

クレパリン的グラフり検査

札幌旭丘高校 中村文則

ワクワク、グラフりマメくる！

高校で学ぶ基本的な関数のグラフは、

放物線、直線、円

の三点(セット)である。この中で一番厄介なのは放物線であろう。一般形で表現された式から、

- ① 標準形に変形し
- ② グラフの概形(軸、頂点、開き)を調べ
- ③ グラフを描画する

この手順を一つでもミスるとオジャンである。

それだけ正確さを要求するわけではあるが、ただ、生徒は自分で描いたグラフが正しいのかどうかということとは判断し難い面もある。2次関数は放物線であるからそれらしい放物線が書ければそれでよしとしてしまう。曲線上の点を2、3個プロットすれば間違いであるかどうかの判断はもちろん可能ではあるのだが……。

放物線というモノ全体を描くことは、面白くもない作業であることは間違いないから、楽しんで描こうなんて輩はいるはずもないだろう(たぶん!)。「放物線を描け」という演習問題を繰り返しやっても、いまいちグラフが正しいかどうかの確信はもてないし、ただの「ほうぶつせん」を描くだけの作業は疲れてしまうのだ。

では、楽しんで描き、正確に描くことができるような練習をするにはどうすればいいだろう。

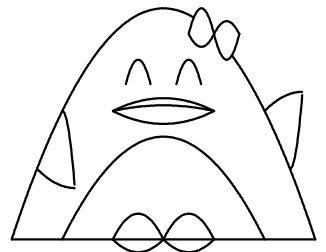
そのためには、全体である放物線というモノを、パーツとしての部分的なモノとして扱ってみたらどうだろう。単調なパーツである曲線でも組合せることで複雑な面白い図形が描かれる。放物線を描くという意識から、何か図形が生まれるぞというワクワク感をもって臨めれば最高なのだ。さらに、何か形あるものを描こうとするなら、パーツである放物線は、図形の中に綺麗に組み込まれなければいけないわけで、そこから「この放物線がここにあるのは変だぞ」、「何を間違えたのだろうか」といった自己修復の意識と可能性が生まれるのだ。何度も何度も単調に同じようなグラフ練習をさせるよりも、「放物線で描かれる一つの作品」の完成に1時間すべて費やした方がずっと楽しいしかも効果的なのである。そして描画過程で生徒もまたグラフの効率的な描き方を模索するようになる。

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフはその開き a をイメージすれば、頂点を原点とみなして $y = ax^2$ の右半分を描き、あとは対称性からもう片方を描いていく。次第にそういうリズムが確立されていく。

そういった「放物線で形作られる図形」を一つ用意してみよう。サンプルとして、ここで提示するものは、

「手を振り微笑んでいるペンギンの女の子」

である。



【指導例】

①プリント配布・説明

「2次関数の絵を描こう!」、 「座標シート」を配布。作業の説明。

②描画作業

状況に応じて、

(a) 個別作業 (b) チーム作業

個別作業は、比較的グラフの理解度が高い生徒向けである。じっくりと時間をかけて一つの作品に取り組むことでスキルアップを図る。チーム作業は、理解度がまだ低い生徒同士が分担作業をすることで、お互いの「平方完成」や「グラフの描画」のチェックをする。教えあうことにより理解は深まる。

③分析

回収したプリントから理解度を分析する。描かれた図のバランス・偏りを見ることで、「何が理解されていないのか」読み取っていく。

<対称性>

「ペンギン」は y 軸対称な放物線を多く配している図である。「軸に対しての対称性」は生徒は無視しがちな部分であるが、図形全体が対照的なものであることが認識できれば自然そう描くものである。

