絶対不等式の系譜 ～有名絶対不等式の変遷を眺めてみよう！！

Fuminori Nakamura

●式の分類

AとBの間には、A>B, A=B, A<B のいずれかの大小関係が1つだけ成り立つ。

- 式（2つの数量 AB の大小関係を表すもの）
  - A=B 等式
    - 恒等式 … 変数のすべての値に対して式が成立
    - 方程式 … 変数のある値に対して式が成立
  - A<B, A>B 不等式
    - 絶対不等式 … 変数のすべての値に対して式が成立
    - 条件不等式 … 変数のある値に対して式が成立

●不等式の不安

Q　3≧2 は正しい？

正しい
2つの数量 A,B は、A=B, A>B,A<B のどれか 1 つだけが成立し、2つの式が同時に成立することはない。3≧2 は 3>2 が成立し、3=2 は不成立であることを表すから正しい。
同様に 3≧3 も正しい。

Q　A>B と A+C>B+C の両辺の重さの割合は同じ？

同じではない
3>2 の両辺に 1 を加えると、4>3 になるが、それぞれの両辺を 4 倍、3 倍し比較すると、12>8, 12>9 となり、比率は異なる。天秤秤の釣り合いで考えて、重みを加えていくと、秤は水平に近づくが重さの大小関係は変わらない。

絶対不等式のつながり

㊁は等号成立の場合を表す

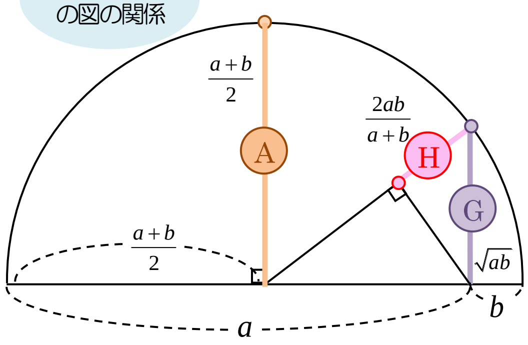
① $a^2 \geqq 0$　㊁ $a=0$ → $a^2+b^2+c^2 \geqq 0$　㊁ $a=b=c=0$

② $a>0,\ b>0$ のとき $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　㊁ $a=b$ → $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$　㊁ $a=b=c$

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$　㊁ $a=b$

$\dfrac{a+b}{2}$ … 相加平均 (Arithmetic Mean)	ある小テストの得点は、1 回目 6 点で、2 回目 8 点。得点の平均は、	$\dfrac{6+8}{2}=7$ 点
$\sqrt{ab}$ … 相乗平均 (Geometric Mean)	ある部活の前年に対する加入増率は、2 年目 6%で 3 年目 8%。加入増率の平均は、	$\sqrt{6\times 8}=6.93$ %
$\dfrac{2ab}{a+b}$ … 調和平均 (Harmonic Mean)	ある区間の移動の速さは、往路 6 km/h で復路 8 km/h。速さの平均は、	$\dfrac{2\times 6\times 8}{6+8}=6.86$ km/h

A≧G≧H の図の関係



コーシーの不等式

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$　㊁ $a:b=x:y$ → $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$　㊁ $a:b:c=x:y:z$

$x=b,\ y=c,\ z=a$ とおくと、

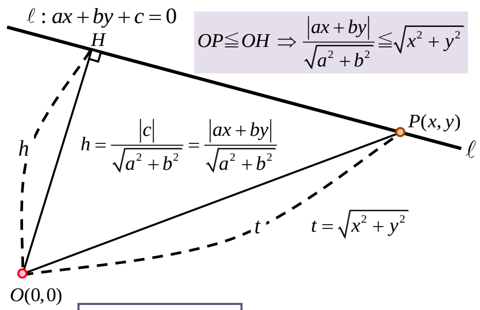
$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$　㊁ $a=b=c$

$a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca = \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$　㊁ $a=b=c$

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$OP \leqq OH \Rightarrow \dfrac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqq \sqrt{x^2+y^2}$



三角不等式

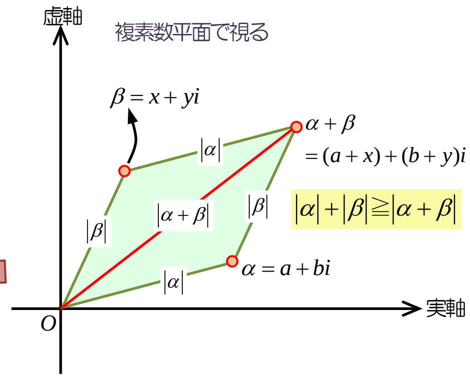
④ $|x|+|y| \geqq |x+y|$　㊁ $xy \geqq 0$ → $|x|+|y|+|z| \geqq |x+y+z|$　㊁ x, y, z は同符号

$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2},\ |\beta|=\sqrt{x^2+y^2}, |\alpha+\beta|=\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$

$|\alpha|+|\beta| \geqq |\alpha+\beta|$ に代入し、両辺を平方すると

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \geqq (ax+by)$　さらに、両辺を平方すると……

複素数平面で視る



組立除法で広がる世界 ～ 計算の高速化ができる万能ツール

Fuminori Nakamura

組立除法とは(基本)

