分の向きを考えれば}, (A, B; C, D) = -1)$$

となる場合である.

右図において, $(B, P; C, D)$ 以外の調和点列を探して見よう.

点 A を中心とする束線 AB, AP, AC, AD で考える

と, 複比は,

$$(B, O; Q, I), (B, E; G, H), (R, E; Q, D)$$

であり, $(B, P; C, D)$ が調和点列であることより,

これらの複比はすべて調和点列である.

また, 点 B を中心とする束線 BA, BH, BI, BD では,

$$(R, E, Q, D), (A, E; O, P), (A, G; Q, C),$$

$$(A, H; I, D), (R, F; O, C)$$

この中で, $(R, E; Q, D)$ は調和点列であるから, 残りの複比もすべて調和点列である.

これ以外でも, 適当な 2 点を結ぶことで, 調和点列が幾らでも作れることが分かるだろう. そして,

これらの調和点列は, 三角形 ABC を切っているメネラウスの直線 RD が, 点 A を中心とする束線と点 B を中心とする束線をとともに切っていることに依り, メネラウスの直線が調和点列を生み出していることが分かるのである.

さらに, 調和点列であることを利用すると, 直線 PQ, AD, BE は共点(3 点 P, Q, H は共線)であることを証明できる.

直線 PQ と AD の交点を H' とする.

三角形 APD を点 Q が切ると考えるとチェバの定理より,

$$\frac{AE}{EP} \cdot \frac{PC}{CD} \cdot \frac{DH'}{H'A} = 1 \quad \dots\dots$$

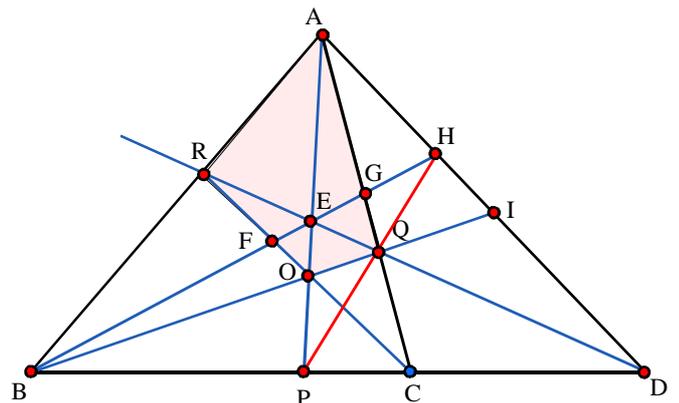
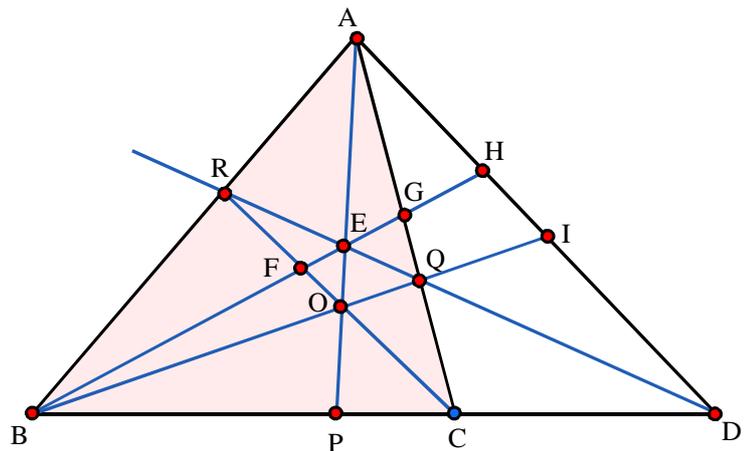
三角形 APD を直線 BE が切ると考えるとメネラウスの定理より,

$$\frac{AE}{EP} \cdot \frac{PB}{BD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1 \quad \dots\dots$$

, の左辺を比較して,

$$\frac{PC}{CD} \cdot \frac{DH'}{H'A} = \frac{PB}{BD} \cdot \frac{DH}{HA}$$

ここで, $(B, P; C, D)$ は調和点列であるから,



$$\frac{BP}{PC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{より,} \quad \frac{PC}{CD} = \frac{PB}{BD}$$

よって, より,

$$\frac{DH'}{H'A} = \frac{DH}{HA}$$

以上より $H = H'$ となり共点であることが示された.