それでも非対称に描く生徒は問題である。

<平方完成>

図の繋がりやバランスから「平方完成」のミスは図に反映されやすい。図が y 軸対称であることから端

緒に顕れてくるものである。

<グラフの開き>

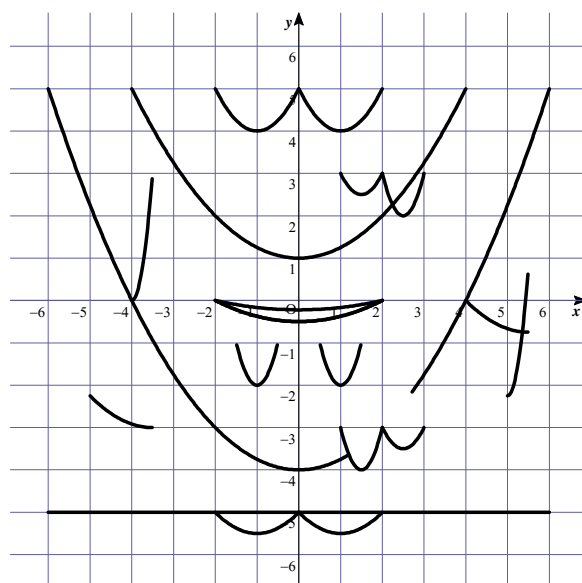
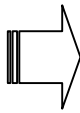
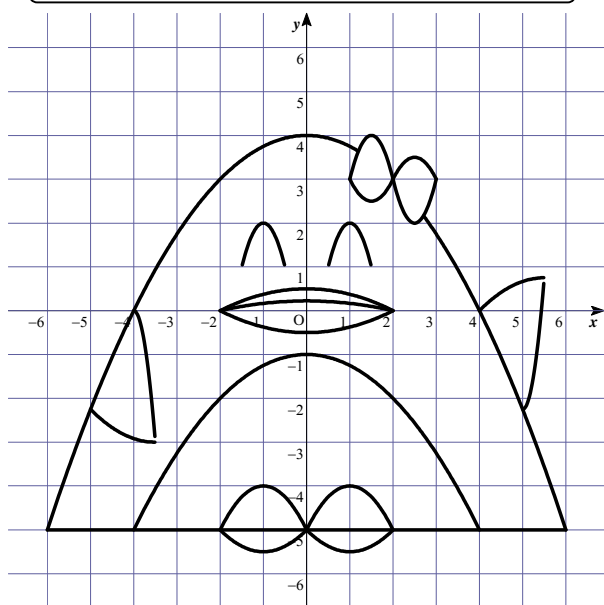
式変形の過程で、無造作に式を定数倍する生徒がいる。2次の項の係数の(-)や分数を払ってしまうのだ。その結果、特徴的な歪なグラフができあがる。

<頂点・軸>

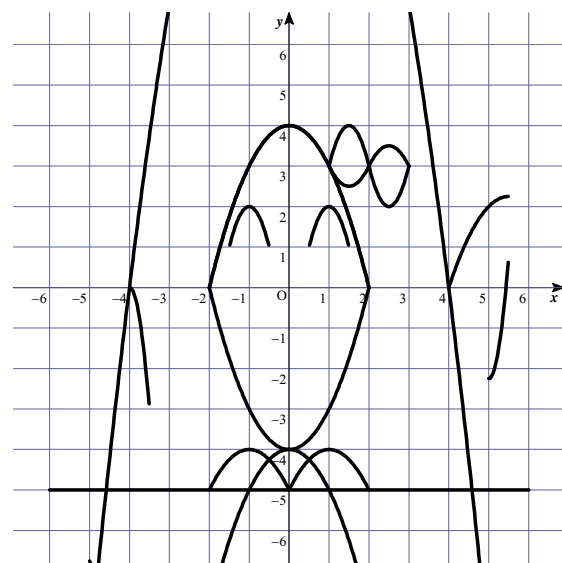
平行移動、特にx軸方向の移動がきちんと理解されていない生徒は多い。「リボン」や「手」の位置をみることで、誤った理解は図に確実に反映される。