整式 $P(x)$ を一次式 $x-\alpha$ で割ってみよう！

剰余の定理より余りは $P(\alpha)$

それでは商 $Q(x)$ は？

$x-\alpha\,\overline{)\,P(x)}$ の商 $Q(x)$，余り R

○○○
○○
○○

できれば計算はしたくない

組立除法は効率よく商を計算できる

$P(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ を1次式 $x+1$ で割るとき，商と余りを求めよ。

計算ルール

α	a	b
		$a\alpha$
	a	$b+a\alpha$

-1	4	3	2	1
		-4	1	-3
商の係数 →	4	-1	3	-2 ← 余り

商 $Q(x)=4x^2-x+3$

余り $R=-2$

$\Rightarrow P(x)=(x+1)(4x^2-x+3)-2$

とても便利だけど重要な条件がある

割る１次式の「１次の項の係数は１」

$P(x)$ を $ax+b$ で割るときは，$x+\frac{b}{a}$ で割ると考えて計算する。

$P(x)=2x^3+3x^2+5x+1$ を 1次式 $2x+1$ で割った商と余りを求めよ。

$-\frac{1}{2}$	2	3	5	1
		-1	-1	-2
	2	2	4	-1

1/2倍して調整

商 $Q(x)=x^2+x+2$

余り $R=-1$

次の式で確認しよう

$$P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+4)-1$$
$$=(2x+1)(x^2+x+2)-1$$

ちょっと世界を広げてみる

組立除法の refrain

整式を同じ一次式で何度も何度も割ってみよう！

$f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ を1次式 $x+1$ で割り，その商を $x+1$ で割ることを繰りかえす。

-1	4	3	2	1
		-4	1	-3
	4	-1	3	-2
		-4	5	
	4	-5	8	
		-4		
	4	-9		

何が起こったのだろう？

$$f(x)=(x+1)(4x^2-x+3)-2$$
$$=(x+1)\{(x+1)(4x-5)+8\}-2$$
$$=(x+1)^2\{4(x+1)-9\}+8(x+1)-2$$

以上より，

$$f(x)=4(x+1)^3-9(x+1)^2+8(x+1)-2$$

$x+1=t$ とおいてみると，

$y=f(x)$ を x 軸方向に１平行移動できた！

整式を異なる一次式で何度か割ってみよう！

$f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ を1次式 $x+1$ で割り，さらにその商を $x+2$ で割る。

-1	1	2	3	4
		-1	-1	-2
-2	1	1	2	2
		-2	2	
	1	-1	4	

$$f(x)=(x+1)(x^2+x+2)+2$$
$$=(x+1)\{(x+2)(x-1)+4\}+2$$
$$=(x+1)(x+2)(x-1)+4(x+1)+2$$

以上より，

$$f(x)=(x+1)(x+2)(x-1)+4x+6$$

$f(x)$ を2次式 $(x+1)(x+2)$ で割った商と余りを求めることができた

もう少し世界を広げてみる

組立除法からホーナー法へ

江戸時代の和算では高次方程式は組立除法を用いて解いていた。さらに，割る式が１次式でなくても除算が可能であることを知っていた。その方法は1819年英国の数学者ホーナーが考案した Horner's method と同じものである。

n 次式による除法の計算ルール

① n 次式の係数は１（大原則）
② n 次以下の係数の符号を変えた値を左側に縦に順に並べる(n 段)
③ 入力しない行列の枠に「*」を入れる　k 段は左から k 個，右から(k−1) 個
④ 組立除法の加法･乗法を段が下がると左から１つ計算をずらして実行する

$P(x)=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$ を３次式 x^3-x^2+2x-3 で割った商と余りを求めよ。

	1	2	3	4	5	6
1	*	1	3	4	*	*
-2	*	*	-2	-6	-8	*
3	*	*	*	3	9	12
	1	3	4	5	6	18

商　$Q(x)=x^2+3x+4$

余り　$R(x)=5x^2+6x+18$

３次方程式 $x^3+2x^2+ax+b=0$ が，$1+i$ を解にもつときの実数 a,b の値。

共役な複素数 $1-i$ も解より，方程式は，x^2-2x+2 で割り切れる。

	1	2	a	b
2	*	2	8	*
-2	*	*	-2	-8
	1	4	$a+6$	$b-8$

商は $x+4$　余りは $(a+6)x+(b-8)$ であるから，$a+6=0,\ b-8=0$

以上より，$a=-6,\ b=8$

残りの解は，$x=1-i,\ -4$

さらに別の世界に広げてみる

組立除法で微分

微分係数

$f(x)$ が整関数のとき，$f(x)$ を $x-a$ で割った商を $g(x)$ とすると，余りは $f(a)$ より

$$f(x)=(x-a)g(x)+f(a)$$

$$\Rightarrow\ f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}g(x)$$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+4$ のとき，$x=-2$ における微分係数を求めよ。

-2	1	-2	-3	4
		-2	8	-10
	1	-4	5	-6
		-2	12	
	1	-6	17	

$f(x)$ を $x+2$ で割った商を $g(x)$ とすると，

$f'(-2)=g(-2)=17$

２次関数の接線の方程式

$f(x)=ax^2+bx+c$ とするとき，$x-\alpha$ の除算を組立除法で２回すると，

$$f(x)=(x-\alpha)\{a(x-\alpha)+m\}+n$$
$$=a(x-\alpha)^2+m(x-\alpha)+n$$

接線の方程式は，$y=m(x-\alpha)+n$

$f(x)=2x^2+3x+1$ 上の $x=-2$ に対応する点の接線の方程式を求めよ。

-2	2	3	1
		-4	2
	2	-1	3 ← (y 座標)
		-4	
	2	-5 ← (接線の傾き)	