ここで, 図において4点 A, R, O, Q を結んでできる図形を完全四辺形という.

そのひとつである四辺形 $AROQ$ の対角線 AO はチェバにより切る点 O を含み, 対角線 RQ はメネラウスにより切る直線であり, これらの定理の深い関わりを読み取ることができる.

調和点列による線分の三等分線の作図

定規とコンパスによる線分の三等分は作図としてよく知られるが, 上記の調和点列の性質を用いると,

「任意の線分を定規だけで三等分する」

ことが可能となる.

《作図の手順》

平面上に直線 AB 上にない点 O をとり A, B と結ぶ
 線分 AB の長さを B の延長上にとり, B でない端点を C とする.
 点 C から三角形 OAB の2辺 OB, OA と交わるような直線を引き,
 その交点をそれぞれ D, E とする.
 AD, CE を結び, その交点を P とする.
 OP と AB が交わる点を Q とする.

点 C は AB を $2:1$ の比に外分する点となる.

これから, 直線 AB 上にない任意の点 O について, 調和点列の考え方を利用することで, AB を $2:1$ の比に内分する点の作図が可能となる.

したがって点 Q が AB の三等分線の1つとなる. もうひとつの三等分線は, 「点 A の左側に AB の長さをもって同様の操作をする」, 「 BQ の長さを移す」, あるいは「 AQ の中点を作図」といった方法で求めればよい. このように考えると線分 AB を $m:n$ に分ける点の作図も AB の延長上に $m:n$ に外分する点をとることができれば可能となる.

なお, 点 C を無限遠点に飛ばせば, 直線 ED は辺 AB に平行となる.

このとき $AC = CB$ と考えられるから, 点 Q は AB の中点であることが予想される. 証明しよう.

チェバの定理より,

$$\frac{OE}{EA} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BD}{DO} = 1 \quad \dots\dots$$

$AB \parallel ED$ とすると,

$$\frac{OE}{EA} = \frac{OD}{DB}$$

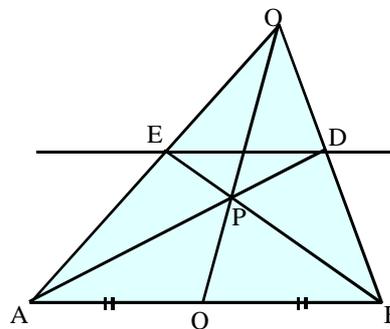
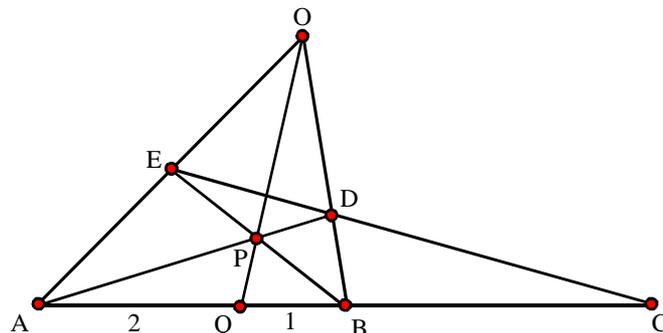
である. に代入して,

$$\frac{OD}{DB} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BD}{DO} = \frac{AQ}{QB} = 1$$

よって, $AQ = QB$ より, 点 Q は AB の中点である.

これから, AB に平行な直線を引いて, 辺 OA, OB との交点を E, D とし AD, BE との交点 P に対し, OP と AB との交点を求めれば, 線分 AB の中点の作図ができることになる

逆に, AB とその中点が与えられたとき, AB に平行な任意の距離をもつ平行線の作図が定規だけで簡単にできることがわかる.