「内田クレペリン検査」という心理検査がある。2数の和を制限時間内にひたすら計算させ、その結果から心理分析を試みるものである。図形を描くという作業も、ひたすら「平方完成⇒グラフ描画」を繰り返すものであり、心理分析に換えて、グラフ描画のどの工程が不十分であるかの理解度分析を図るものである。描画作業を通して、「クレペリン的グラフリ検査」ができるのである。生徒の理解がやや足りない部分を図から読み取り分析し、返却時にアドバイスをしていく。こういう指導のあとにもう一度同じ設定で別の絵を個別に描かせれば申し分ない結果が得られるだろう。(サンプルとしてスヌーピーの絵を提示)

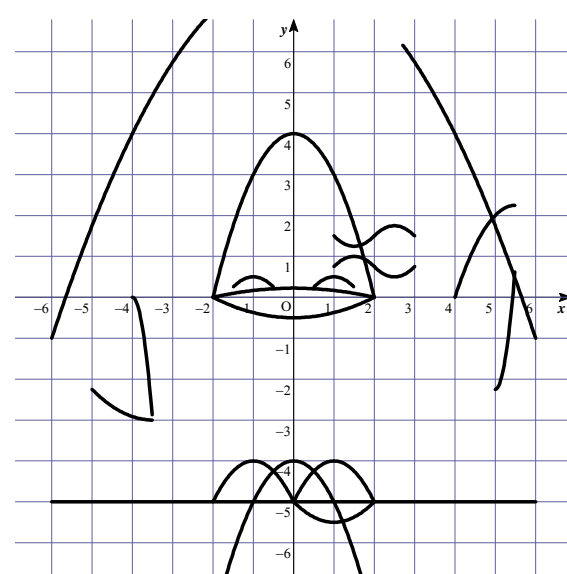
図形の偏りから読み取る理解度チェック



かってに2次の項の係数をマイナス倍するとこんな図になる



グラフの開きを無視したり、式変形で2次の項の係数を定数倍するとこうなる



x軸方向の位置を間違えて理解しているとリボンや手が崩れてしまう。

放物線で絵を描こう！！

①から⑳までの式を右の座標平面に書き表すと絵ができます。いったいどんな絵ができるでしょうか？
(できれば色を塗ってみましょう)

本ペンギンの絵は、書籍

① $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ $\left(-6 \leq x \leq \frac{6}{5}, \frac{27}{10} \leq x \leq 6\right)$ ⑪ $y = -4x^2 - 8x - 2$ $\left(-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}\right)$
 すぐに役に立つ高校の授業集

② 生き生き数学 何森 仁・小沢健一・近藤年示・時永 晃 共著 $\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$

の中の教材のあるもの(11の放物線のパーツ)を元に、さらには9個の放物線パーツを付け

③ $y = -x^2 + 2x - 5$ $(0 \leq x \leq 2)$ ⑬ $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}$ $(-2 \leq x \leq 2)$
 加え作成したものです。したがって著作権上の関係で、載せることができませんので、本

④ $y = -x^2 - 2x - 5$ $(-2 \leq x \leq 0)$ ⑭ $y = \frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{9}$ $(-2 \leq x \leq 2)$
 を購入するか、あるいは、適当なものを作成してください。

⑤ $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{2}$ $(-2 \leq x \leq 2)$ ⑮ $y = -12x^2 + 96x - 192$ $\left(-4 \leq x \leq -\frac{7}{2}\right)$
 作成する場合は、15～20個位の二次関数で表現でき、さらにy軸対称になっている
 ⑥ $y = -5$ $(-6 \leq x \leq 6)$