接線の方程式は，

$y=-5(x+2)+3=-5x-7$

関数 $f(x)$ が n 次式のとき，$x=\alpha$ における $f(x)$ 上の接線の方程式は，組立除法で，$x-\alpha$ の除算を $(n+1)$ 回計算することで求めることができる。

もっと違った世界に広げてみる

組立除法で n 進法変換

N進法から10進法

10進法の100を３進法に変換するには右図のように３で割った余りを求めていく。

3	100		
3	33	…	1
3	11	…	0
3	3	…	2
	1	…	0

$100=10201_{(3)}$

逆に，３進法で表された数を10進法に変換するには，組立除法で掛け算を繰り返していく。

3	1	0	2	0	1
		3	9	33	99
	1	3	11	33	100 ← (10進法)

組立除法ができること

$f(x)$ に対して $(x-\alpha)$ の除算を繰り返し実行すると，$f(x)$ は次のように変形できる。

$$f(x)=a_n(x-\alpha)^n+a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+\cdots+a_1(x-\alpha)+a_0$$

特に，$\alpha=-\frac{a_{n-1}}{na_n}$ とすると，$(n-1)$ 次の項は消える。これは，２次式では，平方完成できることを表している。

$y=2x^2+3x+4$ のとき，$\alpha=-\frac{3}{4}$，右表の組立除法より，

$$y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

$-\frac{3}{4}$	2	3	4
		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{8}$
	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{23}{8}$
		$-\frac{3}{2}$	
	2	0	

３次式　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のときは，$\alpha=-\frac{b}{3a}$ で除算を繰り返すと２次の項は消える。

これを利用して16世紀のイタリアの数学者カルダノは，３次方程式の解の公式を導き出している。さらに，カルダノの弟子であるフェラーリは，４次方程式の解の公式を発見した。

組立除法の概念は方程式の世界を広げたことになる。

組立除法の可能性の世界はまだまだ広がっている。

複素数妖かしワールド　～夢と空想で広がる異次元世界への招待

Fuminori Nakamura

２次方程式　$x^2-2x+2=0$　の解は　$x=1\pm\sqrt{-1}$

でも、$\sqrt{-1}$ は実数の範囲では存在しない数。

２次方程式の解が重解も含めて必ず２つあるようにするため、新しい数を作ってみよう。

$\sqrt{-1}=i$　…虚数単位

$i^2=-1$

欠点（マイナス）を包み込んでこそ愛

$a>0$　のとき、$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}=\sqrt{a}i$　…純虚数

