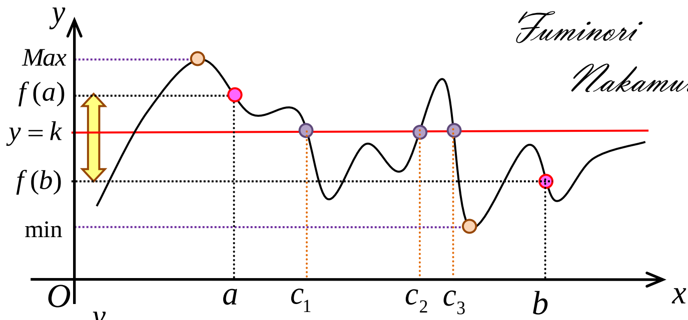
関数値の存在定理のグラフ上の視点

連続(continuous)は、曲線がつながっている(Link)
微分可能(differentiable)は、曲線がなめらか(Smooth)

Fuminori Nakamura



最大値・最小値の原理 (Weierstrass)

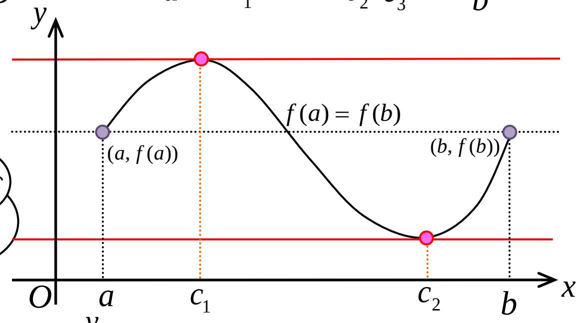
$[a,b]$ で連続な関数は、
その区間で最大値および最小値をもつ。

人生は山あり谷あり。一番辛かったことや楽しかったことは必ずある。そんな当たり前のことからすべてが始まる。

中間値の定理

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、$f(a)\neq f(b)$ のとき、
$f(a)$ と $f(b)$ の間の値 k に対して、
$$f(c)=k \qquad (a<c<b)$$
となる値が少なくとも1つ存在する。

最小値 m 、最大値 M のときは、m と M の間の k に対して存在
$f(a)f(b)<0$ のときは、$f(c)=0$ となる値が存在



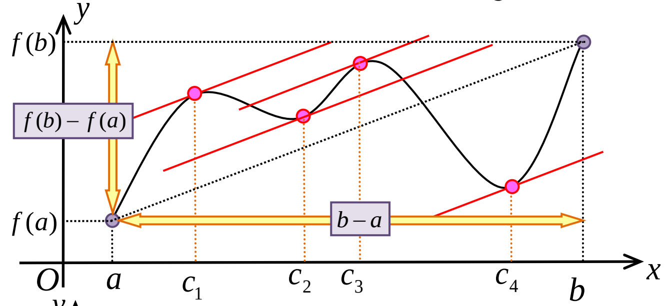
Ｒｏｌｌｅの定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、(a,b) で微分可能であって、
$$f(a)=f(b)$$
ならば、$f'(c)=0,\quad a<c<b$
を満たす実数 c が存在する。

水平方向に平行に視線を移すと、局所的(部分的)に、一番高い点(極大点)、一番低い点(極小点)が必ず存在する。

平均値の定理 (Lagrange)

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、(a,b) で微分可能であるならば、
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad a<c<b$$
を満たす実数 c が存在する。

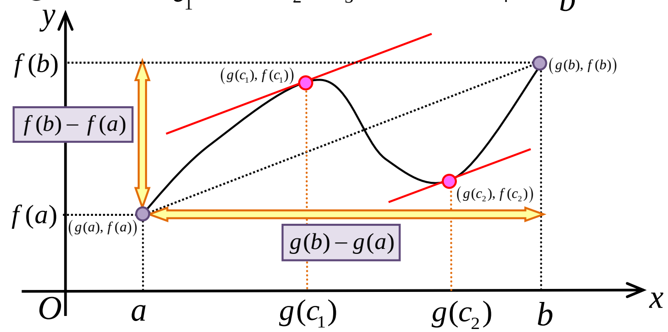


$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases} \Leftrightarrow y=h(x)$$
と parameter 表示

Cauchy の定理

関数 $f(x),g(x)$ が $[a,b]$ で連続で、(a,b) で微分可能で、
かつこの区間でつねに $g'(x)\neq 0$ であるならば
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad a<c<b$$
を満たす実数 c が存在する。

$h=b-a,\ \theta=\dfrac{c-a}{b-a}$ とおくと、
$0<\theta<1 \quad (a<c<b)$



L’Hospital の定理

関数 $f(x),g(x)$ が、$x=a$ および
それに十分に近い x について微分可能で、
$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ とするとき、
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$f(x),g(x)$ は $x=a$ で連続より、
$f(a)=g(a)=0$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}$$
$$=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

関数 $f(x)$ が $[a,a+h]$ で連続で、$(a,a+h)$ で微分可能であるならば、
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \qquad 0<\theta<1$$
を満たす実数 θ が存在する。