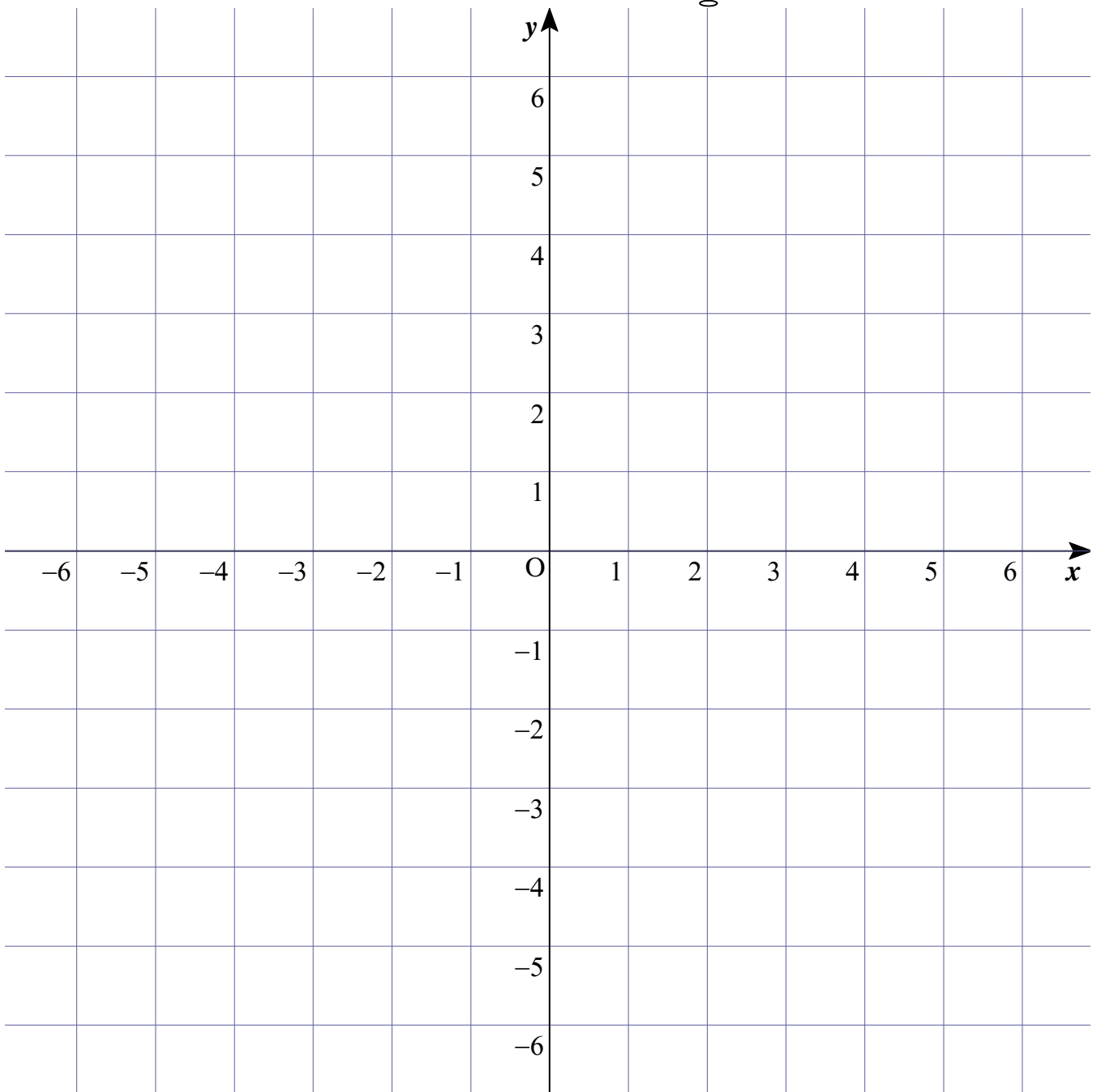
⑦ $y = -4x^2 + 12x - 5$ $(1 \leq x \leq 2)$ ⑯ $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{13}{12}$ $\left(-5 \leq x \leq -\frac{7}{2}\right)$