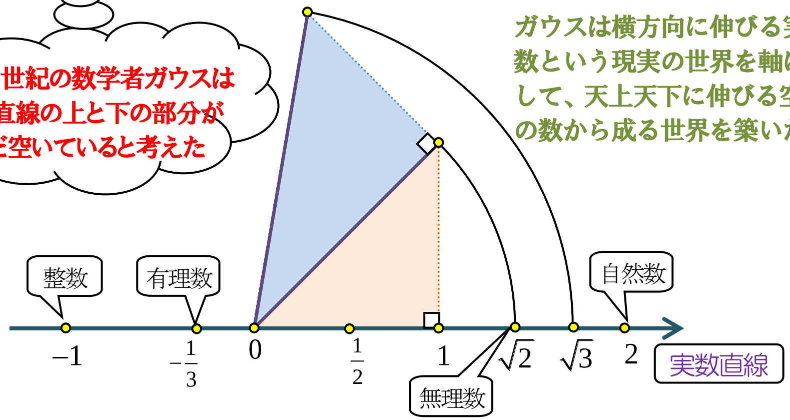
これから　$x^2-3x+4=0$　の解は

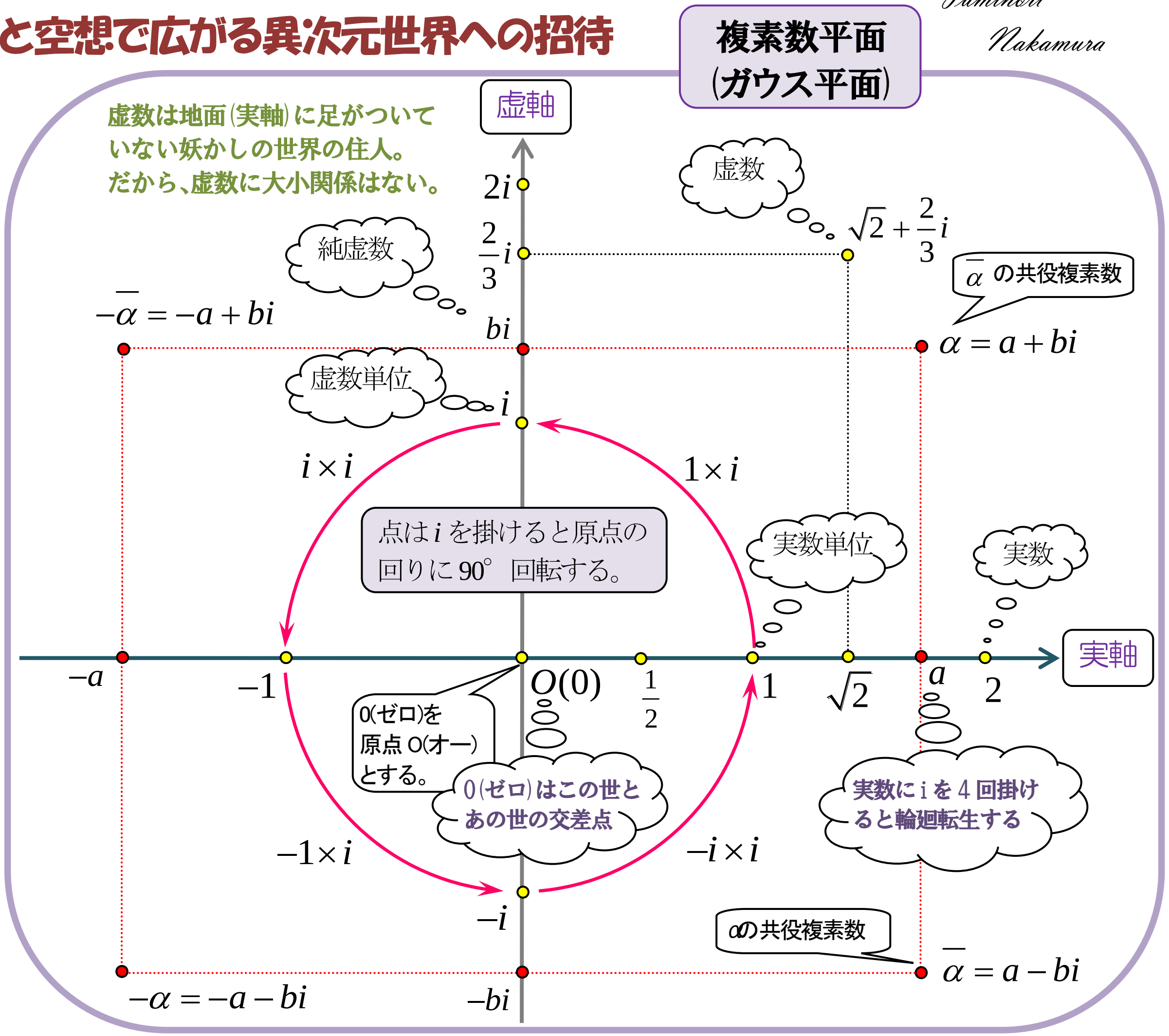
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{…虚数}$$

全ての実数は、点として数直線上に置くことができる！
では、虚数を表す点はどこにおけばいいだろうか？

19 世紀の数学者ガウスは数直線の上と下の部分がまだ空いていると考えた

ガウスは横方向に伸びる実数という現実の世界を軸にして、天上天下に伸びる空想の数から成る世界を築いた。



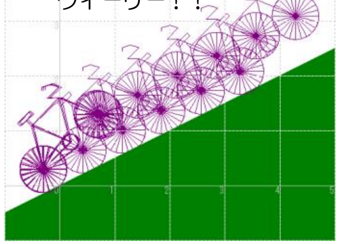


複素数平面上に置かれた図形は、虚数を足したり、掛けたりして、平行移動、回転移動させることができる。

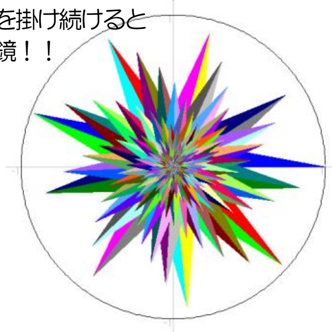
(Complex Number)
複素数 $a+bi$ =
実部　虚部

- $a=0$
  - $b=0$　… 0（ゼロ）
  - $b\neq 0$ (bi)　…純虚数
- $a\neq 0$
  - $b=0$ (a)　…実数
  - $b\neq 0$　…虚数 (Imaginary Number)

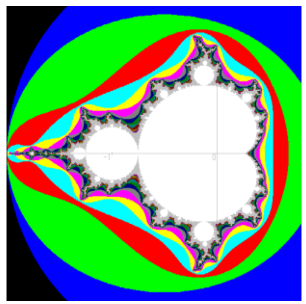
自転車に虚数を掛けてから足すとウィーリー！！



虚数を掛け続けると万華鏡！！



複素数平面上の点をある複素数で変換するとフラクタル図形ができる（マンデルブロ集合）



グラフの装い

グラフは幽霊のようなもの
憑依しなければ、実体化はできない

関数には次の３つの表現法がある。
〇陽関数 $\Rightarrow y=f(x)$　ex）$y=2x+3$
〇陰関数 $\Rightarrow f(x,y)=0$　ex）$2x-y+3=0$
〇関数の媒介変数(parameter)表示
$\Rightarrow x=f(t),\ y=g(t)$　ex）$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}$

