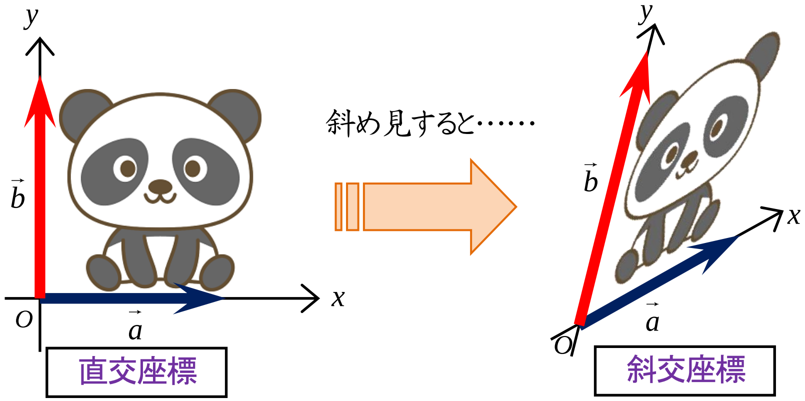
世の中をちょっと斜に構えて眺めてみよう



斜交座標を作る標準基底

平面上で，x 軸，y 軸に相当するベクトルを標準基底という。

$\vec{a}, \vec{b}$ が標準基底のときは，次の条件を満たす。

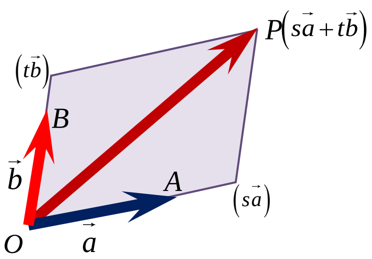
x 軸，y 軸に目盛を刻むために ⇒	$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$
x 軸，y 軸で平面を作るために ⇒	$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$

平面上のすべての点 $P(\vec{p})$ は

標準基底 $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて

その定数倍の和として表す

ことができる。



xy 平面上の標準基底を $\vec{e_1}=(1,0),\ \ \vec{e_2}=(0,1)$，

平面上の任意の点 $P(\vec{p})$ は，$\vec{p}=(x,y)$ とすると，

$$\vec{p}=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$$

である。だから $\vec{a},\vec{b}$ を標準基底とする斜交座標上の点 $P(\vec{p})$ が，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と表されるとき，s, t はそれぞれ斜交座標上の x 座標，y 座標とみなせばよい。

Fuminori Nakamura

【三角形の面積】

$$\Delta OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta \quad \cdots\cdots 三角比$$

$$\Delta OAB=\frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \quad \cdots\cdots ベクトル$$

$$\Delta OAB=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1| \quad \cdots\cdots 座標平面$$