⑧ $y = 4x^2 - 20x + 27$ $(2 \leq x \leq 3)$ ⑰ $y = 12x^2 - 120x + \frac{1191}{4}$ $\left(5 \leq x \leq \frac{11}{2}\right)$

⑨ $y = 2x^2 - 6x + 7$ $(1 \leq x \leq 2)$ ⑱ $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$ $(-2 \leq x \leq 0)$

⑩ $y = -2x^2 + 10x - 9$ $(2 \leq x \leq 3)$ ⑳ $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 5$ $(0 \leq x \leq 2)$

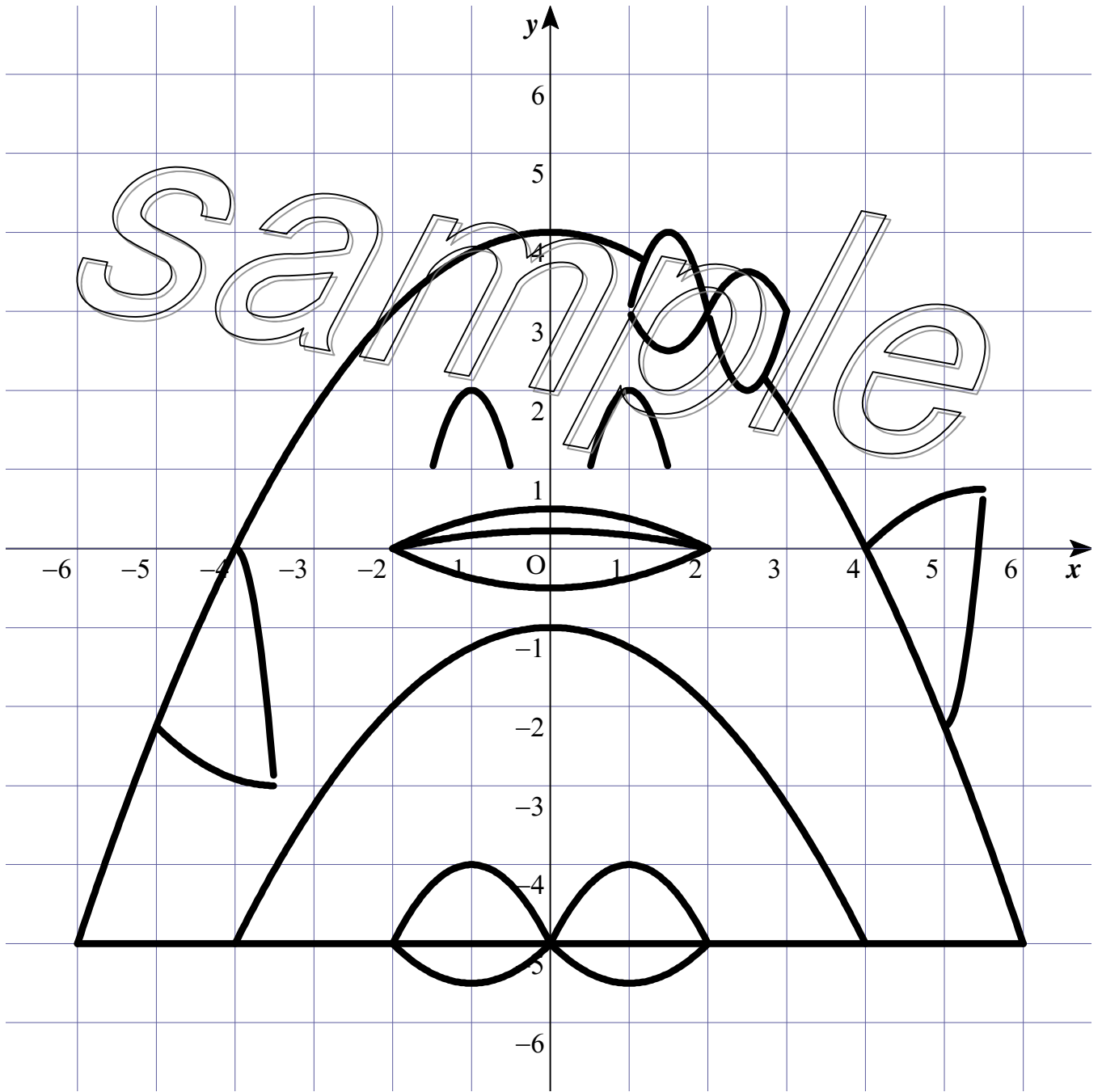
なにができるかな？



の絵

出席番号

氏名



手を振り微笑んでいるペンギンの女の子の絵

放物線で絵を描こう！！

①から⑳までの式を右の座標平面に書き表すと絵ができます。いったいどんな絵ができるでしょうか？
(できれば色を塗ってみよう)

① スヌーピーの絵は、偶然私手元に入ったものです。

作成者を調べたのですが、いまだ分っておりません。

② $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ ($-3 \leq x \leq -1$)

したがって、この絵については公開することができませんので、ご了解ください。

③ なお、もともとのスヌーピーの絵に、さらに手や鼻を付け加えてここでは作成しています。

描画は、Grapes を用いています。

④ $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ ($-1 \leq x \leq 1$)

生徒がグラフ描画が完璧にマスターできたら、次の段階として、放物線をパーツとする絵

⑤ を描かせることをやってもいいのではないのでしょうか。グラフを正確に描くことも大切で

⑥ すが、思い通りにグラフをイメージできることを重要です。世界に一つしかない絵を自分

で描くことで、イメージーションを養うことができるのではないかと思います。⑦ その場合