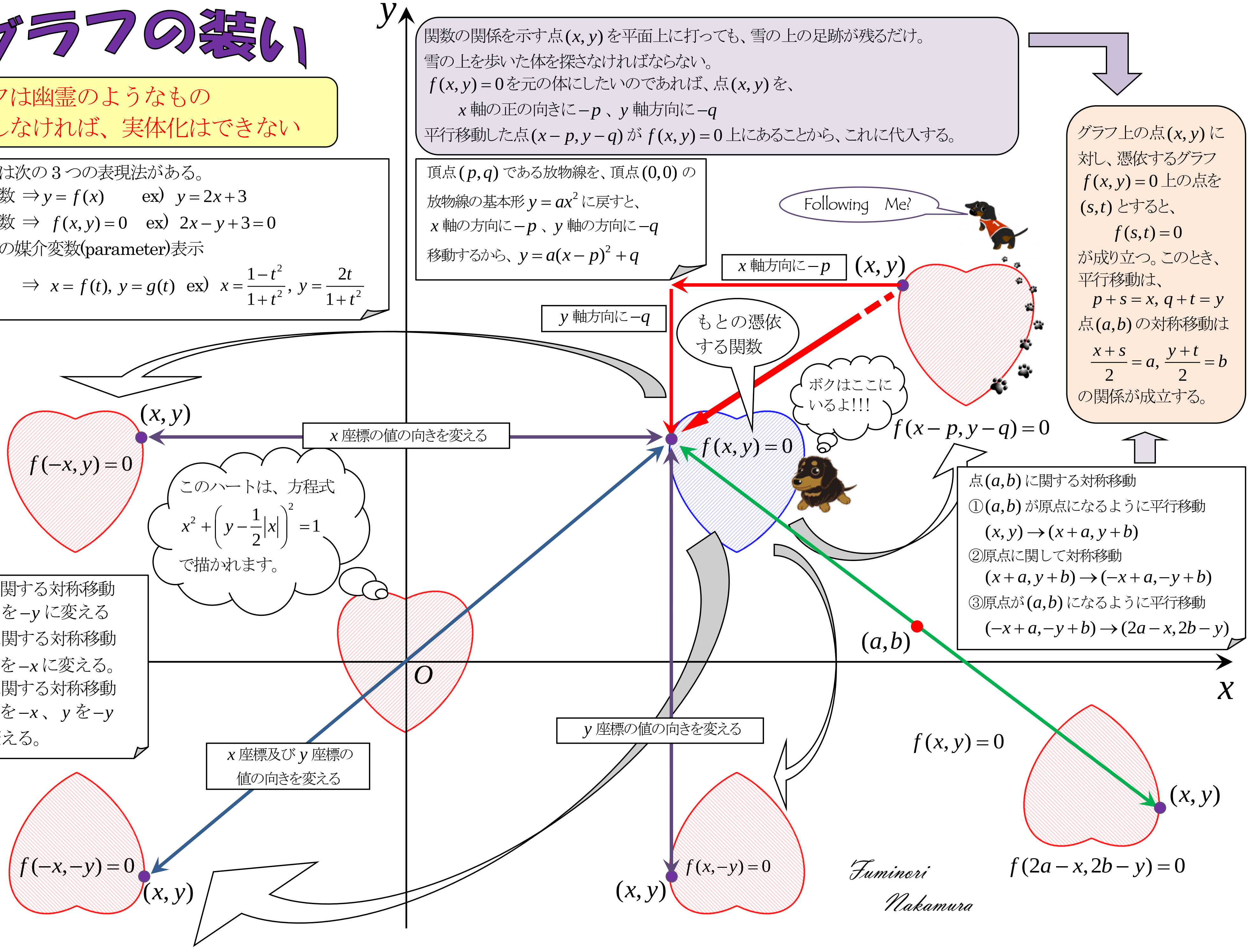
関数の関係を示す点(x,y)を平面上に打っても、雪の上の足跡が残るだけ。
雪の上を歩いた体を探さなければならない。
$f(x,y)=0$を元の体にしたいのであれば、点(x,y)を、
　x軸の正の向きに$-p$、y軸方向に$-q$
平行移動した点$(x-p,y-q)$が$f(x,y)=0$上にあることから、これに代入する。

頂点(p,q)である放物線を、頂点$(0,0)$の
放物線の基本形$y=ax^2$に戻すと、
x軸の方向に$-p$、y軸の方向に$-q$
移動するから、$y=a(x-p)^2+q$

グラフ上の点(x,y)に
対し、憑依するグラフ
$f(x,y)=0$上の点を
(s,t)とすると、
$f(s,t)=0$
が成り立つ。このとき、
平行移動は、
$p+s=x,\ q+t=y$
点(a,b)の対称移動は
$\dfrac{x+s}{2}=a,\ \dfrac{y+t}{2}=b$
の関係が成立する。

点(a,b)に関する対称移動
①(a,b)が原点になるように平行移動
　$(x,y)\to(x+a,y+b)$
②原点に関して対称移動
　$(x+a,y+b)\to(-x+a,-y+b)$
③原点が(a,b)になるように平行移動
　$(-x+a,-y+b)\to(2a-x,2b-y)$

〇x軸に関する対称移動
　$\Rightarrow$　yを$-y$に変える
〇y軸に関する対称移動
　$\Rightarrow$　xを$-x$に変える。
〇原点に関する対称移動
　$\Rightarrow$　xを$-x$、yを$-y$
　に変える。



Fuminori Nakamura

平面図形を測定する3つのアイテム ～平面図形の健康診断をしよう！

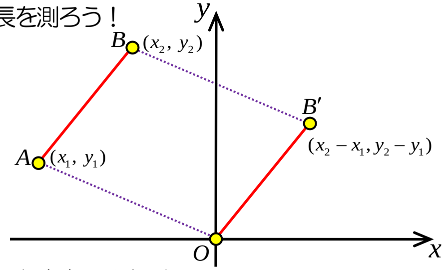
Fuminori Nakamura

平面図形の体は、３つのツールを用いて測定することができる。

Item① 線分の長さ …図形の身長を測ろう！

$$OA=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$$

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



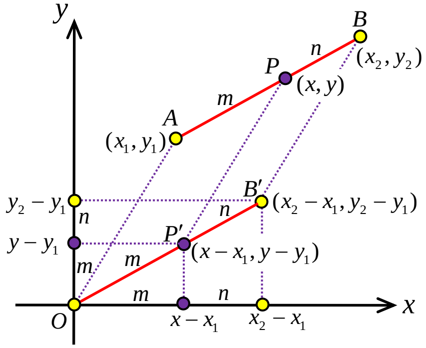
Item② 線分の分点 …図形の身長と座高の比を測ろう！

線分 AB を $m:n$ の比に分ける点 $P(x, y)$ は

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} \qquad \begin{matrix} x_1 & & x_2 \\ & \times & \\ m & & n \end{matrix}$$