メネラウスの定理の拡張

(1) 多角形におけるチェバの定理

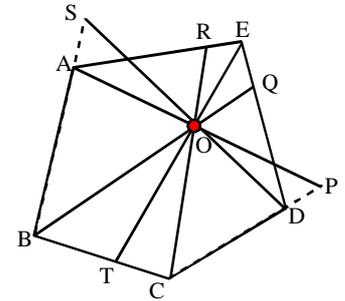
チェバの定理は多角形と平面上の1点に対して拡張できる。

ただし、チェバは、「点が辺を切る」すなわち点と頂点を結ぶ線分が対辺を切る性質であるから、対辺が存在する奇数多角形においてのみ拡張される。

(2n+1) 辺の多角形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_n \cdots A_{2n-1} A_{2n} A_{2n+1}$ の辺または延長上にな
い平面上の1点O に対して、直線 $A_k O$ ($k=1, 2, 3, \dots, 2n+1$) と辺
 $A_m A_{m+1}$ ($0 < k < n+1, m=n+k, A_{2n+2} = A_1; n+2 < k < 2n+1, m=k-n-1$)
またはその延長との交点を P_k とすると、

$$\prod_{k=1}^{2n+1} \frac{A_m P_k}{P_k A_{m+1}} = 1$$

である。



辺の比を面積比に置き換えて証明する。

証明)

$$\Delta A_k A_m O = S_m \quad (1 < k < n+1, m=n+k; n+2 < k < 2n+1, m=k-n-1)$$

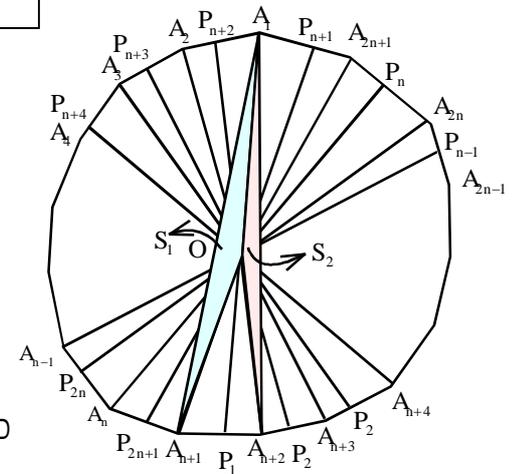
とおく。

$$\frac{A_m P_k}{P_k A_{m+1}} = \frac{S_m}{S_{m+1}}$$

であるから、

$$\prod_{k=1}^{2n+1} \frac{A_m P_k}{P_k A_{m+1}} = \frac{S_{n+1}}{S_{n+2}} \cdot \frac{S_{n+2}}{S_{n+3}} \cdots \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \cdot \frac{S_{2n+1}}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_2}{S_3} \cdots \frac{S_{n-1}}{S_n} \cdot \frac{S_n}{S_{n+1}} = 1$$

Q.E.D



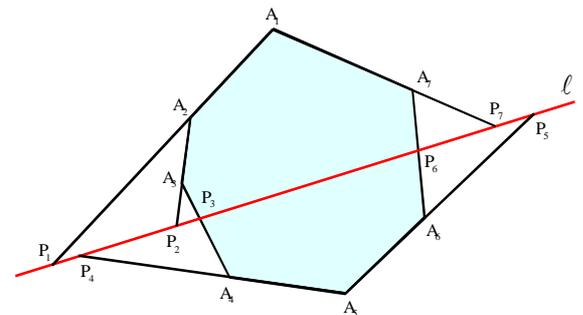
(2) 多角形におけるメネラウスの定理

点で切るチェバが奇数辺多角形のみ成立するのに対して、直線で切るメネラウスはどんな多角形でも切ることができ(凸多角形のみならず凹多角形に対しても)、定理は任意の多角形に対して拡張される。

n 角形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_{n-1} A_n$ のどの頂点も通らない直線が
辺 $A_k A_{k+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots, n$, ただし、 $A_{n+1} = A_1$) または
その延長と交わる点を P_k とするとき、

$$\prod_{k=1}^n \frac{A_k P_k}{P_k A_{k+1}} = 1$$

が成立する。



多角形の各辺を多角形を切る直線 ℓ に射影して求めよう。

証明)

頂点 A_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$) から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H_k とすると