の描画の方法として、友田勝久先生が開発した Grapes を用いるとよりいっそう理解は深

⑧ $y = -x^2 + 2x$ ($1 \leq x \leq 2$)

まります。

⑨ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ ($0 \leq x \leq 2$)

⑩ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$ ($0 \leq x \leq 2$)

⑪ $y = -x^2 + 6x - 14$ ($3 \leq x \leq 4$)

⑫ $y = -x^2 + 2x - 6$ ($0 \leq x \leq 1$)

⑬ $y = -x^2 - 5$ ($-1 \leq x \leq 0$)

⑭ $y = 5$ ($-3 \leq x \leq 6$)

⑮ $y = 1$ ($-1 \leq x \leq 1$)

⑯ $y = -5$ ($0 \leq x \leq 2$)

⑰ $x = 3$ ($-1 \leq y \leq 0$)

⑱ $x = 2$ ($-5 \leq y \leq -4$)

⑲ $y = -6$ ($-1 \leq x \leq 4$)

⑳ $x = 3$ ($-5 \leq y \leq -\frac{9}{2}$)

㉑ $y = -2x^2 + 12x - 18$ ($3 \leq x \leq 4$)

㉒ $y = -x^2 + 5$ ($\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}$)

㉓ $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ ($\frac{18}{5} \leq x \leq 6$)

㉔ $y = \frac{2}{3}x - 6$ ($\frac{18}{5} \leq x \leq 6$)

㉕ $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 1$ ($\frac{3}{2} \leq x \leq 6$)

㉖ $y = -x^2 + 5x - \frac{29}{4}$ ($\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$)