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n} \qquad \begin{matrix} y_1 & & y_2 \\ & \times & \\ m & & n \end{matrix}$$

※　$m:n$ の比に外分
　⇒m,n の小さい方に-1を掛ける



Item③ 点と直線の距離 …図形の高さを求めて体重(面積)を測ろう！

原点と直線 $y=mx+n$ (標準形) との距離

$m=\tan\theta, OA=|n|$ より $d^2=OH^2=(OA\cos\theta)^2$

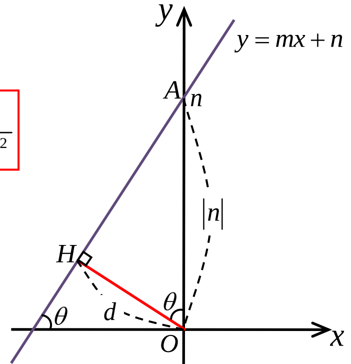
ここで、$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より、　$\boxed{d^2=\dfrac{n^2}{1+m^2}}$

原点と直線 $ax+by+c=0$ (一般形) との距離

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}\ (b\neq 0)$ より、　$\boxed{d^2=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}}$

点 $A(x_1, y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離

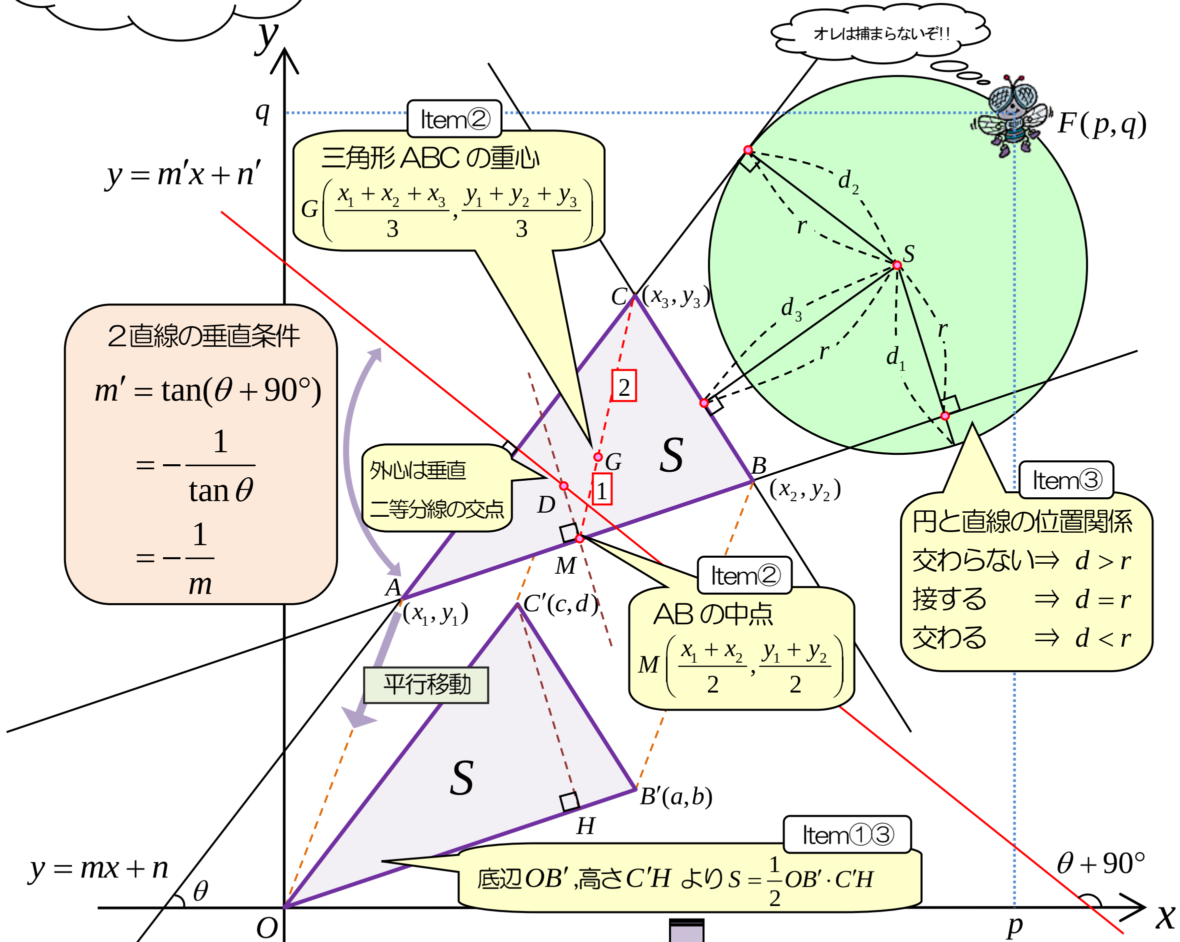
点 A と直線を、x 軸方向に $-x_1$、
y 軸方向に $-y_1$ 平行移動すると、
点 A は原点、直線は $ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$



$$\boxed{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

われ思う
ゆえに　座標あり

フランスの哲学者にして数学者であったデカルト(1596−1650)は、ベットで寝ていたとき格子状の天井を飛び回るハエの位置を測定するために直交座標を考案したという逸話がある。座標の導入により、White Paper 上の図形は、マス目上に描かれることで、飛躍的に分析技術が高まっていく。