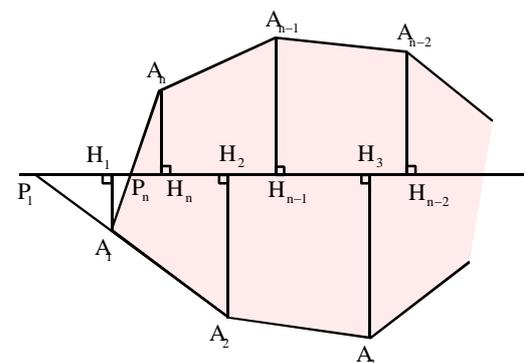
$\Delta A_k P_k H_k$ $\Delta A_{k+1} P_k H_{k+1}$ であるから、

$$\frac{A_k P_k}{P_k A_{k+1}} = \frac{A_k H_k}{H_{k+1} A_{k+1}}$$

これより、

$$\prod_{k=1}^n \frac{A_k P_k}{P_k A_{k+1}} = \frac{A_1 H_1}{H_2 A_2} \cdot \frac{A_2 H_2}{H_3 A_3} \cdots \frac{A_{n-1} H_{n-1}}{H_n A_n} \cdot \frac{H_n A_n}{H_1 A_1} = 1$$

Q.E.D



数学的帰納法による証明も紹介しよう

証明)

n 角形の辺 $A_n A_1$ の間に凸三角形 $A_n A_{n+1} A_1$ を右図のように作る .

$A_n A_{n+1}$, $A_{n+1} A_1$ と直線 ℓ との交点をそれぞれ P'_n , P_{n+1} とすると ,
 三角形 $A_n A_{n+1} A_1$ を直線 ℓ が切ると考えるとメネラウスの定理より

$$\frac{P_n A_n}{A_n P'_n} \cdot \frac{P_{n+1} A_{n+1}}{A_{n+1} P_{n+1}} \cdot \frac{P'_n A_n}{A_{n+1} P'_n} = 1$$

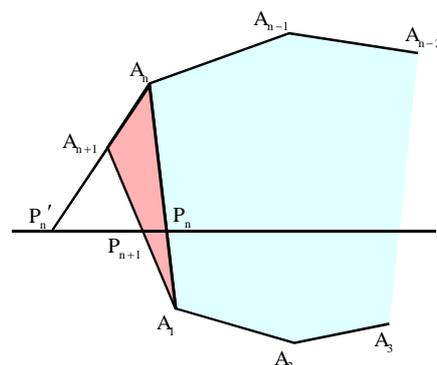
また, n 角形を直線 ℓ が切ると考えると,

$$\frac{A_1 P_1}{P_1 A_2} \cdot \frac{A_2 P_2}{P_2 A_3} \cdot \frac{A_3 P_3}{P_3 A_4} \cdots \frac{A_{n-1} P_{n-1}}{P_{n-1} A_n} \cdot \frac{A_n P_n}{P_n A_1} = 1$$

2式を辺々かけて,

$$\frac{A_1 P_1}{P_1 A_2} \cdot \frac{A_2 P_2}{P_2 A_3} \cdot \frac{A_3 P_3}{P_3 A_4} \cdots \frac{A_{n-1} P_{n-1}}{P_{n-1} A_n} \cdot \frac{A_n P'_n}{P'_n A_{n+1}} \cdot \frac{A_{n+1} P_{n+1}}{P_{n+1} A_1} = 1$$

ここで, P'_n を P_n と置き換えると, $(n+1)$ 角形でも成立することが示される .



(3) 三次元への拡張

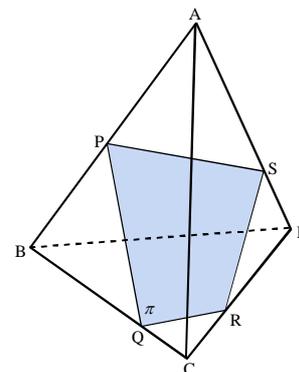
メネラウスの定理は三次元においては「四面体を平面で切る」ことによって拡張がなされる .

【空間内のメネラウスの定理】

空間内の四面体 $ABCD$ の辺 AB, BC, CD, DA またはその延長が平面 π と交わる点をそれぞれ P, Q, R, S とすると,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

が成り立つ .



証明)

直線 AC と平面 π との交点を U とする .

三角形 ABC を直線 PQ が切ると考えるとメネラウスの定理より,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CU}{UA} = 1 \quad \cdots \cdots$$

三角形 ACD を直線 SR が切ると考えるとメネラウスの定理より,

$$\frac{AU}{UC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1 \quad \cdots \cdots$$

と を辺々かけて,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

Q.E.D

この定理は, 四面体 $ABCD$ の頂点を A, B, C, D の順に辺を巡り, 一周した場合のものである . 頂点の巡り方を変えてみよう .