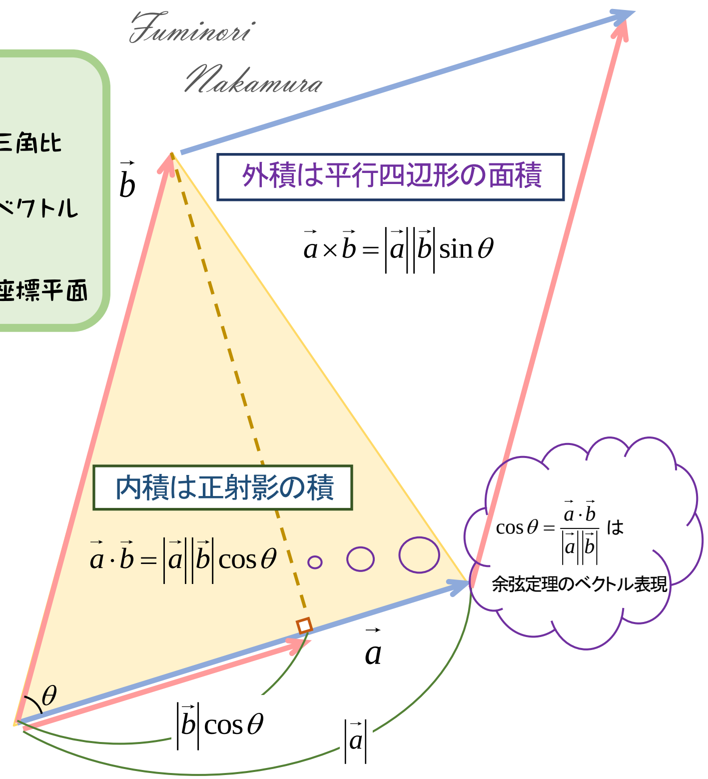
【平行・垂直条件】

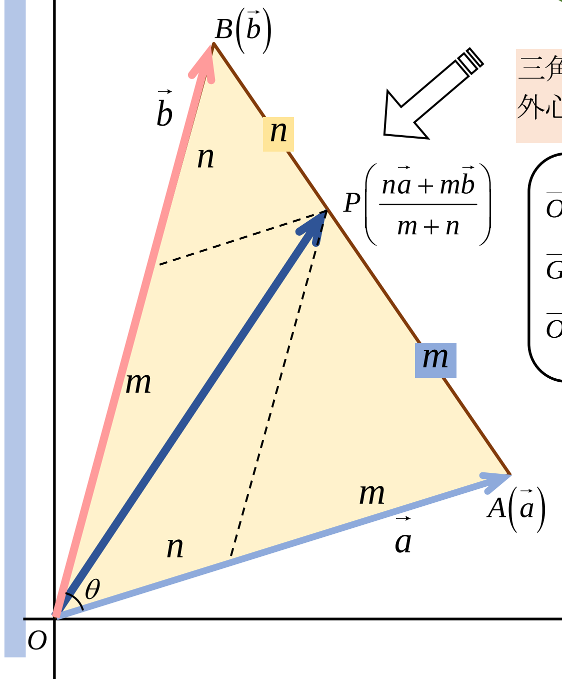
$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \Delta OAB=0$

$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow a_1b_2=a_2b_1$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \Delta OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$

$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$





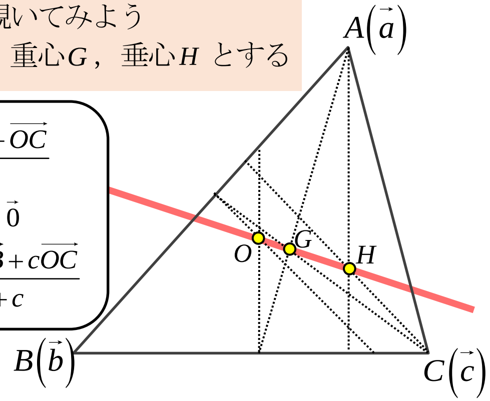
三角形の内側を覗いてみよう

外心 O，内心 I，重心 G，垂心 H とする

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$



外心 O，重心 G，垂心 H は一直線上にあり，

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$$

が成立する。この直線をオイラー線という

べき乗の和 ガウス少年が教えてくれたこと

10 歳のガウス少年は自然数の和の計算を，瞬時に
右のように計算をして，数学の先生を驚かせました

$$
\begin{array}{rl}
S = & 1+\ \ 2+\ \ 3+\cdots\cdots+48+49+50 \\
+\ S = & 50+49+48+\cdots\cdots+\ \ 3+\ \ 2+\ \ 1 \\
\hline
2S = & 51+51+51+\cdots\cdots+51+51+51
\end{array}
$$

自然数の和

180° 回転　　　　とみると……

S

1	2	3	…	n-2	n-1	n

＋

S

n	n-1	n-2	…	3	2	1

対応するセルの和

$2S$

＝

n+1	n+1	n+1	…	n+1	n+1	n+1

n 個

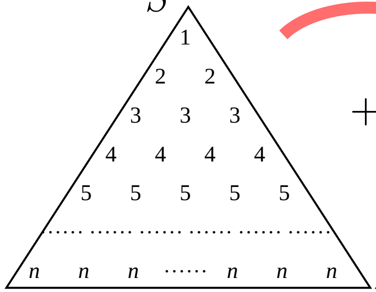
$$2S = n\times(n+1)$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