点 C' と直線 $bx-ay=0$ との
距離は $C'H=\dfrac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
底辺の長さ $OC'=\sqrt{a^2+b^2}$

三角形の面積公式

$$S=\Delta ABC=\Delta OB'C'=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

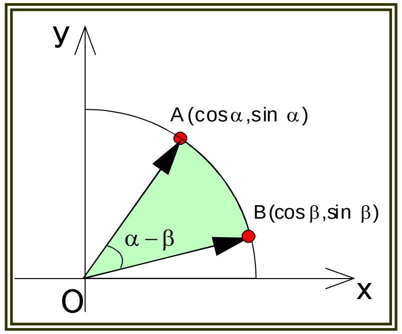
$$\begin{matrix} (a\ , & & b) \\ & \times & \\ (c\ , & & d) \end{matrix}$$

加法定理と仲間たち

Fuminori Nakamura

【加法定理はベクトルの内積】

$$\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$



【合成の公式】

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

なんて公式はいらぬ

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$

でよい。

合成は加法定理の逆演算

加法定理が展開なら

合成は因数分解

【加法定理】

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ （複号同順）

$\beta=\alpha$ とおく

【２倍角の公式】

① $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$2\alpha=\theta$

【半角の公式】

① $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

② $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

③ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

左辺の２乗に

注意

加法定理①,②の和・差

覚えるな！作れ！

【積和の公式】

① $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

② $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

③ $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

④ $2\sin\alpha\sin\beta=-\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

$\beta=2\alpha$ とおく

【３倍角の公式】

① $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

② $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

ミシン引く吉田さん（なんのこっちゃ）

サンシャイン　風邪引いて夜風が身にしみる

というのもある

$\alpha+\beta=A,\alpha-\beta=B$

作るな！覚えろ！

【和積の公式】

① $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

② $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

③ $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

④ $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

咲いたわ(+)咲いた　庭に(2)咲いたコスモス

咲かない(−)咲かない　庭にコスモス咲かない

心と心が結ばれて　２人は恋焦がれ

心と心が離れて　(身)引いて２人はさよならさよなら

２倍角の公式と

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

を使うと

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とすると

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

三角方程式・不等式を t

の高次方程式・不等式に

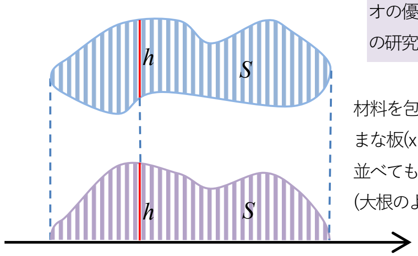
変換します

放物線で囲む図形の面積　～カヴァリエリが叶えたアルキメデスの夢

Fuminori Nakamura

カヴァリエリの原理

カヴァリエリ(1598-1647)は 17 世紀イタリアの数学者。ガリレオの優れた弟子であり，天文学の研究にも成果を残している。

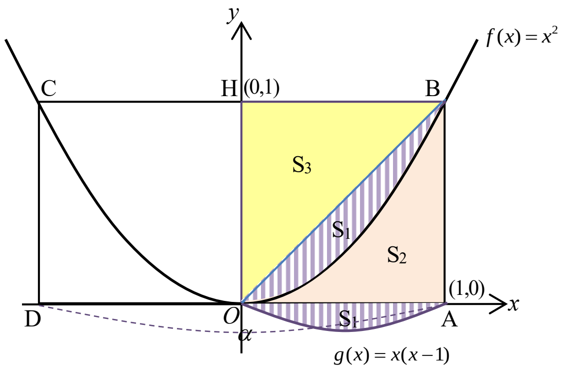


材料を包丁でトントンと千切し，まな板(x 軸)に下揃えをして並べても材料の面積はもとと不変。(大根のような立体についても成立)