直線 BD と平面 π との交点を T とする .

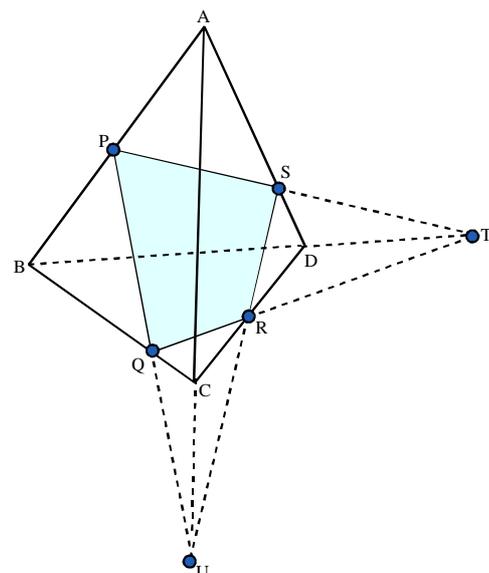
三角形 ABD を直線 RS が切ると考え,

$$\frac{AS}{SD} \cdot \frac{DT}{TB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \quad \cdots \cdots$$

三角形 BCD を直線 QR が切ると考え,

$$\frac{BT}{TD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QB} = 1 \quad \cdots \cdots$$

, を辺々かけて,



$$\frac{AS}{SD} \cdot \frac{DT}{TB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CU}{UA} = 1$$

この場合は、A, D, B, C の順に頂点を一周する。

、を辺々かけて

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BT}{TD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CU}{UA} = 1$$

この場合は、A, B, D, C の順に一周する。

、を辺々かけて

$$\frac{AU}{UC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DT}{TB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1$$

この場合は、A, C, D, B の順に一周する。

このように、 $\frac{AS}{SD}$, $\frac{DT}{TB}$, $\frac{BQ}{QC}$, $\frac{CU}{UA}$ の組合せを変えて辺々かける(わる)ことで、頂点をどのような順に巡っても、一周することにより、頂点と分点の比の積は1となることがわかる。さらに、

三角形 PUS が直線 QR を切ると考え、

$$\frac{PQ}{QU} \cdot \frac{UR}{RS} \cdot \frac{ST}{TP} = 1 \quad \dots\dots$$

三角形 PTQ を直線 SR が切ると考え、

$$\frac{PS}{ST} \cdot \frac{TR}{RQ} \cdot \frac{QU}{UP} = 1 \quad \dots\dots$$

、を辺々かけて、

$$\frac{TR}{RQ} \cdot \frac{QP}{PU} \cdot \frac{UR}{RS} \cdot \frac{SP}{PT} = 1$$

この場合は四面体の各辺の分点を頂点として巡る形になっている(分点は同一平面上にももちろんあるから平面でのメネラウスということになるが)。

このように見ていくと平面であろうが空間であろうがメネラウスの頂点の巡り方は一定の規則性があることが分かる。頂点から頂点へ辺を結ぶ(道がある)ように巡り、平面上で n 多角形の場合は外分点の個数は、奇数辺形の場合は奇数個、偶数辺形の場合は偶数個である。

したがって、前述の n 角形におけるメネラウスの定理は

$$\prod_{k=1}^n \frac{A_k P_k}{P_k A_{k+1}} = (-1)^n$$

と表すことができる。

また、空間内の四面体においては、平面が四面体を切るとき、切られる辺の外分点の個数は偶数個であり、したがって、メネラウスの定理における分点の比の積は1となる。

次に、空間内におけるメネラウスの定理の逆について考えて見よう。

【空間内のメネラウスの定理の逆】
 空間内の四面体 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA またはその延長の点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