平方数の和

$$n^2 = n\times n = n+n+\cdots+n$$　とみると……

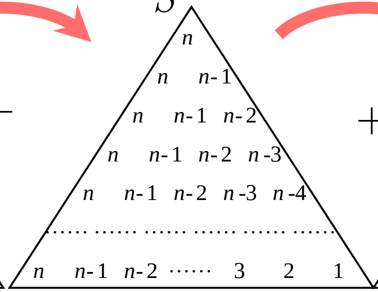
S



120° 回転

＋

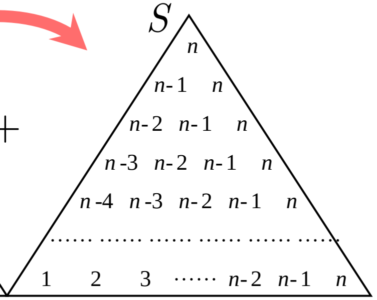
S



120° 回転

＋

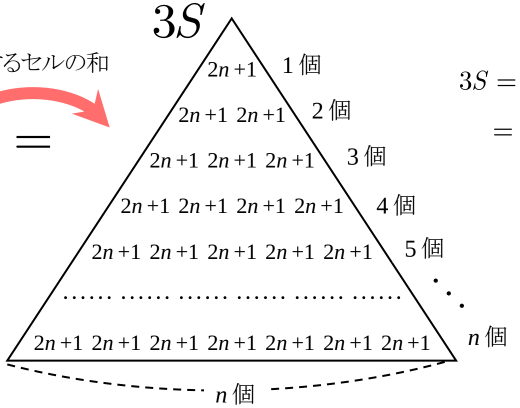
S



対応するセルの和

＝

$3S$



$$
\begin{aligned}
3S &= (1+2+3+4+\cdots+n)\times(2n+1)\\
&= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

立方数の和

$$
\begin{aligned}
n^3 &= n\left\{2\times\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}\\
&= n\{1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1\}
\end{aligned}
$$

とみると……

S

1	2	3	4	…	n-1	n
2	4	6	8	…	2(n-1)	2n
3	6	9	12	…	3(n-1)	3n
4	8	12	16	…	4(n-1)	4n
…	…	…	…	…	…	…
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	…	$(n-1)^2$	(n-1)n
n	2n	3n	4n	…	(n-1)n	n^2

90° 回転

＋

S

n	n-1	…	4	3	2	1
2n	2(n-1)	…	8	6	4	2
3n	3(n-1)	…	12	9	6	3
4n	4(n-1)	…	16	12	8	4
…	…	…	…	…	…	…
(n-1)n	$(n-1)^2$	…	4(n-1)	3(n-1)	2(n-1)	n-1
n^2	n(n-1)	…	4n	3n	2n	n

90° 回転

＋

S

n	2n	3n	4n	…	(n-1)n	n^2
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	…	$(n-1)^2$	(n-1)n
…	…	…	…	…	…	…
4	8	12	16	…	4(n-1)	4n
3	6	9	12	…	3(n-1)	3n
2	4	6	8	…	2(n-1)	2n
1	2	3	4	…	n-1	n

90° 回転

＋

S

n^2	(n-1)n	…	4n	3n	2n	n
(n-1)n	$(n-1)^2$	…	4(n-1)	3(n-1)	2(n-1)	n-1
…	…	…	…	…	…	…
4n	4(n-1)	…	16	12	8	4
3n	3(n-1)	…	12	9	6	3
2n	2(n-1)	…	8	6	4	2
n	n-1	…	4	3	2	1