図の放物線と直線が囲む図形の面積比は

$S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 2 : 3$

であることをアルキメデスは知っていた



放物線 $f(x)$ の弦 OB と弧で囲まれる図形の面積 S_1 は，x 軸と放物線 $g(x)$ の弧 OA で囲む面積に等しい。

この図形を x 軸方向に 2 倍し，y 軸方向に 4 倍した放物線は，$f(x)$ の弧 BC である。弦 BC と $f(x)$ の弧で囲む面積 T は，

$$T = 2 \times 4 \times S_1 = 8S_1$$

一方，$S_3 = \frac{1}{2} OH \cdot HB = \frac{1}{2}$　であるから，

$$T = 2(S_1 + S_3) = 2\left(S_1 + \frac{1}{2}\right) = 2S_1 + 1$$

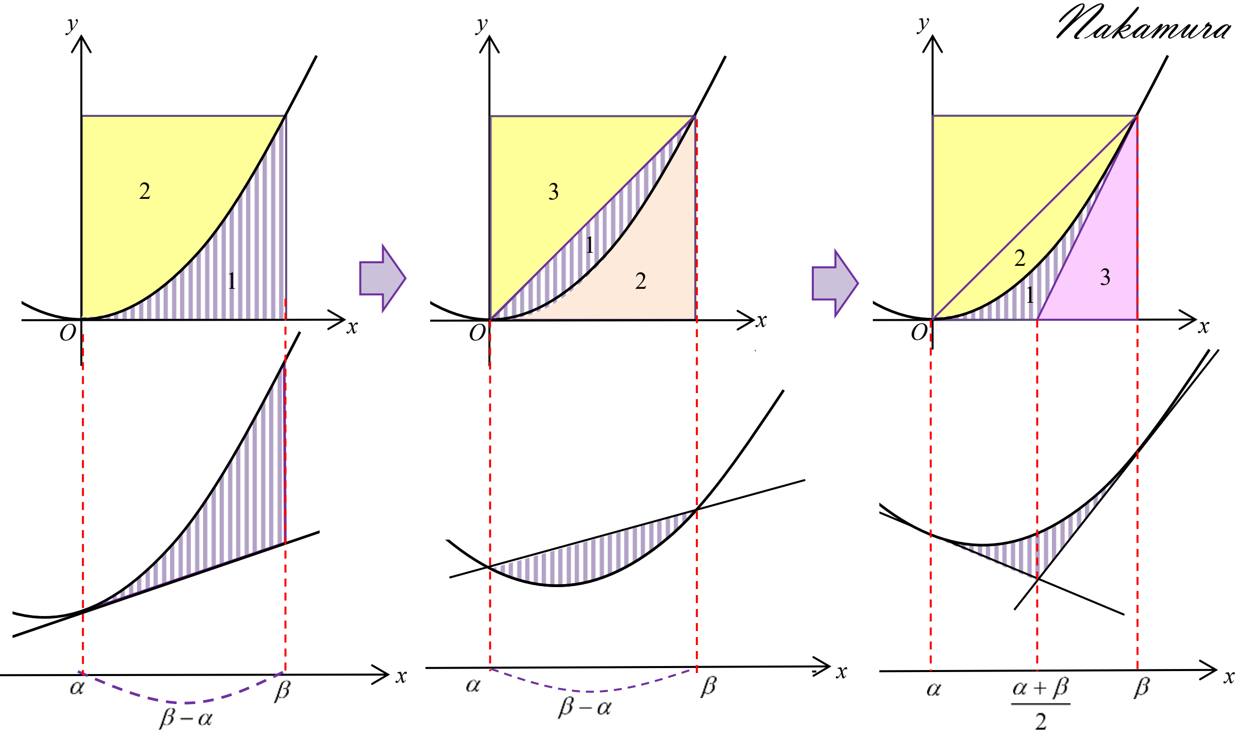
よって，$T = 8S_1 = 2S_1 + 1$ より，$S_1 = \frac{1}{6}$

$$S_2 = S_3 - S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

以上より，$S_1 : S_2 : S_3 = 1:2:3$

Map

Graph



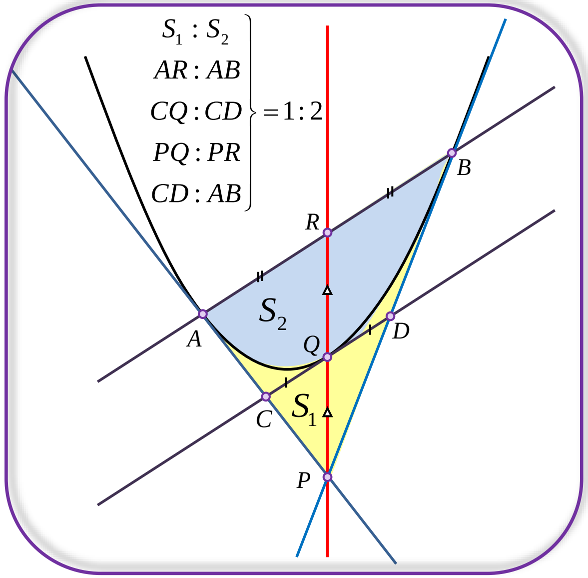
Area

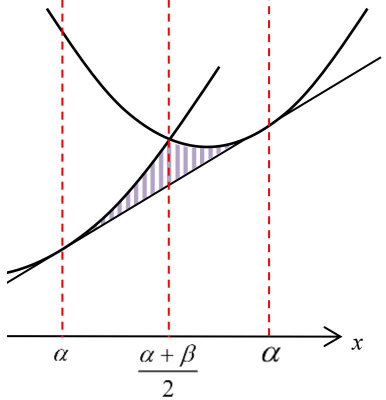
放物線の 2 次の項の係数 1 の面積

$S = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3$　　$S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$　　$S = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3$

ヘレニズム幾何学の創始者であるアルキメデスは(B.C.278-212)は，板の上に放物線を描き切り取り，天秤にかけて釣り合いを調べることで，弦と放物線で囲まれる図形と，2 接線と放物線で囲まれる図形の面積比を実験的に求めている。ヘレニズム時代には無限の概念がなかったのでアルキメデスは「取り尽くし法」という方法で，その証明を与えた。

解析的な解法は 17 世紀のライプニッツ(ニュートン)が微分積分学を確立するまで待たねばならない。





2 つの放物線の共通接線の傾きは 2 つの放物線の頂点を結ぶ直線の傾きに等しい