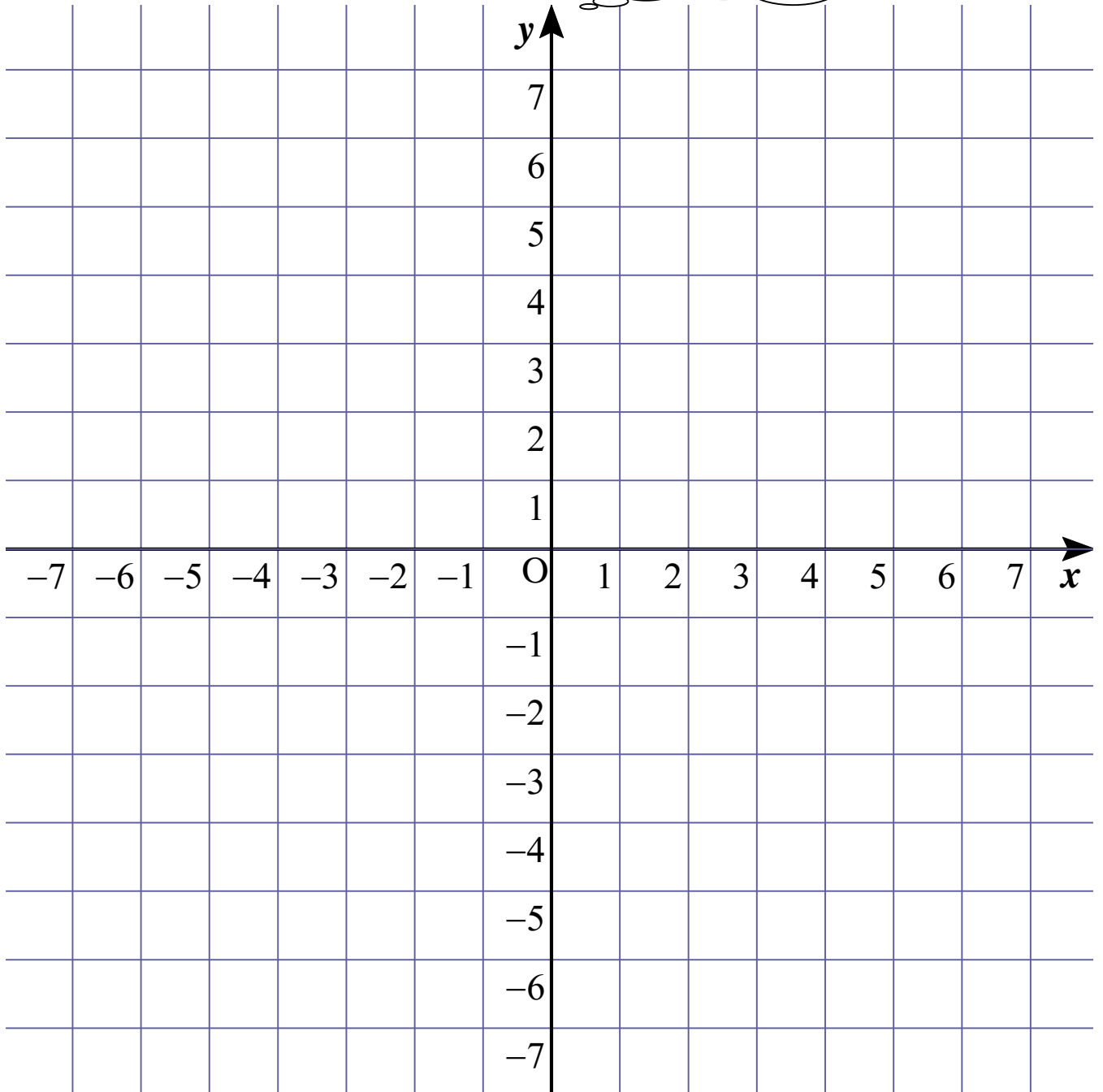
㉗ $x = \frac{3}{2}$ ($-\frac{5}{2} \leq y \leq -2$)

㉘ $y = 4x^2 + 26x + 45$ ($-\frac{7}{2} \leq x \leq -3$)

㉙ $y = -4x^2 - 26x - 39$ ($-\frac{7}{2} \leq x \leq -3$)

㉚ $y = -4x^2 - 26x - 39$ ($-\frac{7}{2} \leq x \leq -3$)