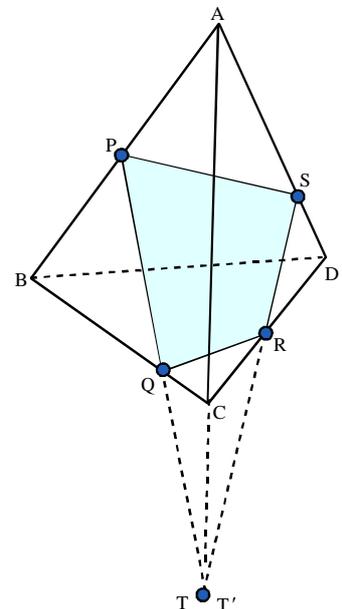
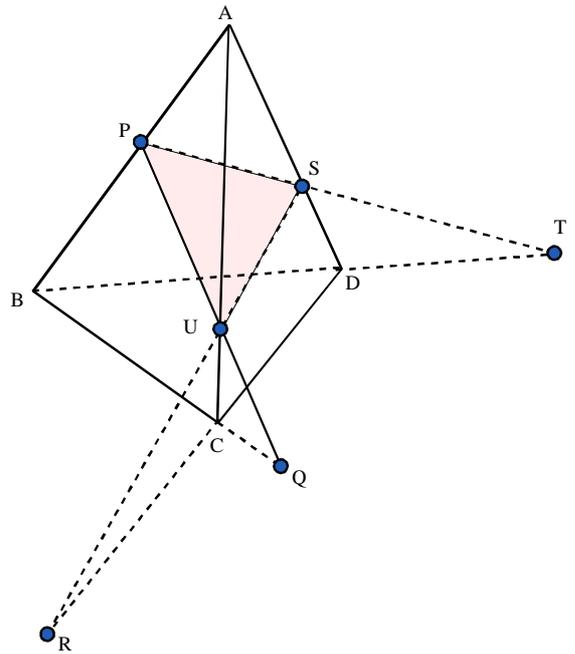
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

が成り立つとき、4点 P, Q, R, S は同一平面上にある。

PQ // SR であるときは、明らかに成立する。

直線 PQ と辺 AC またはその延長との交点を T とすると、メネラウスの定理より、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CT}{TA} = 1 \quad \dots\dots$$



直線SR と辺 AC またはその延長との交点をT' とすると、
メネラウスの定理より、

$$\frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{AT'}{T'C} = 1 \quad \dots\dots$$

、 を辺々かけて、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{AT'}{T'C} = 1$$

条件より、

$$\frac{CT}{TA} = \frac{CT'}{T'A}$$

P と Q, S と R はともに外分点であるか、または内分点であるから、直線 AC の延長上に点T と T' はあり、2点は一致する。

Q.E.D

これから、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

は4点P,Q,R,S が、共面であるための必要十分条件である。

なお、4点が同一平面上にあることは、4点を結んでできる四角形の対角線が交わることである。

四角形 PQRS の対角線の交点をO としよう。

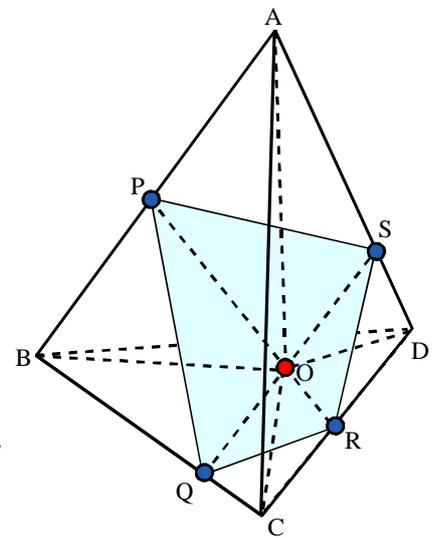
三点R,O,P は共線であり、点P はAB 上の点より、点O は三角形 ABR を含む平面上の点である。よって、点O と辺 AB を含む平面で、対辺であるCD を切った点がR ということになる。

同様に、点O と辺 BC,CD,DA を含む平面で、それぞれの対辺をきった点がS,P,Q であることより、点O は「点と辺を含む4つの平面でその対辺を切る点」であり、すなわちチェバの点である。したがって、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

は空間内におけるチェバの定理およびその逆を表していることにもなり、共点(4平面が1点で交わる)であるための必要十分条件であるともいえるのである。

このように、空間内ではメネラウスとチェバは同じ関係式を共有し、定理が発見されから巡り続けた1500年の時を越えて、2つの定理は会うのである。



***** 参考文献 *****

SEG 数学シリーズ 平面幾何(みんなの図形研究講座) 小島敏久 著 SEG 出版
 数学ワンポイント双書 幾何の有名な定理 矢野健太郎 著 共立出版
 数学ワンポイント双書 射影幾何 津田丈夫 著 共立出版