対応するセルの和

$4S$

＝

$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$

n 個　n 個

$$
\begin{aligned}
4S &= (n\times n)\times(n+1)^2\\
&= \{n(n+1)\}^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$$

Fuminori Nakamura

数列の漸化式の系図

Fuminori Nakamura

B 分数型漸化式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}$$

B1

$$\boxed{a_{n+1}=\frac{pa_n}{ra_n+s}}$$

$\Rightarrow a_n\neq 0$ を確認し，両辺の逆数をとる。

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{s}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{r}{p}$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{s}{p}b_n+\dfrac{r}{p}$

A3

B2

$$\boxed{a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}}$$

$\Rightarrow$ 特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解を

$x=\alpha,\beta$ とする。

① $\alpha\neq\beta$ のとき $b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$

A2 ①

② $\alpha=\beta$ のとき $b_n=a_n-\alpha$

B1

C 指数型漸化式

$$a_{n+1}=ka_n^{\,p}$$

$\Rightarrow a_n>0,k>0$ であることを確認し

両辺の対数(通常は常用対数)をとる。

$$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}k+p\log_{10}a_n$$

$b_n=\log_{10}a_n\quad q=\log_{10}k$ とおくと，

$$b_{n+1}=pb_n+q$$

A3

A 隣接2項漸化式

$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$ （$f(n),g(n)$ は n の関数）

A1

$$\boxed{a_{n+1}=a_n+g(n)}$$

①$a_{n+1}=a_n+d$ （$g(n)=d$:定数） …【等差型】

$\Rightarrow\quad a_n=a_1+(n-1)d$

②$a_{n+1}=a_n+g(n)$ （$g(n)$: n の関数） …【階差型】

$\Rightarrow\quad a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}g(k)\quad(n\geqq 2)$

A2

$$\boxed{a_{n+1}=f(n)a_n}$$

①$a_{n+1}=ra_n$ （$f(n)=r$:定数） …【等比型】

$\Rightarrow\quad a_n=a_1r^{n-1}$

②$a_{n+1}=f(n)a_n$ （$f(n)$: n の関数）

$\Rightarrow\quad a_n=f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)a_1\quad(n\geqq 2)$

A3

$$\boxed{a_{n+1}=pa_n+q}$$ （隣接２項漸化式の標準型）

$x=px+q$ の解を $x=\alpha$ とすると，

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

数列$\{a_n-\alpha\}$ は公比 p の等比数列

A2 ①

A4

$$\boxed{a_{n+1}=pa_n+g(n)}$$

①$a_{n+1}=pa_n+q^n$ （$g(n)=q^n$）

$\Rightarrow$ 両辺を p^{n+1} で割る $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$

A1 ②

両辺を q^{n+1} で割る $\dfrac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{a_n}{q^n}+\dfrac{1}{q}$

A3

②$a_{n+1}=pa_n+g(n)$

$\Rightarrow$ $g(n)=$（n の１次式）のときは階差を考える。

※ 恒等式 $f(n+1)=pf(n)+g(n)$ を用い，

$\{a_n-f(n)\}$ が等比数列になることから求める。

D 隣接３項漸化式

$$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$$

特性方程式 $px^2+qx+r=0$ の解を

$x=\alpha,\beta$ とする。

① $\alpha\neq\beta$ のとき

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ より，

$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}\ \cdots(\flat)$

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ より，

$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\ \cdots(\sharp)$

$(\flat)$-$(\sharp)$より a_{n+1} を消去

② $\alpha=\beta$ のとき，

$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$

A4 ①

E 連立型漸化式

$$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$$

左辺が a_{n+1} の式より，

$$b_n=\frac{1}{q}a_{n+1}-\frac{p}{q}a_n$$

これを，左辺が b_{n+1} の式に代入

D

※ 特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$

の解を $x=\alpha,\beta$ とすると，

$\{a_n-\alpha b_n\},\{a_n-\beta b_n\}$ が等比数列に

なることからも求められる。