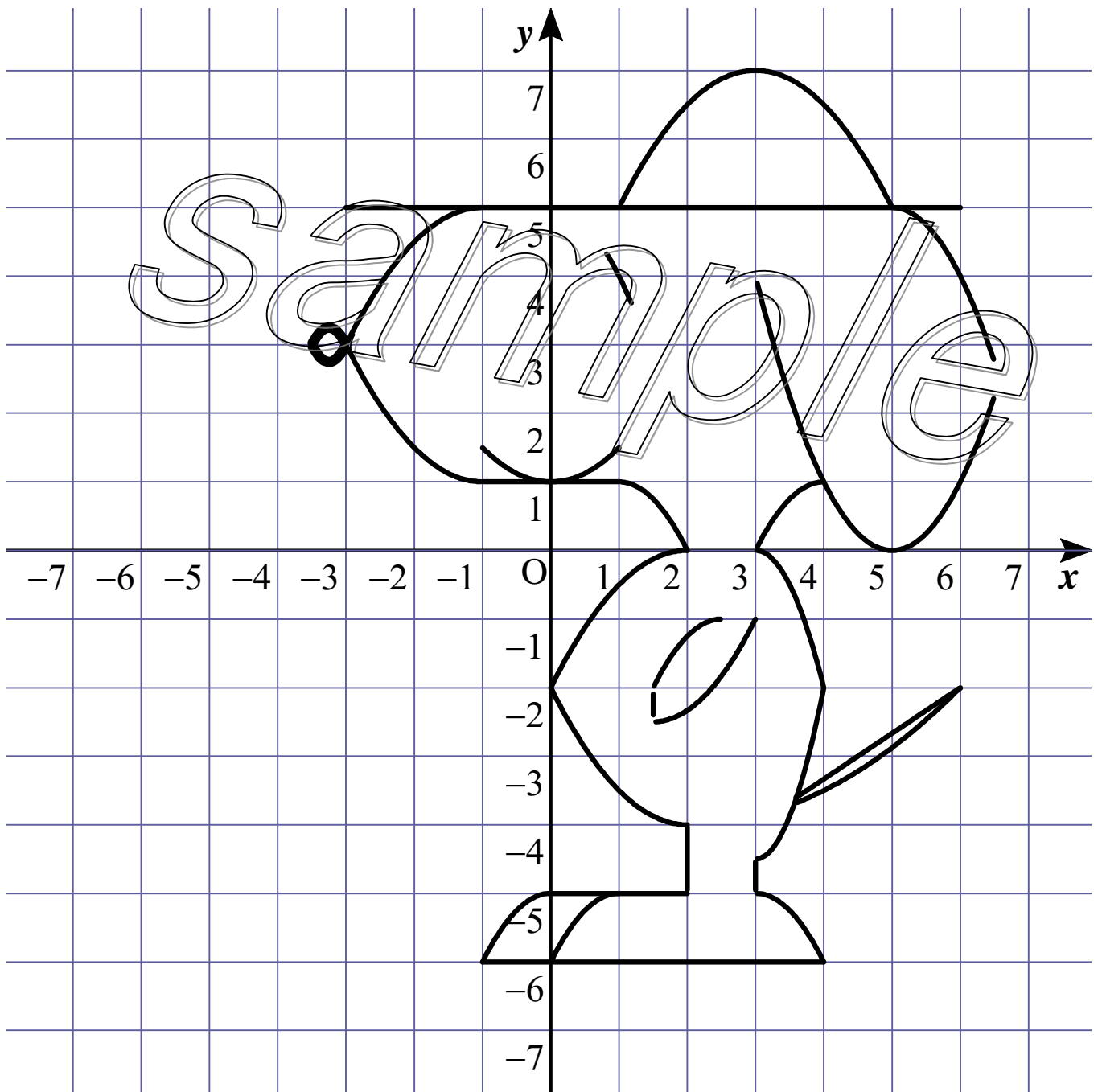
なにができるかな？



の絵

出席番号

氏名



SNOOPYの絵